వెంకటసుబ్బయ్య, వెల్లాల

ప్రధాన గణిత పుస్తకము

మదరాసు, 1929

Record no. 528

Veṅkaṭasubbayya, Vellāla

Pradhāna gaṇita pustakamu

Madarāsu, 1929

Record no. 528

Bibliographic Record Target

వెంకటసుబ్బయ్య, వెల్లాల.

ప్రధాన గణిత పుస్తకము : భాగము 1 / వెల్లాల వెంకటసుబ్బయ్యగారు రచించిన ఆంగ్లమూలమునకు భమిడిపాటి కామేశ్వరరావుగారు రచించిన ఆంధ్రానువాదము.- మదరాసు : మాక్మిలన్ అండు కంపెని, లిమిటెడ్, 1929.

xii, 399 p. ;19 cm.

Record no. 528

Veṅkaṭasubbayya, Vellāla.

Pradhāna gaṇita pustakamu : bhāgamu 1 / Vellāla Veṅkaṭasubbayyagāru raciñcina Āṃglamūlamunaku Bhamiḍipāṭi Kāmēśvararāvugāru raciñcina Āṃdhrānuvādamu.- Madarāsu : Mākmilan aṃḍu Kampeni, Limiṭeḍ, 1929.

xii, 399 p. ;19 cm.

Record no. 528

6797

ప్రధాన గణిత పుస్తకము

భాగము 1.

మదరాసు పచ్చయ్యప్ప కాలేజీకి చెందిన

ఉన్నత పాఠశాలకు ప్రధానోపాధ్యాయులును,

యస్. యల్. సి. బోర్డు సభ్యులును నగు

వెల్లాల వెంకటసుబ్బయ్యగారు బి.యే., యల్.టి. రచించిన

ఆంగ్లమూలమునకు, రాజమండ్రి

వీరేశలింగోన్నత పాఠశాలలో, ప్రధాన

గణితోపాధ్యాయులగు

భమిడిపాటి కామేశ్వరరావుగారు బి.యే., యల్.టి.

రచించిన ఆంధ్రానువాదము.

మాక్మిలన్ అండు కంపెని, లిమిటెడ్

మదరాసు, బొంబాయి, కలకత్తా, లండన్.

1929

[వెల. రూ. [illegible]

PRINTED AT THE
DIOCESAN PRESS, VEPERY, MADRAS—A. 5661

1929

PREFACE

This book in Elementary Mathematics intended for the use of Forms IV, V and VI in High Schools is written, in two volumes, in English, in accordance with the Madras S.S.L.C. Syllabus to consummate the author's series of works compiled in vernaculars for Classes IV and V and Forms I, II and III. But it will also be useful for students preparing for the School Leaving Certificate or the Entrance Examination of other Indian Universities. It is complete in itself in the sense that there is no necessity for reference to the lower books of the series. In the chapters with whose principles boys are already familiar, the chief leading points have been put in a nutshell and the questions framed are of greater difficulty than those they were accustomed to work. In the headings of chapters, this differentiation, as to whether they are revision chapters or new ones boys have to learn for the first time, has been indicated. The examples in each chapter assume a knowledge of the elementary portions and take into account the progress in Arithmetic made by the pupils entering upon the High School course. This supposition has given considerable latitude to the author in coining examples of much interest and great variety.

Numerous examples, some of the same type and others of various degrees of difficulty, have been given in each chapter; the former, to drill pupils in the fundamental processes and the latter, to give them sufficient scope for thinking, chiefly involving a combination of the basic principles in various ways. The former are mechanical, the latter intelligent. Every chapter contains an unusually large number of problems, the chief object being to help the teacher in giving different sums of the same kind to different sets of boys for class work, to prevent copying and to furnish them with another fresh stock of questions for home work.

The subject-matter of the book may be divided under four headings; Arithmetic, Algebra, Practical Geometry and Mensuration. Some chapters in Algebra on multiplication,

division, factorization and formulæ, have been added, as, without a knowledge of them, a boy's attainments in Elementary Mathematics must be very poor, lacking the necessary grounding for tackling equations and problems which form a substantial portion of the syllabus in Elementary Mathematics. The inclusion of these chapters in Algebra as well as those devoted to Practical Geometry does not put boys to the necessity of buying separate text-books in Algebra and Geometry, unless they purpose specializing in Group I, i.e. Mathematics and Physics. An attempt has been made to add a chapter on the metric system to familiarize pupils with questions on areas, weights and volumes and, to make them face the mathematical conditions of science problems so as to bring about some correlation between Science and Mathematics. Without this correlation, it is not possible for the science teacher to train science pupils in mathematical calculations needed for evaluations in science.

Volume I contains chapters I–XIX which may be done mainly in Form IV; some portions, however, may be relegated to Form V. Volume II contains chapters I–XIV of which chapters I–IX may be done in Form V, and the rest in Form VI; but this arrangement may be altered if necessary.

These are some of the salient features of the work and it is hoped that it will be found very useful, instructive and adapted to the purpose for which it is intended.

The author takes this opportunity to thank all the Mathematics Assistants of the School Department of Pachaiyappa's College for having prepared answers to the examples given in various exercises, which enabled him to compare his answers with theirs. His special thanks are due to M.R.Ry. M. Virasawmayya Garu, B.A., L.T., Senior Mathematics Assistant, for the many useful suggestions made and the constructive criticism offered by him.

Any suggestions for the improvement of the Book will be thankfully received.

V. VENKATASUBBAYYA.

INTRODUCTION

M.R.Ry. B. Kameswara Row Garu, B.A., L.T., Teacher, Viresalingam High School, Rajahmundry, has been entrusted with the task of rendering into Telugu, Volume I of Elementary Mathematics prepared and written by me in English. I advisedly say it is a *task* because the difficulties of translating a modern work in mathematics for higher classes into a language wherein new ideas will have to be clothed for the first time in proper and suitable words which themselves do not exist at all in it, are very much akin to those that explorers of new and wild regions devoid of roads and habitations have to encounter.

He has admirably succeeded in his mission for he wields a facile pen in Telugu possessing a wide command of the Telugu vocabulary coupled with a linguistic acumen in coining new terms and phrases suited to the genius of the language and the requirements of the subject, which demands an exactness and precision such as no other branches of knowledge demand. The terminology employed in the work displays a full confidence in his own abilities and discloses his pioneer attempts at standardization fit to be pursued by subsequent labourers in the field.

The Telugu edition looks more like an original production, translation having been written in an elegant, natural flowing style, the absence of which usually taints all translations. I have no doubt that the teachers and the public who use the book will realize the excellence and the faithfulness of the production and assign to it a high rank and an enduring importance that are usually accorded to standard works.

PACHAIYAPPA'S COLLEGE,
February 6, 1929.

V. VENKATASUBBAYYA.

REVISED SYLLABUS IN ELEMENTARY MATHEMATICS

FOR THE

MADRAS S.S.L.C. PUBLIC EXAMINATION

GROUP A

ELEMENTARY MATHEMATICS

THE four simple rules applied to **integers and fractions** Factors—Ratio and Proportion—Square Root.

Indian and English coins, weights and measures of length, capacity and time, in actual use. The metric system. Decimal approximations (not more than three places). Averages.

Percentages and its applications—Simple interest—Direct problems in Compound interest (number of periods for calculation of interest not to exceed two). Mensuration of plane rectilinear figures (a knowledge of the use of the Field Book not required), circles, right prisms, right circular cylinders and cones (frusta excluded).

Symbolic representation of the processes of Arithmetic. Negative quantities and extension of the four rules to them (formal proofs not required).

Solution of linear equations, involving one or two variables, and problems leading thereto.

Plotting statistics. Straight line graphs. Measurement of lengths and angles—Construction of perpendiculars and parallels, of circles touching a given straight line or a circle at a given point, and of angles. Dividing lines in given ratios. Drawing to Scale. Elementary properties of triangles and parallelograms. Simple cases of construction of triangles and quadrilaterals and of regular polygons of 6 and 8 sides. Experimental verification of the theorems required for the previous constructions.

N.B.—The grouping of the items in the above scheme is not intended to indicate the order in which they should be taken for class work.

వి ష య సూ చి క.

అధ్యాయము I.

పూర్ణాంకములకును, మిశ్రమరాసులకును కర్మసూత్ర చతుష్టయమును ప్రయోగించుట. (పునశ్చరణ.)

పేజీ.

అంకెలు; వాటి స్థానఫలములు, సహజఫలములు; నిరుపాధిక, సోపాధిక సంఖ్యలు; కూడిక; తీసివేత; కూడిక తీసివేతల కలగలుపు; గుణకారము; గుణకారములో సూక్ష్మమార్గములు; భాగహారము; కారణాంకపద్ధతిని భాగహారము; పొడుగు భాగహారములో ఇటలీపద్ధతి; భాగహారములో సూక్ష్మమార్గములు; అభ్యాసములు ... ...

అధ్యాయము II.

ప్రమాణములు, గుణిజములు, భాజనీయత, గ.సా.ప్ర., క.సా.గు. (పునశ్చరణ.)

ఉత్తమసంఖ్యలు (ప్రధానసంఖ్యలు); 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 వగైరాలచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడు సంఖ్యల లక్షణములు; తొమ్మిదుల మినహాయింపు; గ.సా.కా.; గ.సా.కా. (గ.సా.ప్ర.) యొక్క తత్వము; గ.సా.కా. కు రేఖాత్మక ఉద్దీపకము; గ.సా.కా. గురించిన అభ్యాసములు; క.సా.గు.; క.సా.గు. యొక్క తత్వము; క.సా.గు. కు రేఖాత్మక ఉద్దీపకము; అభ్యాసములు 13

అధ్యాయము III.

భిన్నాంకములకు కర్మసూత్ర చతుష్టయమును ప్రయోగించుట; భిన్నాంకముల గ.సా.ప్ర., క.సా.గు. లు. (పునశ్చరణ.)

భిన్నాంకముయొక్క అర్థము; భిన్నాంకముల కూడిక; తీసివేత; గుణకారము; భాగహారము; వాటి గ.సా.కా.; వాటి క.సా.గు.; పంతు భాగములు; వ్యావహారిక పద్ధతి, మిశ్రమ వ్యావహారిక పద్ధతి; అభ్యాసములు 30

పేజీ.

అధ్యాయము IV.

అంకగణిత తత్త్వము. (పునశ్చరణ.)

సంకేత ప్రాతినిధ్యము, అంకఫలములను ఆదేశముచేసి ఫలితములకు విలువకట్టుట; అభ్యాసములు 42

అధ్యాయము V.

దశాంశములు, పరికర్మ చతుష్టయమును వాటికి సంధించుట. (పునశ్చరణ.)

దశాంశముల అర్థము; దశాంశముల కూడిక; తీసివేత; 10 చేతను, 10 యొక్క ఘాతములచేతను గుణకారము; భాగహారము; 10 చేతను, 10 యొక్క ఘాతములచేతను భాగహారము; సోపాధికరాసుల దశాంశములు; అంకభిన్నములను దశాంశములుగను తద్విలోమముగను మార్చుట; అంతానంత దశాంశముల తత్త్వము; ఉజ్జాయింపులు, సార్థకాంకములు (లఘుజ్ఞానము); అభ్యాసములు 48

అధ్యాయము VI.

మెట్రిక్ సాంప్రదాయము. (క్రొత్త.)

పొడవులు; అభ్యాసములు; భూఫలములు; ఘనఫలములు; అభ్యాసములు; పరిమాణము; భారము; సొమ్ము; అభ్యాసములు ... 64

అధ్యాయము VII.

సరళరేఖలు, కోణములు, వృత్తములు, సరళరేఖల సమద్విఖండనము, కోణముల సమద్విఖండన, లంబనిర్మాణము, సమానాంతర రేఖానిర్మాణము, ముఖ్యములైన కొన్ని రేఖాగణిత సిద్ధాంతములు. (పునశ్చరణ.)

బిందువు, సరళరేఖ, కొలామానములు; అభ్యాసములు; కోణములు; వాటి కొలతకు ఏకాంశములు; సముద్రీ దిగ్దర్శకము; అభ్యాసములు; వృత్తములు; వాటియొక్క జ్యాలు; అభ్యాసములు; త్రిభుజములు; అభ్యాసములు; రేఖాగణితపు లఘుకల్పనలు; రేఖలయొక్కయు, కోణములయొక్కయు, సమద్విఖండన; లంబముల రచన; అభ్యాసములు; సమానాంతరరేఖ; వాటిని రచించుట; అభ్యాసములు; సమానాత్మక బహుభుజము తొలూకు అంతఃకోణములయొక్కయు, బహిఃకోణములయొక్కయు, మొత్తములు; అభ్యాసములు 78

పేజీ.

అధ్యాయము VIII.

ధనఋణరాసులు; అంకపలముల ఆదేశము, అప్పటి విలువలను కట్టుట దిశాత్మక సంఖ్యలు. బీజగణిత సమాసముల కూడిక తీసివేతలు. ధనఋణరాసులకు పరికర్మ చతుష్టయమును సంధించుట. కుండలముల ప్రవృత్తి నివృత్తులు; ఘాతాంకసూత్రములు. (పునశ్చరణ.)

ధనఋణరాసులకు రేఖాత్మక ఉద్దీపకము; ధనఋణరాసుల కూడిక; ధనఋణరాసుల తీసివేత; $a \pm (\pm b)$ ల విలువలు కట్టుట; కుండలముల నివృత్తి; కుండలముల ప్రవృత్తి; అభ్యాసములు; బీజగణితపు కూడిక తీసివేతలు; ధనఋణరాసుల గుణకార భాగహారములు; ధనఋణరాసుల ఘాతములు; ఘాతాంకసూత్రములు; మూలమునకు సంజ్ఞ, వర్గమూలము, ఘనమూలము; అంకఫలముల ఆదేశము; అభ్యాసములు. 113

అధ్యాయము IX.

గళ్ల కాగితముపై బిందువులను స్థాపించుట. (క్రొత్త.)

మూలబిందువు; x—అక్షము; y—అక్షము; బిందువుయొక్క స్థితి నిరూపకములు; బిందుస్థాపన; అభ్యాసములు 136

అధ్యాయము X.

నిష్పత్తి, అనుపాతములు. (పునశ్చరణ.)

నిష్పత్తియొక్క పదములు; పూర్వగామి, పరగాములు; అనుపాతము; పరమముల లబ్ధము = మధ్యమముల లబ్ధము; ఇందుకు రేఖాత్మక

పేజీ.

ఉద్దీపకము; అనుపాతమునకు లేఖ్యాత్మక ఉద్దీపకము; అభ్యాసములు; రెండు తరహాల అనుపాతములు; అనులోమ అనుపాతము, విలోమ అనుపాతము; ఏకాంకపద్ధతి; చుక్కలపద్ధతి; నిష్పత్తిచే గుణించెడి పద్ధతి; అనులోమ విలోమ అనుపాతముల లేఖ్యాత్మక ఉద్దీపకము; అభ్యాసములు 145

అధ్యాయము XI.

అనుపాత భాగములు. (పునశ్చరణ.)

ఒక సరళరేఖను ఒక నిర్దిష్టనిష్పత్తిలో అంతరఖండనచేయుట, బాహ్యఖండనచేయుట; అభ్యాసములు; భాగస్వామ్యము; అభ్యాసములు 177

అధ్యాయము XII.

సామ్యములు. (పునశ్చరణ.)

సామ్యములను గురించినట్టియు, మూలాధారములగునట్టియు, స్వయంసిద్ధాంతములు; సామ్యసాధన; యుక్తిలెక్కలు; అభ్యాసములు ... 190

అధ్యాయము XIII.

సగట్లు. (పునశ్చరణ.)

ఈ పదముయొక్క అర్థము; సగట్లు కట్టుటలోని వివిధపద్ధతులు; సగట్లనుగురించిన కొన్ని సిద్ధాంతములు; అభ్యాసములు ... 211

అధ్యాయము XIV.

శాతములు. (పునశ్చరణ.)

'శాతము' యొక్క అర్థము; అది ఒక భిన్నము లేక నిష్పత్తి; దాని ప్రయోగము; అభ్యాసములు 224

పేజీ.

అధ్యాయము XV.

బారువడ్డీ. (పునశ్చరణ.)

ఈ పదముయొక్క అర్థము; సంకేతసూత్రము; అభ్యాసములు... 236

అధ్యాయము XVI.

చతురస్రముయొక్కయు, ఆయతముయొక్కయు భూఫలనిర్ణయము; ప్రమాణప్రాతినిధ్యము; ఛిన్నాభిన్నము (ఛి. భి.); సమానాంతర చతుర్భుజముయొక్కయు, సమకోణత్రిభుజముయొక్కయు, త్రిభుజముయొక్కయు, విషమ చతుర్భుజముయొక్కయు భూఫలనిర్ణయము; పైతాగోరాస్ సిద్ధాంతము, దాని ప్రయోగము. (క్రొత్త.)

భూఫలమునకు మానము; గదిగోడలు; వసారాలు, దారులు; అభ్యాసములు; సమకోణత్రిభుజపు భూఫలము; సమానాంతర చతుర్భుజముతాలూకు; త్రిభుజముతాలూకు; విషమ చతుర్భుజముతాలూకు; అభ్యాసములు; పైతాగోరాస్ సిద్ధాంతము; అభ్యాసములు ... 249

అధ్యాయము XVII.

బీజగణితపు గుణకార భాగహారములు. (క్రొత్త.)

బీజగణితపు సమాసముల గుణకారమును గురించిన మాదిరిప్రశ్నలు; ప్రత్యేకగుణకముల పద్ధతి; బీజగణితరాసుల బదులు ద్విపదసమాసములను ఆదేశించుట; బీజగణిత సమాసముల లబ్ధములలో x, x^2, వగైరాలవంటి వాటి గుణకములను కట్టుట; అభ్యాసములు; ఏకపదమును ఏకపదముచే భాగించుట; బహుపదమును ఏకపదముచే భాగించుట; ఒక సమాసమును మరియొక సమాసముచే భాగించుట; అభ్యాసములు ... 272

పేజీ.

అధ్యాయము XVIII.

బీజగణితములోని లఘు సంకేతసూత్రములు, నాటి ప్రయోగము. (క్రొత్త.)

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$; అభ్యాసములు; $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$; అభ్యాసములు; $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; ఒక లబ్ధమును రెండు వర్గముల తేడాగా చెప్పుట; అభ్యాసములు; $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ అనుదాని వివిధరూపములు; $(ax+b)(cx+d)$; లబ్ధమందలి పదములను ఏర్పరచు విధానము; $(x+a)(x+b)(x+c)$, దానియొక్క విస్తరణము; అభ్యాసములు; $(a+b)^3$, దాని విస్తరణము; $(a-b)^3$, దాని విస్తరణము; అభ్యాసములు 287

అధ్యాయము XIX.

అవయవ విభజన. (క్రొత్త.)

$pq+pr+ps$ వంటి రూపముగల సమాసముల విభజన; అభ్యాసములు; నియమిత సంకేతసూత్రముల ఆధారముచే విభజన;—$(a+b)^2$, $(a-b)^2$; అభ్యాసములు; a^2-b^2; $a^4+a^2b^2+b^4$, a^4+4b^4, అభ్యాసములు; a^3+b^3; a^3-b^3; అభ్యాసములు; వర్గసమాసముల విభజన; అభ్యాసములు. వర్గసామ్యముల సాధన; అభ్యాసములు ... 306

విషయానుసారము అమర్చియున్న రకరకాల ప్రశ్నలు.

1-వ శాఖ—రాబడి పన్ను 320
2-వ శాఖ—కాలక్రియలు 323
3-వ శాఖ—కాల దూరములు 327
4-వ శాఖ—లాభనష్టములు 329
5-వ శాఖ—త్రిభుజరచన, ప్రమాణాత్మకరచన 333
6-వ శాఖ—ఉన్నతాంశ, దూరముల గురించిన యుక్తిలెక్కలు ... 335
7-వ శాఖ—సామాన్యలేఖ్యములు (సర్వ సామాన్యనియమముల ననుసరించి) 337
పునశ్చరణ పత్రములు. మొదటి పరంపర 340
ఫలితములు 364

ప్రధాన గణితములు.

అధ్యాయము I.

పూర్ణాంకములు, మిశ్రమరాసులు.

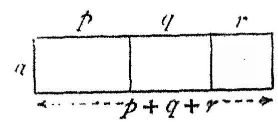
1. ప్రధాన గణితభాగములలో, (1) అంకగణితము, (2) బీజగణితము (దీనికి అంకగణిత తత్వమనియు, అవ్యక్త గణితమనియు నామాంతరములు), (3) వ్యావహారిక రేఖాగణితము, (4) భూఫలగణితము. ఈ పుస్తకములోని వివిధాధ్యాయములు పై భాగములలో ఒక్కొక్కటి పఠించునిమిత్తము ఉద్దేశింపబడినవని తెలియనగును.

ఈ క్రింది నియమములను పునర్విచారణ చేయనగును:—

(1) $a(p+q+r)=ap+aq+ar$. (పటము 1.)

$9\times 268=9(200+60+8)$
$=9\times200+9\times60+9\times8$
$=1800+540+72.$
$=2412$

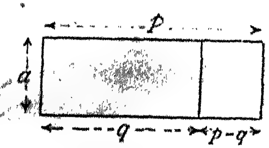
$1001\times83=83(1000+1)$
$=83000+83=83083.$



పటము 1.

(2) $a(p-q)=ap-aq$. (పటము 2.)

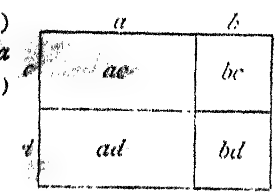
$87\times98=87(100-2)$
$=87\times100-87\times2$
$=8700-174$
$8526.$



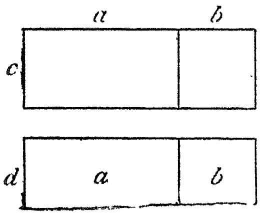
పటము 2.

(3) $(a+b)(c+d)=c(a+b)+d(a+b)$. (పటము 3, 4.)
$=ca+cb+da+db$. (పటము 3.)

$73\times28=(70+3)(20+8)$
$=20\times70+20\times3+8\times70+8\times3$
$=1400+60+560+24$
$=2044.$



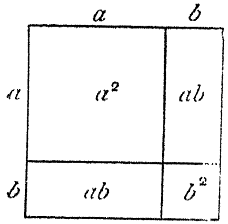
పటము 3.



పటము 4.

లేక, $73 \times 28 = 73\ (20+8)$
$= 73 \times 20 + 73 \times 8.$

73	
28	
1460	(ఇరువది 73 లు.)
584	(ఎనిమిది 73 లు.)
2044	(ఇరువది ఎనిమిది 73 లు.)



పటము 5.

(4) $(a+b)\ (a+b)$
లేక, $(a+b)^2 = a\ (a+b) + b\ (a+b)$
$= a^2 + ab + ab + b^2$ (పటము 5.)
$= a^2 + 2ab + b^2$
$73^2 = (70+3)^2$
$= 70^2 + 2 \times 70 \times 3 + 3^2$
$= 4900 + 420 + 9$
$= 5329.$

(5) ఒక లబ్ధముయొక్క హద్దులు: లబ్ధములో నుండగల అంకెల సంఖ్య.

73:—70 కి పైది, 80 కి లోపుది.
28:—20 కి పైది, 30 కి లోపుది.
∴ 73×28:—70×20 కి పైది, 80×30 కి లోపుది.
అనగా, 73×28 అనునది 1400 కి పైది, 2400 కి లోపుది.
అనగా, 73×28 అనునది 4 అంకెలది.

(6) ఒక సంఖ్యను 5 చే గుణించుట.

$$308 \times 5 = 308 \times \frac{10}{2} = \frac{3080}{2} = 1540.$$

(7) ఒక సంఖ్యను 25 చే గుణించుట.

$$605 \times 25 = 605 \times \frac{100}{4} = \frac{60500}{4} = 15125.$$

(8) ఒక సంఖ్యను 125 చే గుణించుట.

$$893 \times 125 = 893 \times \frac{1000}{8} = \frac{893000}{8} = 111625.$$

(9) వస్తువు 1-కి 9 పై. చొప్పున డజను వస్తువుల ఖరీదు
$= \frac{9 \times 12}{12}$ అ. $= 9$ అ.

అట్లే, వస్తువు 1-కి 8 పై. చొప్పున డజను వస్తువుల ఖరీదు
$= \frac{8 \times 12}{12}$ షి. $= 8$ షి.

వస్తువు 1-కి x పై. చొప్పున డజను వస్తువుల ఖరీదు
$= \frac{x \times 12}{12}$ అ. $= x$ అ.

వస్తువు 1-కి x పె. చొప్పున డజను వస్తువుల ఖరీదు
$= \frac{x \times 12}{12}$ షి. $= x$ షి.

వీశె 1-కి x అ. చొప్పున ఒక మణుగు ఖరీదు
$= \frac{x \times 8}{16}$ రూ. $= \frac{x}{2}$ రూ.

(10) **భాజ్యము = భాజకము × భాజితము + శేషము.**
$28 = 6 \times 4 + 4.$

(11) **5 చే భాగించుట.**

$$68 \div 5 = \frac{68 \times 2}{5 \times 2} = \frac{136}{10}.$$

కాబట్టి, భాజితము = 13.
శేషము, పదింట 6, అనగా అయిదింట, 3.

(12) **25 చే భాగించుట.**

$$783 \div 25 = \frac{783 \times 4}{25 \times 4} = \frac{3132}{100}.$$

కాబట్టి, భాజితము = 31.
శేషము, నూరింట 32, అనగా ఇరువైఅయిదింట 8.

(13) **125 చే భాగించుట.**

$$9836 \div 125 = \frac{9836 \times 8}{125 \times 8} = \frac{78688}{1000}.$$

కాబట్టి, భాజితము = 78.
శేషము, వేయింట 688, అనగా నూటఇరువైఅయిదింట 86.

(14) 186453 ను 999 చే భాగింపుము.

$$\begin{aligned}186453 &= 186000 + 453\\ &= 186\,(999+1)+453\\ &= 186\times 999+186+453\\ &= 186\times 999+639\end{aligned}\qquad\begin{array}{r|l}186 & 453\\ & 186\\ \hline 186 & 639\end{array}$$

∴ భాజితము = 186, శేషము = 639.

(15) 186453 ను 99 చే భాగింపుము.

$$\begin{aligned}186453 &= 186400+53\\ &= 1864\,(99+1)+53\\ &= 1864\times 99+1864+53\\ &= 1864\times 99+1800+64+53\\ &= 1864\times 99+18\,(99+1)+64+53\\ &= 1864\times 99+18\times 99+18+64+53\\ &= 99\,(1864+18)+135\\ &= 99\times 1882+100+35\\ &= 99\times 1882+99+1+35\\ &= 99\times 1883+36.\end{aligned}\qquad\begin{array}{r|l}1864 & 53\\ 18 & 64\\ & 18\\ \hline 1882 & 135\end{array}\quad\text{మరల, }\begin{array}{r|l}1 & 35\\ & 1\\ \hline 1 & 36\end{array}$$

∴ భాజితము = 1883, శేషము = 36.

(16) డజను 9 అ. చొప్పున, 1 వస్తువు ఖరీదు $=\dfrac{9\times 12}{12}=9$ పై.

,, 6 షి. ,, 1 ,, ,, $=\dfrac{6\times 12}{12}=6$ పె.

కాబట్టి, సర్వసామాన్యముగా,

డజను x అ. చొప్పున, 1 వస్తువు ఖరీదు x పై.

,, x షి. ,, 1 ,, ,, x పె.

మరల,

మణుగు 3 రూ. చొప్పున, 1 వీసె ఖరీదు $=\dfrac{3\times 16}{8}=6$ అ.

ఆ రీతిగనే, మణుగు y రూ. చొప్పున, 1 వీసె ఖరీదు $=\dfrac{y\times 16}{8}=2y$ అ.

(17) తూనికలు, పొడవులు, వైశాల్యములు:— వీటికి చెందిన వివిధమాన ప్రకారములలో, ఈ క్రింది సంబంధములు స్మరణీయములు:—

1 వీసె = $3\frac{1}{8}$ పౌ. (ఎ)
1 మణుగు = 25 పౌ.
} 1 పౌ. (ఎ) = 7000.
1 పౌ. (ట్రోయ్) = 5760.

100 లింకులు = 1 గొలుసు.
10 గొ. = 1 ఫర్లాంగు.
22 గ. = 1 గొ.
} 1 గ్రౌండు = 2400 చ. గ.

అభ్యాసము 1.

1. ఒక మిలియను పౌనులకును ఒక కోటి రూపాయలకును తేడా, రూపాయలలో కట్టుము. (1 పౌ. = 15 రూ.)

2. డెబ్బదిరెండు మిలియనుల అయిదును ఎనిమిదికోట్ల ఏబదికి కలిపి, ఆ మొత్తమును పది ఎనిమిదికోట్ల అయిదువందలనుండి తీసివేయుము.

3. $9867=a$ వేలు $+\,b$ వందలు $+\,c$ పదులు $+\,d$ ఒకట్లు. a, b, c, d లు కట్టుము.

4. 6976 లోనున్న మొదటి 6 నకును, చివర 6 నకును స్థానఫలము ఎంతెంత? చివర 6 తరువాత ఒక సున్న చేర్చినయెడల, 9, 7 ల స్థానఫలము ఎంతెంత? ఆ సనిగే మొదటి 6 తరువాత చేసిన, 9, 7 ల స్థానఫలము ఎంతెంతగును?

5. ఒక సంఖ్యలోని 6 అంకెలను ఎడమ కుడివరుసగా a, b, c, d, e, f లు ప్రత్యామ్నాయములు. వివిధ సంఖ్యామానప్రకారములలో a యొక్క స్థానఫలము ఎంత? సంఖ్యను ఎట్లు చదువవలయును?

6. 3, 8, 0, 7, 9 అను 5 అంకెలతోను వేయగల సంఖ్యలలో గరిష్ఠ, కనిష్ఠములు ఏవి?

7. పై ప్రశ్నలో 3 తో మొదలుపెట్టి వేయగల 5 అంకెల సంఖ్యలలో గరిష్ఠ, కనిష్ఠములు ఏవి?

8. ఈ క్రింది కూడికలలో ఖాళీలు పూర్తిచేయుము:—

(a)	(b)	(c)
87689	*******	768425
*****	1028463	930069
194843	2560089	*******

9. ఈ క్రింది తీసివేతలలో ఖాళీలు పూర్తిచేయుము:—

(a)	(b)	(c)
8765043	9873476	*******
*******	4389354	832405
7498375	*******	984376

10. ఈ క్రిందివాటిలో గీతకు పైనున్న సంఖ్యలోనుండి, క్రిందనున్న సంఖ్యల మొత్తమును ఒకే ఎత్తులో తీసివేయుము:—

(a)	(b)	(c)
184769	1000863	8464328
3832	369	1003
4698	4285	6007
23081	32498	89349
4673	5964	1235
		98364

11. రెండు సంఖ్యల మొత్తము 8352; తేడా 4862. ఆ సంఖ్యలను కట్టుము.

12. 8, 9 ప్రశ్నలలో ఖాళీలలో ఉండవలసిన సంఖ్య x అనుకొని, ఆయా పరికర్మలను సూచించెడి సమీకరణములను చేయుము.

13. ఈ క్రిందివాటిలో x కట్టుము:—

(a) $89653 + x = 100000$.

(b) 5 హం. 2 క్వా. 23 పా. $- x = 1$.

(c) $88 \times 648 + x = 129286$.

(d) $87 \times 76 = 19 \times x$.

14. (a) 1568 ని 768, 832 లచే వేర్వేరుగా గుణింపగా వచ్చెడి లబ్ధములను కలిపిన, మొత్తమెంత?

(b) ఒకడు సిమెంటు పీపా 1-కి రూ. 15—14—0 చొప్పున 256 పీపాలు కొని, పీపా 1-కి రూ. 18—12—0 చొప్పున అమ్మెను. వాని లాభమెంత?

(c) ఒక వర్తకుడు ఆవు 1-కి రూ. 68—4—0 చొప్పున 192 ఆవులను కొని, రోజు 1-కి ఆవు 1-కి 12 అ. చొప్పున మేత ఖర్చుతో వాటిని 8 రోజులు అట్టే పెట్టుకొని, తరువాత వాటిని సగటున రూ. 82—8—0 చొప్పున అమ్మెను. వాని లాభము కట్టుము.

(d) ఒకడు ఆవు 1-కి 150 రూ. చొప్పునను, గుఱ్ఱము 1-కి 350 రూ. చొప్పునను, 110 ఆవులను, 112 గుఱ్ఱములను కొన్నాడు. వానికి మొత్తము ఖర్చు ఎంత?

15 లగాయతు 22 వరకు లెక్కలకు ఫలములను కట్టుము:—

15. (a) 62576×25. (b) 13482×125. (c) 89348×625. (d) 184639×3125.

16. (a) $18756 \div 25$. (b) $989325 \div 125$. (c) $1987650 \div 625$. (d) $34875 \div 375$.

17. (a) 2056×374. (b) 3064×1024. (c) 6879×1089. (d) 1768×1728. (కారణాంకపద్ధతిని.)

18. (a) 86932×997. (b) 10384×9995. (c) 20836×1998. (d) 8674×598. (e) 3875×101. (f) 4869×1002. (g) 1289×1008. (h) 4265×1099.

19. (a) 83768×2884. (b) 608349×6416. (c) 100896×91854. (d) 208634×74998. (రెండు, మూడు సంఖ్యలలో గుణకారము తేల్చుము.)

20. (a) $64385 \times 125 \times 25$. (b) $108346 \times 375 \div 25$. (c) $1076 \times 3125 \div 125$. (d) $48964 \times 999 \div 625$.

21. (a) $(46 \times 76 \times 84) \div (21 \times 19)$. (b) $(4876 \times 41 \times 8) \div 82 \times 4$. (c) $10086 \times 105 \times 69 \div (21 \times 23)$. (d) $8964 \times 52 \div (78 \times 25.)$

22. (a) $2836 \times 4320 + 2836 \times 2678 + 2836 \times 2999$.

(b) $1836 \times 264 + 1836 \times 539 - 1836 \times 703$.

(c) $684 \times 53 + 239 \times 108 + 684 \times 47 + 239 \times 72$.

(d) $1025 \times 46 + 205 \times 20 + 41 \times 25$.

(e) ని 28357164 అను ఫలితము చేయగలము అని చూపి చెప్పుము.

23. ఈ క్రిందివాటికి విలువ ఒక ఎత్తులో కట్టుము:—

(a) $1684 + (8438 \times 5.)$ (b) $46895 + (98762 \times 13.)$ (c) $1678385 - (48326 \times 4.)$ (d) $987387 - (16432 \times 12.)$

24. $189 \times 236 = 44604$ అని తెలిసి, వీటికి విలువ కట్టుము:—

(a) 188×236. (b) 189×235. (c) 63×236 (d) 189×59.

(అత్యంత అనుకూలమైన న్యాసమే వినియోగించుము.)

25. $189 \times 236 = 44604$ అని తెలిసి, వీటిని కట్టుము:—

(a) 169×236. (b) 189×230. (c) 1890189×236. (d) 23600236×189.

26. 43 ను 29 చే ఏకపంక్తిలో గుణించు మార్గమిది:—మొదట 3 ను 9 చే గుణించి, ఒకట్లలో 7 వేసి, 2 ను 4 ను 9 చేతను 3 ను 2 చేతను ఐ మూలముగా గుణించిన లబ్ధములకు కలుపుము. 44 వచ్చును. రెండవ 4 ను పదులలో వేయుము. వేసి, మొదటి 4 ను 4 ను 2 చే గుణించిన లబ్ధమునకు

కలుపుము. 12 వచ్చును. 2 వందలలోను 1 వేలలోను వేయుము. 1247 లబ్ధము.

న్యాసము:— ఊహ:—

43	4	4 ╲╱ 3	3
29	2	2 ╱╲ 9	9
1247	8 + 4	36 + 6 + 2	27
	12	44	

పై మార్గమున వీనిని కట్టుము:—

(*a*) 68×37. (*b*) 96×38. (*c*) 36×48. (*d*) 89×39.

27. ఈ క్రింది లబ్ధములకు హద్దులను నిర్ణయించి, ప్రతి లబ్ధములో నుండగల అంకెలెన్నియో తెల్పుము:—

(*a*) 683×97. (*b*) 4834×121. (*c*) 10521×278. (*d*) 3628×4875.

28. ఈ క్రింది మార్గమును సరిచూచుకొనుము:—

రెండుగాని మరి ఎక్కువగాని అంకెలుగలిగి 5 తో అంతమగు సంఖ్యకు దేనికైన వర్గు కట్టవలెనన్న మార్గమిది:—చివర అంకెలు ఎప్పుడూ 2, 5. వాటికి పూర్వము, సంఖ్యలో 5 అంక లేదనుకొనగా వచ్చిన సంఖ్యను దాని తరువాత పై సంఖ్యచే గుణించి లబ్ధమును వ్రాయుము. అదియే వర్గు.

పై మార్గమున ఈ క్రింది సంఖ్యలకు వర్గులు కట్టుము:—

(*a*) 35, (*b*) 45, (*c*) 85, (*d*) 95, (*e*) 125, (*f*) 145, (*g*) 185, (*h*) 205.

(5 తో అంతమై తీరవలెనన్నమాటగాని, సంఖ్యలో ఎన్ని అంకె లున్నను ఈ మార్గము అనుసరణీయమే.)

29. ఒక సంఖ్యయొక్క వర్గు తెలిసినప్పుడు, ఆ తరువాతి పై సంఖ్య యొక్క వర్గు కట్టెడి మార్గమిది:—ఇచ్చిన వర్గునకు సంఖ్యయొక్కయు వర్గు కావలసిన ఆ పై సంఖ్యయొక్కయు మొత్తమును కలిపిన సరి.

ఉదాహరణ:—$183^2 = 33489$ అని తెలిసి, 184^2 కట్టుము.

న్యాసము:—$184^2 = 33489 + 183 + 184$.

$= 33856$.

పై మార్గమున ఈ క్రింది వర్గులను కట్టుము:—

(*a*) 1026^2, (*b*) 789^2, (*c*) 937^2, (*d*) 469^2.

$1025^2 = 1050625$, $788^2 = 620944$, $936^2 = 876096$, $468^2 = 219024$ అని తెలిసి.

30. (*a*) $1025^2 = 1050625$ అని తెలిసి, 2050^2 కట్టుము.
(*b*) $788^2 = 620944$,, 1576^2 ,,
(*c*) $936^2 = 876096$,, 1872^2 ,,
(*d*) $468^2 = 219024$,, 936^2 ,,

31. పై లెక్కలోని దత్తవిషయములతో,

(*a*) $(4 \times 1025)^2$, (*b*) $(3 \times 788)^2$, (*c*) $(5 \times 936)^2$, (*d*) $(7 \times 936)^2$ లను అతిసూక్ష్మముగ కట్టుము.

32. 30-వ లెక్కలోని దత్తవిషయములతో,

(*a*) 205^2, (*b*) 197^2, (*c*) 104^2, (*d*) 117 లను కట్టుము.

33. ఈ క్రింది గుణకారములలో ఖాళీలు పూర్తిచేయుము:—

(*a*)	(*b*)
·68.	. . .
.9	1 . .
11..1	7 . 4
....7	..52
1....7	..68
	103488

34. (*a*) ఒక భాగహారములో భాజకము 812, భాజితము 367, శేషము 423. భాజ్యమెంత?

(*b*) ఒక భాగహారములో భాజకము 423, భాజితము 284, శేషము 392. భాజ్యమెంత?

35. (*a*) 83,46,789 541 చే భాజనీయమగుటకు అధమము ఏ సంఖ్య కలుపవలయును?

(*b*) 83,46,789 541 చే భాజనీయమగుటకు అధమము ఏ సంఖ్య తీసివేయవలయును?

36. (*a*) ఒక సంఖ్యను 391 చే భాగించిన, శేషము 148. దానినే 23 చే భాగించిన, శేష మెంత?

(*b*) ఒక సంఖ్యను 126 చే భాగించిన, శేషము 93. దానినే 21 చే భాగించిన, శేష మెంత?

37. (*a*) 4098 ని 43 చే భాగించునపుడు భాజితశేషములు వరుసగ 95; 13. దీనినిబట్టి, మామూలు భాగహారకాండ లేకుండ, 4098 ని 40 చే భాగింపగా, వచ్చెడి భాజితశేషములను కట్టుము.

(b) 319 ని 37 చే భాగించునపుడు భాజితశేషములు వరుసగ 8; 23. దీనినిబట్టి, మామూలు భాగహారకాండలేకుండ, 319 ని 41 చే భాగింపగా, వచ్చెడి భాజితశేషములను కట్టుము.

38. (a) ఒక పొట్టి భాగహారములో భాజకము 231, భాజితము 812, మొదటి శేషము 2. రెండవది 6, మరి మూడవది 9. భాజ్యసంఖ్య కట్టుము.

(b) ఒక పొట్టి భాగహారములో భాజకము 455, భాజితము 19, మొదటి శేషము 1, రెండవది 6, మరి మూడవది 10. భాజ్యసంఖ్య కట్టుము.

39. (a) ఒక సంఖ్యను 5 చే భాగించినచో శేషము 4. ఆ భాజితమును 3 చే భాగించినచో శేషము 1. పై భాగహారక్రమము తలక్రిందైనచో శేషములు వరుసగ ఏమేమి?

(b) ఒక సంఖ్యను 7 చే భాగించినచో శేషము 1. ఆ భాజితమును 6 చే భాగించినచో శేషము 1. పై భాగహారక్రమము తలక్రిందైనచో శేషములు వరుసగ ఏమేమి?

40. (a) 413, 8*7*13 ను నిశ్శేషముగ భాగించును. పువ్వు ఉన్నచోట ఏ అంకె ఉండును?

(b) 629, 3855*7 ను నిశ్శేషముగ భాగించును. పువ్వు ఉన్నచోట ఏ అంకె ఉండును?

41. ఈ క్రింది ఇటలీపద్ధతి భాగహారములలో ఖాళీలు పూర్తిచేయుము:—

(a)

```
237 | 3**
    | *****
    | 1564
    |  1426
    |     4
```

(b)

```
469 | 1**
    | *****
    | 2142
    |  2665
    |   320
```

42. ఈ క్రింది పొట్టి భాగహారములలో ఖాళీలు పూర్తిచేయుము:—

(a)

```
3|
 5|__________  2 శేషము.
   7|________  4   ,,
        826    3   ,,
```

(b)

```
5|
 8|__________  1 శేషము.
   11|_______  3   ,,
        381    5   ,,
```


43. ఒక గుమాస్తా తన చిట్టాలో 9 అ. 6 పై. అనే పద్దు రూ. 9—6—0 అని ఎక్కించుకొనినాడు. ఇది లెక్క తేల్చునపుడు ఎట్లు పరిణమించును?

44. ఒక ఆవర్జా గుమాస్తా రూ. 5—6—11 అనే ఒక పద్దు జమలో వేయవలసినది ఖర్చులో వేసినాడు. ఇందువల్ల ప్రాప్తము ఎట్లు మారును?

45. ఈ క్రింది లెక్కలలో గీతపైనున్న సొమ్ములోనుండి, క్రింది సొమ్ముల మొత్తమును ఒకే ఎత్తులో తీసివేయుము:—

(a)

రూ.	అ.	పై.
1096	7	8
54	3	0
97	8	9
103	4	6
832	9	11

(b)

పౌ.	షి.	పె.
2087	6	3
14	3	9
186	5	8
98	16	10
263	14	11

46. 1 చ. మైలులోనుండి 639 ఎ. 3 రూ. 39 పో. 30 చ. గ. 2 చ. అ. 35 చ. అం. తీసివేయుము. ఇందులోని కష్టమేమి?

47. ఈ క్రింది తీసివేతలలో a, b, c లు కట్టుము:—

(1)

పౌ.	షి.	పె.
836	4	9
a	b	c
832	13	11

(2)

రూ.	అ.	పై.
a	b	c
5	3	a
2	15	9

48. A B లకు కలిపి, ఉన్న ఆస్తి 500 రూ., B C లకు కలిపి, 450 రూ., C A లకు కలిపి, 350 రూ. ప్రత్యేకపు ఆస్తులను కట్టుము.

49. ఈ క్రిందివాటిలో ఏవి అసందర్భములు? ఎందుచేత?:—

(a) రూ. 176-8-4 + 32. (c) రూ. 378-9-3 × 63.

(b) రూ. 276-8-4 - 68. (d) రూ. 478-10-11 ÷ 39.

50. ఈ క్రిందివాటిలో ఏవి అసందర్భములు? ఎందుచేత?:—

(a) రూ. 186-9-5 + రూ. 176-8-9.
(b) ,, 189-10-11 - ,, 139-14-11.
(c) ,, 137-8-9 × ,, 143-7-8.
(d) ,, 136-4-3 ÷ ,, 28-9-3.

51. A, B, C లలో ఒక్కొక్కడు వంద రూపాయలు చొప్పున మూట కట్టుకొని వంతువంతుగ తీర్థానికి బయలుదేరి, దారి ఖర్చులు సరిసమానముగా

కట్టుకొనుటకు ఏర్పాటుచేసికొనినారు. ఇంటికి వచ్చి చూచుకొనినప్పుడు A వద్ద రూ. 8—9—6, B వద్ద రూ. 4—10—6, C వద్ద రూ. 13—2—3 మిగిలెను. వ్యాపారము పైసలుచేయుట ఎట్లు?

52. 1085 గినీలను పౌ. షి. పె. లోనికి మార్చుము. (వీలగునంత తక్కువ న్యాసముతో.)

53. ఈ క్రిందివాటికి బిల్లు తయారుచేయుము:—

డజను 7 అ. చొప్పున 5 మామిడిపండ్లు; వీసె 6 అ. చొప్పున 3 మణుగుల పంచదార; వీసె రూ. 1—9—0 చొప్పున 4 మ. 5 వీ. కాఫీగింజలు; దస్తా 5 అ. చొప్పున 8 టావుల కాగితము.

54. గొలుసు అనగా 22 గజములు. 4 ఎకరముల 2 రూ. లలో చ. గొ. ఎన్ని?

55. 40 పౌ. (ట్రో) ఎత్తు సిసలు బంగారముతో 1869 నవరసు నాణెములు కొట్టవచ్చును. ఒక నవరసు ఎన్ని వడ్లగింజల ఎత్తు?

4 నవరసులు 9 వరహా (పగోడా) లతో తులతూగిన, వరహా ఎన్ని వడ్లగింజల ఎత్తు?

56. ఒక చక్రపు పరిధి 6 అ. 3 అం. 8 మైళ్ల ప్రయాణములో అది గిరగిర ఎన్నిసార్లు తిరుగును? అది పదివేలసార్లు భ్రమించినచో, ఎంత దూరము జరుగును?

57. టెల్లిగ్రాఫు స్తంభములు 88 ఏసి గజముల ఎడముగ నుండగా, ఒక రైలు 9 ఏసి సెకనులలో 2 ఏసి స్తంభములను దాటిపోవుచుండిన, రైలు రేటు గంటకు ఎన్ని మైళ్లు?

58. ముప్పది ఇద్దరు జనుల తండా రామేశ్వర ప్రయాణమునకు ఒకచోట బయలుదేరినారు. దారి ఖర్చు మనిషికి రూ. 7—4—9 అగును. అయితే, కొందరి దగ్గర గవ్వైన లేదు. ఉన్నవారు సమానముగా చందాలు వేసుకొనుటవల్ల వారిలో ఒకొక్కడు రూ. 9—11—8 ఇవ్వవలసివచ్చినది. వట్టి జనులు ఎందరు?

59. బస్తా రూ. 8—12—6 చేయు 144 బస్తాలకు ప్రత్యామ్నాయముగా మణుగు 36 రూ. చేయు నెయ్యి ఎన్ని మళ్లు ఇయ్యవచ్చును?

60. పదముగ్గురిలో ఒకొక్కనికి, తక్కినవారిలో ఒకొక్కనికంటె రూ. 6—5—3 ఎక్కువ కిట్టునట్లు రూ. 282—5—1, 23 మంది మనుష్యులకు పర్చుము.

61. నెల్లూరులో ఒక రైతు ధాన్యము పుట్టి 90 రూ. లకు అమ్మిన, ఖర్చులు మాత్రము కటాకటీగా ఎత్తిపోవును. కాని, అతడు తన సిస్తులో సగము, పుట్టి 85 రూ. లకును, మిగత పుట్టి రూ. 102—8—0 లకును అమ్మి రూ. 112—8—0 లాభము తీసెను. అతని సిస్తు ఎన్ని పుట్లు?

62. ఒక ప్రొఫెసరుగారి స్మారక చిహ్నమైన ఒక ఛాయాపటము నిమిత్తమై చందాలు వేసినవారిలో సగముమంది ఒకొక్కడు ఒక రెండున్నర నోటును, మూడవవంతుమంది ఒకొక్కడు ఒక రూపాయినోటును ఇచ్చిరి. తక్కినవారు పావలాచొప్పున వేయగా అది 60 రూ. అయినది. ఒకొక్క రకములో ఎందరేసి చందాదారులున్నారు? మొత్తము చందా ఎంత?

63. ఒక స్కూలు తాలూకు వసతిగృహములో ఒక నెల 50 మంది బాలురు ప్రవేశమైరి. మరుసటినెల మరి పదిమంది ప్రవేశమగుటవల్ల పంపకములో నెల ఖర్చు తలొక రూపాయిన్నరా తగ్గెను, కాని మొత్తముమీద 60 రూ. రెండవనెలలో ఎక్కువే ఖర్చయ్యెను. ఒకొక్క నెలలో ఒకొక్కడి వంతు ఖర్చు ఎంత?

64. ఒక కలగలుపు నూనెలో 8 వంతులు మణుగు 11 రూ. చేయు మంచినూనెయు, 12 వంతులు మణుగు 7 రూ. చేయు వేరుసెనగనూనెయు అది వీసె రూపాయ పావలాకు అమ్మకమయ్యెను. అమ్మినది 5 మ. 6 వీ. 3 శే. అయితే లాభమెంత?

65. ఒక సంచీలోని కొన్ని రూపాయికాసులు, కొన్ని పావలాకాసులు, మొత్తము 50 స్వరూపాలు. ఆ సంచీలో ఉన్న సొమ్ము విలువ 35 రూ. ఏ రకము ఎన్ని?

అధ్యాయము II.

ప్రమాణములు, గుణిజములు, భాజనీయత, గ. సా. ప్ర., క. సా. గు.

2. భాజనీయత: లక్షణములు.

ఈ క్రింది భాజనీయతా లక్షణములు బాగుగ జ్ఞాపకముంచుకొనవలెను:—

(1) 2 చే నిశ్శేషముగ భాజనీయమగుటకు ఒక సంఖ్యలోని చివర అంకె 0, 2, 4, 6, 8 లలో నేదైన అయియుండవలెను.

(2) 4 చే భాజనీయమగుటకు సంఖ్యలోని చివర రెండంకెలచే ఏర్పడు సంఖ్యకు 4 కారణాంకము కావలెను.

(3) 8 చే భాజనీయమగుటకు సంఖ్యలోని చివర మూడంకెలచే ఏర్పడు సంఖ్యకు 8 కారణాంకము కావలెను.

(4) 5 చే భాజనీయమగుటకు సంఖ్యలోని చివర అంకె 0, 5 లలో నేదైన అయియుండవలెను.

(5) 9 చేగాని 3 చేగాని భాజనీయమగుటకు, సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తమునకు 9 గాని, 3 గాని కారణాంకము కావలెను.

(6) 11 చే భాజనీయమగుటకు సంఖ్యలోని బేసి స్థానములలోని అంకెల మొత్తముయొక్కయు సరిస్థానములలోని అంకెల మొత్తముయొక్కయు తేడా, 0 అయిన కావలెను, లేకున్న దానికి 11 కారణాంకమైన కావలెను.

ఇందుకు హేతువు:—

$$87956 = 8\times 10000 + 7\times 1000 + 9\times 100 + 5\times 10 + 6$$
$$= 8\times(9999+1) + 7\times(1001-1) + 9\times(99+1) + 5\times(11-1) + 6$$
$$= 8\times 9999 + 8 + 7\times 1001 - 7 + 9\times 99 + 9 + 5\times 11 - 5 + 6$$
$$= 8\times 9999 + 7\times 1001 + 9\times 99 + 5\times 11 + 8 - 7 + 9 - 5 + 6$$
$$= \underline{11(8\times 909 + 7\times 91 + 9\times 9 + 5)} + \underline{8 - 7 + 9 - 5 + 6}.$$

పై న్యాసములో 87956 అను సంఖ్య రెండు భాగముల క్రింద నున్నది. మొదటి భాగమునకు 11 కారణాంకము. రెండవ భాగము బేసి స్థానములలోని అంకెలయొక్కయు, సరిస్థానములలోని అంకెలయొక్కయు తేడా. కాబట్టి సంఖ్య 11 చే భాజనీయమగుటకు ఆ రెండవ భాగము 0 అయినను చాలు, లేక దానికి 11 కారణాంకమైనను చాలు.

$8-7+9-5+6=23-12=11$. దీనికి 11 కారణాంకమే. కాబట్టి, సంఖ్య 11 చే భాజనీయము.

(7) 6 చే భాజనీయమగుటకు, 2, 3 లచే భాజనీయమగుటకు చెప్పిన లక్షణములు జెమిలిగా సంఖ్యకు పట్టవలెను.

(8) 12 చే భాజనీయమగుటకు 4, 3 లచే భాజనీయమగుటకు చెప్పిన లక్షణములు జెమిలిగా సంఖ్యకు పట్టవలయును.

(9) కాబట్టి, సర్వసామాన్యముగ, ఒక సంఖ్య, మిశ్రమాంకము దేనిచేనైనను సరే భాజనీయమగుటకు ఈ మిశ్రమాంకమునకు గల ఉత్తమ కారణాంకములచే వేర్వేరు భాజనీయత సూచించు లక్షణములు ఆ ఒక సంఖ్యకు పట్టవలయును.

ఉదా. 1. 144, 320 లకు కారణాంక పద్ధతిని గ. సా. ప్ర. కట్టుము.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 144 \\ 2 & 72 \\ 2 & 36 \\ 2 & 18 \\ 3 & 9 \\ & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 320 \\ 2 & 160 \\ 2 & 80 \\ 2 & 40 \\ 2 & 20 \\ 2 & 10 \\ & 5 \end{array}$$

$$\therefore 144 = 2\times 2\times 2\times 2\times 3\times 3 = 2^4\times 3^2$$
$$320 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 5 = 2^6\times 5.$$

రెండంకెలకును సామాన్యప్రమాణములు:—2, 2^2, 2^3, 2^4.

వానిలో గరిష్ఠ సామాన్యప్రమాణము:—2^4 అనగా $\underline{16}$.

ఉదా. 2. $8a^2b$, $2a^3bc$, $16a^5b^2cd$ మరి $20a^4b^3c^2$ లకు గ. సా. ప్ర. కట్టుము.

$$8a^2b = 2^3.a^2.b$$
$$2a^3bc = 2.a^3.b.c$$
$$16a^5b^2cd = 2^4.a^5.b^2.c.d$$
$$20a^4b^3c^2 = 2^2.5.a^4.b^3.c^2$$

2^3, 2, 2^4, 2^2 నీటికి గ. సా. ప్ర. $\underline{2}$.
5 సామాన్యముకాదు.
a^2, a^3, a^5, a^4 నీటికి గ. సా. ప్ర. $\underline{a^2}$.
b, b, b^2, b^3—నీటికి గ. సా. ప్ర. $\underline{b}$.
c, d లు—ఇవి సామాన్యము కావు.
∴ ఇచ్చిన నాలుగురాసుల గ. సా. ప్ర. $\underline{2a^2b}$.

పై రెండు ఉదాహరణములనుబట్టి, ఈ క్రింది సూత్రము ఊహ్యము:—

"ఇచ్చిన ప్రతి రాశికిగాని, ప్రతి అంకరాశికిగాని సామాన్యకారణాంకములను వ్రాయుము. అట్టి ప్రతి కారణాంకమును, అది ఏ రాశిలోనైన అధమము ఎన్నిసార్లు ఉన్నదో అన్నిసార్లు తీసికొనుము. అనగా ప్రతి సామాన్య కారణాంకముయొక్కయు రాసులలోనుండు కనిష్ఠ ఘాతములో ఏర్పరచిన లబ్ధము గ. సా. ప్ర."

ఉదా. 3. 111111, 47047 లకు గ. సా. ప్ర. కట్టుము.

ఈ క్రిందిది కుదిమట్టముగా వ్రాసిన భాగహారపద్ధతియే:—

2	47047	111111	2
	34034	94094	
3	13013	17017	1
	12012	13013	
	1001	4004	4
		4004	

∴ గ. సా. ప్ర. 1001.

ఆయా లబ్ధములను వ్రాయక, ఏకముగా ఇటలీపద్ధతిని శేషములే వ్రాసి వేసిన, న్యాసము ఇంతకంటె తగ్గును.

3. భాగహారపద్ధతిని రెండు సంఖ్యలకు గ. సా. ప్ర. కట్టు సందర్భములో ఈ క్రింది నియమములు ఇమిడి ఉన్నవి:—

(1) A అనునది, B కి కారణాంకమైనచో, m B కి కూడ కారణాంకమే (m ఒక పూర్ణాంకము) అయినప్పుడు.

ఎట్లన, 7, 35 కి కారణాంకము.

∴ 7, 4 × 35 కిని, (అనగా 140 కిని 5 × 35 కిని), (అనగా 175 కిని) కూడ కారణాంకమే.

(2) A అనునది, B C లను నిశ్శేషముగ భాగింపగలిగిన, అది B + C, B − C లను కూడ నిశ్శేషముగ భాగింపగలదు.

ఎట్లన, 11, 55 33 లకు సామాన్య కారణాంకము.

∴ 11 55 + 33 అనగా 88 కిని, 55 − 33 అనగా 22 కిని కూడ కారణాంకమే.

(3) A, B C లను నిశ్శేషముగ భాగింపగలిగిన, అది m B + n C ని గాని p B − q C ని గాని నిశ్శేషముగ భాగింపగలదు. (m, n, p, q లు ఏ పూర్ణాంకములైనను సరె.) వీటిలో రెండవదియైన p B − q C అనునది యే పై భాగహార పద్ధతిలో గ. సా. ప్ర. కట్టునప్పుడు ప్రత్యేకముగ ఉపచరించునట్టిది.

పైన చేసిన మూడవ ఉదాహరణములో:

111111 = B (అనుకొందము) 17017 = D

47047 = C (అనుకొందము) 13013 = E

గ. సా. ప్ర. = A. 4004 = F

గ. సా. ప్ర. 111111 (B) కిని, 47047 (C) కిని సామాన్య కారణాంకము కావలెను.

∴ గ. సా. ప్ర. 1 × 111111 − 2 × 47047 = 17017 కి కూడ (అనగా p B − q C లేక 1 B − 2 C) సామాన్య కారణాంకము కావలెను.

∴ గ. సా. ప్ర. 47047 కిని 17017 కిని కూడ సామాన్య కారణాంకము కావలెను.

∴ గ. సా. ప్ర. 1 × 47047 − 2 × 17017 = 13013 కి కూడ. (అనగా p C − q D లేక 1 C − 2 D) సామాన్య కారణాంకము కావలెను.

∴ గ. సా. ప్ర. 17017 కిని 13013 కిని కూడ సామాన్య కారణాంకము కావలెను.

∴ గ. సా. ప్ర. 1 × 17017 − 1 × 13013 = 4004 కి కూడ (అనగా p D − q E లేక 1 D − 1 E) సామాన్య కారణాంకము కావలెను.

∴ గ. సా. ప్ర. 13013 కిని 4004 కిని కూడ................

∴ గ. సా. ప్ర. 1 × 13013 − 3 × 4004 = 1001 కి కూడ (అనగా p E − q F లేక 1 E − 3 F) సామాన్య కారణాంకము కావలెను.

∴ గ. సా. ప్ర. 4004 కిని 1001 కిని సామాన్యకారణాంకము కావలెను. 4004 లకు 1001 కారణాంకము గనుక, గ. సా. ప్ర. **1001** అని ఊహింతుము.

ఉదా. 4. 47047, 111111, 58630 లకు గ. సా. ప్ర. కట్టుము.

47047, 111111 లకు గ. సా. ప్ర. 1001 అని పైన చేసినది. అందువల్ల, 1001, 58630 ల గ. సా. ప్ర. యే ఇచ్చిన సంఖ్యల గ. సా. ప్ర. అగును.

$$1001 = 11 \times 13 \times 7$$
$$58630 = 13 \times 4510$$
$$= 13 \times 5 \times 902$$
$$= 13 \times 5 \times 11 \times 82$$
$$= 13 \times 5 \times 11 \times 2 \times 41.$$

∴ గ. సా. ప్ర. = 11 × 13

= 143

అభ్యాసము 2 (A)

(a) 1 నుండి 24 వఱకును, (b) 25 నుండి 49 వఱకును, (c) 50 నుండి 74 వఱకును, (d) 75 నుండి 100 వఱకును ఉండు చేసి సంఖ్యలనన్నిటిని వ్రాసి వాటిలో ఉత్తమాంకములను నిరూపింపుము.

2. ఈ క్రింది సంఖ్యల జతలు అన్యోన్యసంబంధమున ఉత్తమాంకములా?
(*a*) 18, 20; (*b*) 36, 41; (*c*) 78, 237; (*d*) 105, 168.

3. భాగహారకాండ లేకుండ వీటిలో శేషములను కట్టుము:—
(*a*) 17486 ÷ 8; (*b*) 673423 ÷ 125; (*c*) 37068 ÷ 25; (*d*) 68345 ÷ 9.

4. భాజనీయతయొక్క లక్షణ పరీక్షచేసి ఈ క్రింది సంఖ్యలలో 2, 3, 4, 5, 9, 11, 25 లు కారణాంకములేమో నిర్ధరింపుము:—
(*a*) 727875, (*b*) 896434, (*c*) 1008000, (*d*) 375529.

5. ఈ క్రిందివాటిలో తొమ్ముదుల మినహాయింపుచేసి, కొన్ని లెక్కలు, అయితే సరికావచ్చుననియు, తక్కినవి సరికావనియు ధ్రువపరచుము:—

(*a*) 1893 + 4765 = 6658.	(*e*) 1893 + 4765 = 6568.
(*b*) 2895 − 636 = 2259.	(*f*) 2895 − 636 = 2529.
(*c*) 873 × 454 = 396342.	(*g*) 873 × 454 = 393642.
(*d*) 264 × 101 = 26664.	(*h*) 264 × 101 = 26934.

6. ఈ క్రింది సంఖ్యలలో పువ్వు * వేసిన చోట్ల ఉండవలసిన అంకెలను కట్టుము:—

(*a*) 46 * 389 * దీనికి 45 కారణాంకమైనప్పుడు.
(*b*) 8 * 764 * ,, 44 ,,
(*c*) 86 * 930 * * ,, 225 ,,
(*d*) 78 * 680 * * ,, 275 ,,

7. (*a*) 78*a*9*b*8 11 చేతను, 89*a*4 9 చేతను భాజనీయములు, *a* *b* లు కట్టుము.

(*b*) 334*a*08*b* 6 చే భాజనీయము. *a* *b* లు కట్టుము.

(*c*) 8634*ab* 4 చేతను, 638*a* 3 చేతను భాజనీయములు, *a* *b* లు కట్టుము.

(*d*) 3*a*38*b*34 99 చే భాజనీయము. *a* *b* లు కట్టుము.

8. ఏదైన సంఖ్య వ్రాయుము. ఆ అంకెలనే పుచ్చుకొని క్రమము మార్చి మరియొక అంకె ఏదైన ఏర్పరచి, దీనికిని అసలు సంఖ్యకును తేడా 9 చే భాజనీయమని నిరూపింపుము. (ఎట్లన; 1035, 5103. తేడా 5103 − 1035 = 4068. ఇది 9 చే భాజనీయము.)

9. ఏదైన సంఖ్యకును ఆ సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తమునకును తేడా 9 చే భాజనీయమని నిరూపింపుము. ఆ మాట ఈ క్రిందివాటిలో సరి చూపుము:—
(*a*) 8932, (*b*) 60005, (*c*) 70865, (*d*) 93258.

10. (*a*) 1083 కి ఉత్తమకారణాంకములను కట్టుము. ఒక పూర్ణవర్గ చేయవలయునన్న, సంఖ్యను అధమము ఎంత పెట్టి గుణించి తీరవలయును?

(*b*) 9000 కి ఉత్తమకారణాంకములను కట్టుము. ఒక పూర్ణ ఘనము చేయవలయునన్న, సంఖ్యను అధమము ఎంత పెట్టి గుణించి తీరవలయును?

(*c*) కారణాంకపద్ధతిని 6050 × 3785 పూర్ణవర్గ మగునో కాదో నిర్ధరింపుము. కానిచో, అట్లగుటకు దానిని అధమము ఎంత పెట్టి గుణించి తీరవలయును?

(*d*) కారణాంకపద్ధతిని 3645 × 2048 × 1331 పూర్ణఘనము అగునో కాదో నిర్ధరింపుము. కానిచో, అట్లగుటకు దానిని అధమము ఎంత పెట్టి గుణించి తీరవలయును?

11. ఈ క్రిందివాటికి కారణాంకపద్ధతిని గ. సా. ప్ర. కట్టుము:—
(*a*) 156, 168; (*b*) 896, 1792; (*c*) 228, 380, 1728; (*d*) 875, 1025, 3075.

12. ఈ క్రిందివాటికి భాగహారపద్ధతిని గ. సా. ప్ర. కట్టుము:—
(*a*) 1872, 2457; (*b*) 2877, 2982; (*c*) 2415, 3360, 4305; (*d*) 6800, 13368, 6256.

13. 1922 సం॥ జనవరి నెల 1-వ తేది ఆదివారము. 1923 సం॥ జనవరి నెల 1-వ తేది ఏ వారము? ఏ తరువాత సంవత్సరము, మొదటిసారి, మరల జనవరి నెల 1-వ తేది ఆదివారము?

14. 1891 సం॥ మే నెల 8-వ తేది లక్ష్మీవారమునాడు, ఒక దినపత్రిక సంచిక నెంబరు 3871. అది బయలుదేరినది ఏ వారము, ఏ తేది?

15. కుంభకోణములో మహా మాఘము అను ఉత్సవము 12 ఏళ్లకు ఒకసారి. అది 1921 సం॥లో వచ్చెను. 19-వ శతాబ్దము చివర పాతికలో అది ఎప్పుడెప్పుడు వచ్చెను?

16. ఒక తోకచుక్క 52 ఏళ్లకు ఒకసారి కనబడును. అది 1912 సం॥లో కనబడినది. 1526 సం॥లో జరిగిన మొదటి పానిపట్ యుద్ధమునకును, 1914 సం॥లో ప్రారంభించిన జర్మను మహా సంగ్రామమునకును, మధ్య అది ఎన్ని సార్లు కనబడియుండెను?

17. 189 తెల్లగోళీలు, 100 నల్లగోళీలు, మరి 73 గులాబిగోళీలను కొందరు చిన్న పిల్లలకు ఇచ్చివేయవలయునని నా ఉద్దేశము. ప్రతి ఒక్కనికిని సమాన సంఖ్య గోళీలును, ఏ ఒక్కనికిని రెండు రకములవి రాకుండను. ఈ రీతిని అధమము ఎంతమందికి ఇయ్యవచ్చును? అప్పుడు ఒకొక్కనికి ఎన్ని ఇవ్వవచ్చును?

18. ఒక పెద్ద మనిషి ఒక బట్టలవర్తకునికి ఇవ్వ తేలిన రూ. 523—8—0 ను ఒక్క మాటుగా చెల్లించలేడు. చెల్లించు సొమ్ము నెలకు 20 రూ. లకు తగ్గితే అసలు వసూలే పుచ్చుకోనని న్ని, యీవత్తు బాకీ సమాన మొత్తములలో 25 మాస వాయిదాలకు మించకుండ తీర్మానము కావలెనని న్ని వర్తకుడు షరతు పెట్టినాడు, ఒక్కొక్క వాయిదాకి ఎంత సొమ్ము కట్టవలెను?

19. (*a*) ఒక్కొక్కదానిలోనుండి మహా అయితే ఎంత చొప్పున చెల్లించిన యెడల పౌ. 11—10—0, పౌ. 34—10—0, 46 పౌ. అను సొమ్ములు మూడును కూడ నిశ్శేషమగును?

(*b*) ఒక్కొక్కదానిలోనుండి మహా అయితే ఎంతచొప్పున చెల్లించిన యెడల రూ. 21—14—0, రూ. 28—2—0, రూ. 34—6—0 అను సొమ్ములు మూడునుకూడ నిశ్శేషమగును?

20. ఒక ఎవోయిర్‌డ్యుపోయ్ పౌనునకును ఒక ట్రోయ్ పౌనునకును గల మహత్తమ ప్రమాణమును గింజలలో కట్టుము. (1 పౌ. (ఎ) = 7000 గింజలు, 1 పౌ. (ట్రో.) = 5760 గింజలు.)

21. ఇద్దరు తాపీవాళ్లలలో ఒకనికి వారమునకు రూ. 5—4—0 ను, రెండవ వానికి వారమునకు 3 రూ. ను కిట్టినది. ఇద్దరి రేటును ఒకటే. ఆ రేటు ఎంత? ఒక్కొక్కడు ఎన్నెన్ని రోజులు పనిచేసినాడు?

22. ఒక తోట పొడుగు 2100 గ., వెడల్పు 1320 గ. దానిని నలుచదరపు భాగములలోనికి విడగొట్టవలెను. అట్టివి అధమము ఎన్ని ఏర్పరచగలము? అప్పుడు ఆ చదరముయొక్క భుజమెంత?

23. ఒక సర్వేపార్టీవారు తమరు బసచేసే చోటికి 715 కొలత కఱ్ఱలును, 429 పాతు కఱ్ఱలును ముస్ముందుగానే కట్టలుకట్టి పంపుచున్నారు. ప్రతి కట్ట లోను సమానసంఖ్య కఱ్ఱలున్నవి, అవి ఒకే రకమువి. బండికి ఒకటే కట్ట వేసినచో, అధమము ఎన్ని బళ్లు కావలెను?

24. త్రిభుజాకారములోనుండి పూలమళ్లు గలిగిన ఒక పంపునకు చుట్టు గొట్టపుముక్కలతో దడికట్టవలయును. ఆ పంపుయొక్క భుజములు 216 అ., 144 అ., మరి 84 అ. కోత అవసరములేకుండ, మహా అయితే ఎంతేసి పొడుగు ముక్కలు తీసికోవచ్చును? అట్టివి ఎన్ని చాలును?

25. ఒక దర్జీ ఒకటే పన్నాగల ట్వీడ్ 12 గజములు, సిల్కు 17 గజములు, హాలండు చెక్ 22 గజములు కొన్నాడు. వీటిలో 2 గజములు హాలండు

చెక్ ముక్క, 1 గజము సిల్కుముక్కమాత్రము దాచి, సమాన ఆదిగల కోట్లు అధమము ఎన్ని అతడు కుట్టవచ్చు? అప్పుడు కోటు ఎన్ని గజములు పట్టును?

26. ఒక ఆయనకు ఒకటి 95 నారింజలతోను, రెండవది 57 పెదరేగుల తోను రెండు బంగీలు వచ్చినవి. ఆయన, ఇవి, తన స్నేహితులకు సరిసమానముగా, ఎవ్వనికిని రెండు రకములు పడకుండ, పంచిపెట్టగా, 5 నారింజలును 3 పెదరేగులును మిగిలెను, మరి ఇద్దరు స్నేహితులకు పళ్లు లోటువచ్చెను. ఆయన మరి ఎన్ని కొనిన సరిపోవును! ఎన్నేసి ఇచ్చెను!

27. ఒక గది పొడుగు 24 అ., వెడల్పు 18 అ. దీని నిండ చాపలు పరవవలెను. చాప పొడుగు, వెడల్పునకు రెట్టింపు. పైగా, 4 అ. తక్కువగాని, 6 అ. ఎక్కువగాని పొడుగుగల చాపలు దొరకవనుకొనుము. ఎంతెంత కొలతలుగల చాపలు తీసికొనవచ్చును? ఎన్నెన్ని చాపలు కావలెను?

28. నాకు 115 ఇంగ్లీషు పుస్తకములు, 69 తెలుగువి, 46 సంస్కృతమువి కలవు. వాటిని సమానసంఖ్యలుగా ఏ రెండు రకములు కలియకుండ, అలమారాలలో అమర్చవలెను. పుస్తకము ఆది $7\frac{1}{2}'' \times 5\frac{1}{2}'' \times 2''$. అలమారా చెక్క, మందము $\frac{1}{2}''$. నేను అధమము ఏ ఆదిగల బీరువాకు వ్రాసినచో సరిపోవును? (దానిలోపల కొలతలు కట్టిన చాలు.)

29. ఒకడు సెంట్రల్‌స్టేషనులో బయలుదేరి, రైలుపట్టాలకు సమానాంతరముగు ఒక రోడ్డుమీద సైకిల్ తొక్కుకొనిపోవుచూ, కొన్ని గంటలకి, తను 19-వ మైలులో 2-వ స్తంభము దాటుచున్నట్లును, మరి కొన్ని గంటలకి 47-వ మైలులో 17-వ స్తంభము దాటుచున్నట్లు కనిపెట్టెను. మైలుకు 24 స్తంభములు; వానిరేటు స్థిరము. అతడు, మహా అయితే, గంట కెన్ని మైళ్లు తొక్కియుండును?

30. ఈ క్రింది గుణకారములలో ఖాళీలు పూర్తిచేయుము:—

(*a*)

```
   ....
    ...
  17880
 .....
 10728
1233720
```

(*b*)

```
  .....
    ...
  56432
 112864
.......
6941136
```

31. ఈ క్రింది పెద్ద భాగహారములలో పువ్వులున్నచోట్లు పూర్తిచేయుము:—

```
(a)    . . )34934(        (b)   . . . )260984(
             . . .                      . . . .
            -------                    ---------
              5 .                       320 .
              . .                       . . . .
            -------                    ---------
             10 .                       156 .
              . .                       . . . .
            -------                    ---------
             18                          38
```

32. 792, 924 లకు గ. సా. ప్ర. కట్టుము. సంఖ్యల మొత్తమును, సంఖ్యల తేడాను గ. సా. ప్ర. చే భాగింపుము. శేషమేమి? మరల, సంఖ్యలను క్రమముగ 2, 3 లచే; 5, 7 లచే; 11, 23 లచే; గుణించి, ఒకొక్కసారియే వచ్చు రెండేసి లబ్ధములకును తేడాను గ. సా. ప్ర. చే భాగింపుము. శేష మేమేమి? ఈ పరికర్మలనుబట్టి ఏ సర్వసామాన్యసూత్రము ఊహ్యాము?

33. భాగహారపద్ధతినికాక, కారణాంకపద్ధతిని కాక, పై ప్రశ్నలోని సూత్రమును ప్రయోగించి ఈ క్రిందివాటికి గ. సా. ప్ర. కట్టుము:—

(a) 8678, 8372. (b) 1256, 1048.
(c) 3654, 3528. (d) 4728, 4925.

34. (a) రెండు సంఖ్యలకు భాగహారపద్ధతిని గ. సా. ప్ర. కట్టుటలో, చివర శేషము 23, భాజితములు 2, 2, 2. సంఖ్యలను కట్టుము.

(b) రెండు సంఖ్యలకు భాగహారపద్ధతిని గ. సా. ప్ర. కట్టుటలో, చివర భాజకము 2631, భాజితములు క్రమముగ 1, 2, 1, 1, 3 మరి 4. సంఖ్యలను కట్టుము.

35. (a) 101 శేషముతో 8581, 11495 లను భాగింపగల మహాత్తమ సంఖ్య ఏది?

(b) 161 శేషముతో 23390, 19214 లను భాగింపగల మహాత్తమ సంఖ్య ఏది?

36. (a) 12, 20 లు క్రమముగ శేషములతో 29886, 28745 లను భాగింపగల మహాత్తమ సంఖ్య ఏది?

(b) 402, 138 లు క్రమముగ శేషములతో 16908, 18216 లను భాగింపగల మహాత్తమ సంఖ్య ఏది?

37. (a) సమాన శేషముతో 9383, 4973, 4091 లను భాగింపగల మహాత్తమ సంఖ్య ఏది? ఆ శేషమెంత?

(b) సమాన శేషముతో 6688, 7014, 15816 లను భాగింపగల మహాత్తమ సంఖ్య ఏది? ఆ శేషమెంత?

(c) సమాన శేషముతో 10501, 11013, 12293 లను భాగింపగల మహాత్తమ సంఖ్య ఏది? ఆ శేషమెంత?

38. ఈ క్రిందివాటిలో గ. సా. ప్ర. కట్టుము:—

(a) $16a^2b$, $20a^3b^2c$, $48a^4b^6c^2$.
(b) $2xy^2zd$, $6x^2y^3z^2c$, $8x^3yz^2f$, $10x^4y^3z^2$.
(c) $15a^2bx^2y$, $25a^4b^2c^3xy^2$, $35a^3b^2c^8d^2$.
(d) $6p^3q^2l^2$, $12q^2l^2m^2$, $18p^3q^2l^3m^3$, $24q^3l^5c^3$.
(e) $40a^3x^8b^6$, $32a^4x^6b^4$, $64b^6x^8a^8$, $128b^8a^4x^2$.
(f) $11x^2yza^2bc$, $22x^4y^3z^2a^4b^2c^3$, $33x^6y^4z^3b^2c^2a$.

39. (a) a, 108 లకు గ. సా. ప్ర. 12. a 150, 200 ల సందుననున్నదని తెలిసి, దానిని కట్టుము.

(b) x, 1023 లకు గ. సా. ప్ర. 93. x 2000, 2300 సందుననున్నదని తెలిసి, దానిని కట్టుము.

4. క. సా. గు. (కనిష్ఠ సామాన్యగుణిజము.)

ఉదా. 5. 46, 69 లకు క. సా. గు. కట్టుము.

$46 = 2 \times 23$
$69 = 3 \times 23$

$\therefore$ క. సా. గు. $= 2 \times 3 \times 23 = \dfrac{2 \times 23 \times 3 \times 23}{23}$

$\therefore$ క. సా. గు. $= \dfrac{\text{సంఖ్యల లబ్ధము}}{\text{గ. సా. ప్ర.}}$ (1)

క. సా. గు. $= 2 \times 23 \times 3 = 46 \times 3$
లేక, $3 \times 23 \times 2 = 69 \times 2$.

$\therefore$ క. సా. గు. = ఒక సంఖ్యను గ. సా. ప్ర. చే భాగింపగా వచ్చిన భాజితమును రెండవ సంఖ్యచే గుణింపగా వచ్చెడు లబ్ధము (2)

క. సా. గు. $= 2 \times 3 \times 23$

$\therefore$ క. సా. గు. = రెండు సంఖ్యలను గ. సా. ప్ర. చే భాగింపగా వచ్చిన భాజితముల లబ్ధమును గ. సా. ప్ర. చే గుణింపగా వచ్చిన లబ్ధము (3)

(1) నుండి, గ. సా. ప్ర. × క. సా. గు. = రెండు సంఖ్యల యొక్కయు లబ్ధము అని స్పష్టము.

ఉదా. 6. 320, 560, 840 లకు క. సా. గు. కట్టుము.

$320 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times5 = 2^6\times5.$

$560 = 2\times2\times2\times2\times5\times7 = 2^4\times5\times7.$

$840 = 2\times2\times2\times3\times5\times7 = 2^3\times3\times5\times7.$

2	320	2	560	2	840
2	160	2	280	2	420
2	80	2	140	2	210
2	40	2	70	3	105
2	20	5	35	5	35
2	10		7		7
	5				

∴ క. సా. గు. $= 2\times2\times2\times2\times2\times2\times3\times5\times7 = 2^6\times3\times5\times7$
$= 320\times3\times7$
$= 960\times7$
$= 6720.$

సంఖ్యలయొక్క ఉత్తమ కారణాంకములు కట్టుము. వివిధములైన ఉత్తమ కారణాంకములను తీసికొనియు, అందులో ఒకే కారణాంకము సంఖ్యలలో మరల మరల తటస్థించినచో అది మిక్కిలి ఎక్కువసార్లు ఏ సంఖ్యలో తటస్థించునో అన్ని కారణాంకములుగా అది తీసికొనియు, ఏర్పరచిన లబ్ధమే క. సా. గు. పై ఉదాహరణలో 2 ను 6 కారణాంకములుగా తీసికొంటిమి. క్రియకు, క. సా. గు. అనగా సంఖ్యలలోనుండు మహోత్తమ ఘాతములతో తీసికొన్న కారణాంకముల లబ్ధము.

ఉదా. 7. ఈ క్రిందివాటికి క. సా. గు. కట్టుము:—
$16a^2b,\ 4a^3b^2c,\ 20a^5b^4xy$, మరి $24ab^3c^2x^3l$.

16, 4, 20, 24 లకు క. సా. గు. $=240$.

∴ క. సా. గు. $= 240a^5b^4c^2x^3yl$.
(అంకెలకు ఇచ్చిన సూత్రమే.)

4	16,	~~4~~,	20,	24
2	4,		5,	6
	2,		5,	3

ఉదా. 8. ఈ క్రిందివాటికి క. సా. గు. కట్టుము:—
$x^2y^3z^3,\ x^3y^2z^5,\ z^2x^3y^3,\ a^2bc,\ abc^2,\ b^2ca.$
క. సా. గు. $= x^3y^3z^5a^2b^2c^2$.
(అంకెలకు ఇచ్చిన సూత్రమే.)

అభ్యాసము 2 (B)

1. ఒక తాపీ మేస్త్రి తన క్రిందవాళ్లకు 15 అ. చొప్పున చెల్లించవలెను. అతని దగ్గర ఉన్నవి అన్నీ పావలాకాసులే. ఇతర నాణెములు ముట్టుకొనకుండ, అతడు అధమము ఎంతమందికి చెల్లించవచ్చు?

2. x అ. పొడుగుగల ఒక గదికి పెంకు వెయ్యవలెను. వాసములు 15″, 18″, లేక 24″—వీటిలో ఏ ఎడముంచి పెట్టినను సరే జాగా మిగలదు. x అధమము ఎంత? అడ్డగోడలను ఆని చెరియొక వాసమును ఉంటే, పై సందర్భములలో ఎన్నెసి వాసములు కావలసివచ్చును?

3. ఒక వరాండా అంతటా రెండు రకముల నల్లరంగు పాలరాయి పరచినారు. ఒక రకము ఆది 24″ × 12″; రెండవ రకము 18″ × 12″. పరచుటలో ఈ రాళ్ల పొడుగులు వరాండా పొడుగు వెంబడిగా వచ్చునట్లును, వెడల్పులు వరాండా వెడల్పు వెంబడిగా వచ్చునట్లును చూచినారు. ప్రథమములో, రెండు రకములవియు రెండు తెచ్చి, వెడల్పులు ఏకగీతలోను, పొడుగులు సరసగ తగులునట్లును, పెట్టినారు. ఇదేరీతిగ పెట్టుకొనుచుపోయినచో, అధమము ఎంత దూరములో వెడల్పులు మరల ఏకగీతలో నుండును?

4. ఒక రైలురోడ్డుమీద టెల్లిగ్రాఫు స్తంభములు, మైలునకు 22 చొప్పున సమానమైన ఎడములో ఉన్నవి అవతలపక్క గవర్నమెంటు టెల్లిగ్రాఫు స్తంభములు, మైలునకు 20 చొప్పున సమాన ఎడములోనే ఉన్నవి. పట్టాలకు ఇటు ఒకటి అటు ఒకటి ఒకానొకచోటు ముఖాముఖిగా నుండిన, మరల అధమము ఎంత దూరములో రెండు అట్లుండును?

5. 6″ వ్యాసముగల ఒక నీళ్లపైపు జంక్షనునుండి, 3″, 2″ మరి $1\frac{1}{2}$″ వ్యాసములతో మూడు శాఖలుగ చిన్న పైపులు బయలుదేరినవి. ఈ మూడు రకముల పైపు ముక్కలు, క్రమముగ 12′, 10′ మరి 8′ గలవియే దొరికినవి. ఒకొక్క శాఖకు ప్రక్క ఒక ఇల్లు ఉన్నది. జంక్షనునుండి ఒకొక్క ఇల్లు అధమము ఏ సమాన దూరములో నుండినచో, ముక్కలు కోయ నవసరము లేకయే, పైపు పెట్టవచ్చు?

6. ఒక సైకిళ్ల పందెములో, మూడింటి వెనుక చక్రములు ఒక నేల గీతను స్పృశించినవి, స్పర్శబిందువులను సున్నముముక్కతో వత్తుగా గీసినారు. ఆ చక్ర వ్యాసములు 24″, 26″ మరి 28″. "స్టార్" అనుటతో, అవి బయలు దేరినవి. ఆ గీట్లు మూడును, అధమము ఎంత దూరములో ఏక కాలమందు నేలను మరల స్పృశించును? (పరిధి $= 3\frac{1}{7}\times$ వ్యాసము.)

7. 26 అం., 32 అం., 35 అం., మరి 36 అం., అంగులుగల నలుగురు మనుష్యులు ఒక్కమాటే అడుగుపెట్టి నడక ప్రారంభించిరి. మరల ఏక కాలమందే అడుగుపెట్టెడి స్థితి వచ్చుటకు వారు అధమము ఎంత దూరము నడువవలెను?

8. నలుగురు మనుష్యులు క్రమముగ 10 ఏసి, 15 ఏసి, 18 ఏసి, మరి 20 ఏసి మైళ్లు రోజుకి నడువగలరు. ఒకొక్కడు కొన్ని కొన్ని పూర్ణదినములే నడువవలయునన్న, దూరము అధమము ఎంత ఉండవలయును?

9. ఒక డ్రిల్లు మేష్టరుగారు వ్యాయామములో ఒక అభ్యాసము చెప్పుటకు 14 మంది జట్లును, రెండవదానికి 15 మంది జట్లును, మూడవదానికి 18 మంది జట్లును కావలయును. ఒక స్కూలులోని పిల్లలందరును కలిపి ఇందులో దేనికైన సరిపోవుదురు. ఆ స్కూలులో అధమము ఎంతమంది ఉండవలె?

10. సూర్యునిచుట్టు ప్రదక్షిణము చేయుటకు శుక్రునకు 219 దినములు, గురునకు 12 ఏళ్లు, శనికి 30 ఏళ్లును పట్టును. 1922, 1-వ ఆగస్టున ఈ గ్రహములు కన్యయందు కొన్నిచోట్ల ఉన్నవనుకొనుము. మరల అవి ఆ రాశియందే అన్యోన్యముగ అట్టి స్థితికే వచ్చునప్పటికి అధమము ఎంత కాలము పట్టును?

11. గులాబి, సంపంగి, మల్లిమొక్కలు క్రమముగ మూడేసి నాలుగేసి అయిదేసి అడుగుల ఎడముగ వరుసలలో పాతినారు. మొదటి మొక్కలు మూడును ఏకగీతలో నున్నవి. అధమము ఎంత దూరములో మరల (1) గులాబి సంపంగులు, (2) సంపంగి మల్లెలు, (3) మల్లి గులాబులు ఏకగీతలో నుండును? అధమము ఎంత దూరములో మరల మూడును ఏకగీతలో నుండును?

12. (*a*) 1 మణుగు=25 పౌనులు అను సంగతి తెలిసి, అధమము ఎన్ని వీసెలు కొన్ని నిండు పుట్లకు సమానమో, అధమము ఎన్ని వీసెలు కొన్ని నిండు హండ్రెడ్ వెయిట్లకు సమానమో కట్టుము

(*b*) 7 సామ్రాజ్యపు మణుగులు=576 పౌనులు (ఎవాయిర్ డుపోయ్) 355 మెద్రాసు మణుగులు=9372 పౌనులు (ఎవాయిర్ డుపోయ్) అను విషయములు తెలిసి, అధమము ఎన్ని ఎవాయిర్ డుపోయ్ పౌనులు, కొన్ని నిండు సామ్రాజ్యపు మణుగులకు సమానమో, కొన్ని మెద్రాసు మణుగులకు సమానమో కట్టుము.

13. (*a*) 14 అ., రూ. 1—4—0, రూ. 1—12—0 మరి రూ. 2—2—0 ను కొన్ని కొన్ని నిండుసార్లు ఒక సొమ్ములో ఉండవలెనన్న, అది అధమము ఎంతై ఉండవలెను?

(*b*) 24 పలములు, 28 ప., 32 ప., 36 ప., మరి 1 వీ. 8 ప. ను కొన్ని కొన్ని నిండుసార్లు ఒక బరువులో ఉండవలెనన్న, అది అధమము ఎంత ఎత్తుది కావలెను?

14. (*a*) 3½ మైళ్ల పరిధిగల ఒక వలయమార్గములో ముగ్గురు మనుష్యులు, క్రమముగ నిమిషమునకు 112 గ., 110 గ., 88 గ. చొప్పున పరుగెత్తుచున్నారు. వారు ఒక చోటే, ఒక మాటే, బయలుదేరినచో; ఆ చోటే ముగ్గురును మొదటిమాటు మరల ఎప్పుడు ఉందురు?

(*b*) 6 మైళ్ల పరిధిగల ఒక వృత్తమున 2 గుఱ్ఱములు పరుగెత్తుచున్నవి. ఒకటి నిమిషమునకు 440 గ. ను, రెండవది 528 గ. పరుగెత్తగలవు. అవి ఒక చోటే, ఒక మాటే, ఒక వైపునకే పరుగెత్త మొదలుపెట్టినచో, ఆ చోటే, ఆ వైపునకే తిరిగి రెండును మొదటిసారి మరల ఎప్పుడు ఉండును?

15. ఒక పళ్లకొట్టులోని మామిడిపళ్లు అన్నిటిని, డజనులలోగాని, ఇరువైలలోగాని, పాతికలలోగాని, లెక్కపెట్టినచో శేషముండదు. ఉన్న పళ్లు 1500 పైన, 2000 లోపు. అవి ఎన్ని?

16. (*a*) 30000, 40000 వీటి సందుననుండునదియు 254, 152 లచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడు సంఖ్య ఏది?

(*b*) 3000, 4000 వీటి సందుననుండి, 256, 192 లచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడు సంఖ్య ఏది?

17. (*a*) 81, 99 లచే భాజనీయమగు వర్గ సంఖ్య అధమమెంత?

(*b*) 121, 192 లచే భాజనీయమగు వర్గ సంఖ్య అధమమెంత?

18. (*a*) 7, 8, 9 లలో దేనిచేతనైన భాగించినపుడు 4 శేషమిచ్చు సంఖ్య అధమమెంత?

(*b*) ఒకడు కొన్ని పెద రేగిపళ్లను, అన్నే నారింజపళ్లను, అన్నే అత్తిపళ్లను కొని, క్రమముగ 4 ఏసి, 5 ఏసి, 6 ఏసి చొప్పున ఆ మూడు రకములను పోగులు పెట్టుకొని రాగా, ప్రతి రకమునకు మూడు మిగిలిపోయినవి. ఒకొక్క రకము సంఖ్య 600, 700 సందుదియైన, ఆతడు రకమునకు ఎన్ని కొనెను?

19. (a) ఒక కాలము రోజులలో చెప్పబడి ఉన్నది. దానిని నెలలలోనికి మార్చితే, 29 రోజులు శేషము; సంవత్సరములలోనికి మార్చితే 364 రోజులు శేషము; వారములలోనికి మార్చితే 6 రోజులు శేషము; ఆ కాలము అధమము ఎన్ని రోజులు? ఆ సంఖ్య 6 అంకెలు గలిగియున్నచో, అప్పుడు ఎన్ని రోజులు?

(b) ఒక సంఖ్యను 9 చే భాగించినపుడు శేషము 4, 13 చే భాగించినపుడు శేషము 8. అట్టి సంఖ్యలు ఎన్ని ఉండగలవు? వాటికి సంబంధమేమి?

20. (a) ఒక సంఖ్యల శ్రేణిలో దేనినైన 6, 8 లలో ఒకదానిచే భాగించిన, క్రమముగ 1, 3 లు శేషములు. ఆ శ్రేణి 24 చొప్పున పెరుగునది అని నిరూపింపుము. ఆ శ్రేణిలో అధమసంఖ్య కట్టుము.

(b) ఒక సంఖ్యల శ్రేణిలో దేనినైన 4, 6 లలో ఒకదానిచే భాగించిన, క్రమముగ 3, 5 లు శేషములు. ఆ శ్రేణి కట్టుము.

21. (a) కొంతమంది పిల్లలను 22 ఏసి చొప్పున గుంపులుగా విడదీయవచ్చును. వారినే 24 ఏసి చొప్పునగాని, 16 ఏసి చొప్పునగాని విడదీసినచో, రెండు విధములను కూడా, ఇద్దరు దిగడిపోవుదురు. ఆ పిల్లలు అధమము ఎందరు?

(b) కొన్ని కొబ్బరికాయలను 38 చొప్పున లాట్లు పెట్టవచ్చును. వాటినే 48 చొప్పునగాని, 30 చొప్పునగాని లాట్లు పెట్టినచో, ఏ విధముననైనను సరె, 2 దిగడిపోవును. ఆ కొబ్బరికాయలు అధమము ఎన్ని?

22. ఈ క్రిందివాటికి క. సా. గు. కట్టుము:—

(a) a^3, a^2b, b^3, ab^2.
(b) a^2bc, ab^2c, abc^2, x^2ya^2, x^2yb^2, x^2zc^3.
(c) $4x^3y$, $8xy^3$, $9x^2y^2$, $10y^2z^3$, $12y^3z^2$, $15y^2z^2u$.
(d) $5p^3q^3r^4$, $10p^4q^8r^6$, $15p^8q^6r^8$, $20p^2x^2l^2$, $25q^2y^2m^2$.
(e) $6k^2m^2n^8$, $12k^3mn^2$, $24kp^3q^2r^2m$, $30kp^4q^2r^2m$.

23. ఈ క్రిందివాటికి, ఏ పద్ధతినైనను సరె, క. సా. గు. కట్టుము:—

(a) 18, 20, 24, 36, 42, 64.
(b) 115, 176, 69, 253.
(c) 150, 265, 225, 285, 255.
(d) 58, 87, 203, 348, 464.

24. ఒక కుర్రవాడు 16, 24, 39, 36 లకు క. సా. గు. ఇట్లు కట్టినాడు:—

$$\begin{array}{r|llll} 6 & 16, & 24, & 39, & 36 \\ \hline 2 & 16, & \not{4}, & 39, & 6 \\ \hline & 8, & & 39, & \not{3} \end{array}$$

$\therefore$ క. సా. గు. $=6\times2\times8\times39$
$=96\times39$
$=3744.$

వచ్చిన ఫలితము సరియేనా? కానిచో, న్యాసములో తప్పు ఎంచుము.

25. 4158, 7084 లకు గ. సా. ప్ర. కట్టి, తద్వారా క. సా. గు. కట్టుము:—

26. రెండు సంఖ్యల లబ్ధము 384. వాటి గ. సా. ప్ర. 8. వాటి క. సా. గు. కట్టుము.

27. 9 గాలనులును, 6 గాలనులును పట్టు రెండు చేదలు నీటితో నిండి ఉన్నవి. మహా అయితే ఏ కొలతతో వీటిలోని నీళ్లు కొన్ని నిండుసార్లు తోడి ఒక తొట్టిలో పోయగలము? ఈ రెండిటిలో ఒకదానితో కొన్ని నిండుసార్లు పోసి నింపవలెనన్న అధమము ఎంత ఘనముగల తొట్టి సరిపోవును? చేదలతో తొట్టి నింపుటకు బదులు కొలతతో నింపిన, అది ఎన్నేని సార్లు పట్టును?

28. రెండు సంఖ్యల గ. సా. ప్ర. 44, క. సా. గు. 1848. ఈ షరతులను పాటించు సంఖ్యల జతలనన్నిటిని కట్టుము.

29. రెండు సంఖ్యల గ. సా. ప్ర. 24, క. సా. గు. 288. సంఖ్యలను కట్టుము. వాటి మొత్తము 168 అయినచో, వాటిని కట్టుము.

30. గ. సా. ప్ర. 13 ను, క. సా. గు. 1365 ను గల మూడు సంఖ్యలను కట్టుము.

31. (a) మూడు సంఖ్యల గ. సా. ప్ర. 44, వాటి క. సా. గు. 3960. ఆ సంఖ్యలలో రెండు 220, 264 లు. మూడవది కట్టుము.

(b) మూడు సంఖ్యల గ. సా. ప్ర. 13, వాటి క. సా. గు. 125580. ఆ సంఖ్యలలో రెండు 260, 273 లు. మూడవది కట్టుము.

32. (a) రెండు సంఖ్యల క. సా. గు., వాటి గ. సా. ప్ర. కి 30 రెట్లు. గ. సా. ప్ర. క. సా. గు. ల మొత్తము 372. ఒక సంఖ్య 60. రెండవది కట్టుము.

(b) రెండు సంఖ్యల క. సా. గు., వాటి గ. సా. ప్ర. కి 20 రెట్లు. గ. సా. ప్ర. క. సా. గు. ల భేదా 399. ఒక సంఖ్య 84. రెండవది కట్టుము.

33. (a) 234 గ. సా. ప్ర. గాను, 41184 క. సా. గు. గాను గల నాలుగంకెల సంఖ్యలు రెండును ఏవేవి?

(b) 23 గ. సా. ప్ర. గాను, 1288 క. సా. గు. గాను గల మూడంకెల సంఖ్యలు రెండును ఏవేవి?

34. (a) రెండు సంఖ్యలయొక్క గ. సా. ప్ర., క. సా. గు. ల లబ్ధము 6144. క. సా. గు. ను, గ. సా. ప్ర. చే భాగించునప్పటి భాజితము 6. సంఖ్యలు కట్టుము.

(b) రెండు సంఖ్యలయొక్క గ. సా. ప్ర., క. సా. గు. ల లబ్ధము 1805. క. సా. గు. ను, గ. సా. ప్ర. చే భాగించునప్పటి భాజితము 5. సంఖ్యలు కట్టుము.

35. (a) రెండు సంఖ్యల గ. సా. ప్ర. 21, వాటి క. సా. గు. 2415. ఆ సంఖ్యలను (1) రెండంతలు చేసినప్పుడును, (2) మూడంతలు చేసినప్పుడును ఏర్పడు జనసంఖ్యల గ. సా. ప్ర. క. సా. గు. లను, అసలు సంఖ్యలు వేరుగ తెలియనక్కరలేకయే, కట్టుము.

(b) ఈ లెక్క (a) లో, ఆ సంఖ్యలను (1) వర్గించినపుడును, (2) ఘనించినపుడును ఏర్పడు జనసంఖ్యల గ. సా. ప్ర. క. సా. గు. లను, అసలు సంఖ్యలు వేరుగ తెలియనక్కరలేకయే, కట్టుము.

36. రెండు సంఖ్యల లబ్ధము వాటి క. సా. గు., గ. సా. ప్ర. ల లబ్ధమునకు సమానము. ఈ సూత్రమే మూడు సంఖ్యలనుకూడ వర్తింపవలయునన్న నిట్లగును.

మూడు సంఖ్యల క. సా. గు. =

$$\frac{\text{మూడు సంఖ్యల లబ్ధము} \times \text{మూడు సంఖ్యల గ. సా. ప్ర.}}{\text{సంఖ్యలను వీలైనన్ని మోస్తర్లుగా రెండేసి తీసికొని కట్టగా వచ్చిన గ. సా. ప్ర. ల లబ్ధము.}}$$

75, 105, 120 అను సంఖ్యలతో ఈ సూత్రము సరిచూపుము.

అధ్యాయము III.

భిన్నాంకములు.

5. లవము స్థిరమగునప్పుడు, ఒక భిన్నము విలువ, హారము పెరిగిన, తరిగిపోవును; హారము తరిగిన పెరిగిపోవును. అటులనే హారము స్థిరమగునప్పుడు భిన్నము విలువ లవము పెరిగిన పెరుగును, లవము తరిగిన తరుగును.

ఉదా. $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, $\frac{4}{5} > \frac{4}{6}$, కాని. $\frac{2}{7} < \frac{3}{7}$, $\frac{7}{8} > \frac{5}{8}$. లవహారములు రెండును చలించెడి ఒక **భిన్నమునకు, మహత్తమఫలము**, లవము మహత్తమమై హారము న్యూనతమమైనప్పుడే. అటులనే, లవహారములు రెండును చలించెడి ఒక **భిన్నమునకు అధమఫలము**, లవము న్యూనతమమై హారము మహత్తమమైనప్పుడే.

ఉదా. 1. 6, 2, 3, 4 లలో అన్నిటిని పుచ్చుకొనగా వచ్చిన సంఖ్య లవముగను, 8, 2, 9, 6 లలో అన్నిటిని పుచ్చుకొనగా వచ్చిన సంఖ్య హారముగను గల మహత్తమ, అధమ, భిన్నములను కట్టుము

న్యాసము:—

$$\text{మహత్తమ భిన్నము} = \frac{\text{మహత్తమ లవము}}{\text{అధమ హారము}} = \frac{6432}{2689}.$$ ఏమన, 6, 4, 3, 2 లతో ఏర్పరచగల మహత్తమసంఖ్య 6432; 2, 6, 8, 9 లతో ఏర్పరచగల అధమసంఖ్య 2689.

$$\text{అట్లే, అధమ భిన్నము} = \frac{\text{అధమ లవము}}{\text{మహత్తమ హారము}} = \frac{2346}{9862}.$$

ఉదా. 2. $\dfrac{1}{2+\dfrac{3}{4-\frac{1}{6}}}$ కట్టుము.

$$\frac{1}{2+\dfrac{3}{4-\frac{1}{6}}} = \frac{1}{2+\dfrac{3}{3\frac{5}{6}}} = \frac{1}{2+\dfrac{3}{\frac{23}{6}}} = \frac{1}{2+\frac{3}{1}\times\frac{6}{23}} = \frac{1}{2+\frac{18}{23}} = \frac{1}{2\frac{18}{23}}$$

$$= \frac{1}{\frac{64}{23}} = \frac{1}{1}\times\frac{23}{64} = \frac{23}{64}.$$

ఇచ్చిన లెక్కను $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}$ అని కూడ వ్రాయవచ్చును. అప్పుడది "అసంపూర్ణ భిన్నము" అనిపించుకొనును.

6. భిన్నముల గ. సా. ప్ర.

ఉదా. 3. $\frac{2}{15}, \frac{6}{35}, \frac{8}{10}$ ల గ. సా. ప్ర. కట్టుము.

దత్తభిన్నముల గ. సా. ప్ర. $\frac{x}{y}$ అనుకో. అప్పుడు $\frac{2}{15}$ ను $\frac{x}{y}$ చేత భాగించినచో పూర్ణాంక భాజితము రావలయును. అనగా, $\frac{2}{15}\times\frac{y}{x}$ ఒక పూర్ణాంకము కావలయును.

అనగా y, 15 చే భాజనీయము కావలెను. (1)
మరి 2, x ,, ,, ,, (2)
అట్లే y, 11 ,, ,, ,, (3) } రెండవదియైన $\frac{6}{11}$ ను
మరి 6, x ,, ,, ,, (4) } విచారణచేసినచో.
అట్లే y, 10 ,, ,, ,, (5) } మూడవదియైన $\frac{9}{10}$ ను
మరి 9, x ,, ,, ,, (6) } విచారణచేసినచో.

$\frac{x}{y}$ గరిష్ఠ సామాన్య ప్రమాణమగుటకు, లవమైన x మహత్తమమును. హారమైన y అధమమును కావలెను.

∴ (1), (3), (5) లనుబట్టి y 15, 11, 10 లచే భాజనీయమై, అధమము కావలె. కాబట్టి, y 15, 11, 10 ల క. సా. గు.

పైగా, (2), (4), (6) లనుబట్టి, x, 2, 6, 9 లకు సామాన్య ప్రమాణమై మహత్తమము కావలె.

కాబట్టి, x, 2, 6, 9 లకు గ. సా. ప్ర.

∴ **కొన్ని భిన్నముల గ. సా. ప్ర.** $=\frac{x}{y}=\frac{\text{వాటి లవముల గ. సా. ప్ర.}}{\text{వాటి హారములు క. సా. గు.}}$

∴ లెక్క ఫలితము $=\frac{\text{2, 6, 9 ల గ. సా. ప్ర.}}{\text{15, 11, 10 ల క. సా. గు.}}=\frac{1}{330}.$

7. భిన్నముల క. సా. గు.

ఉదా. 4. $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{19}{20}$ ల క. సా. గు. కట్టుము.

దత్తభిన్నముల క. సా. గు. $\frac{x}{y}$ అనుకో. అప్పుడు $\frac{x}{y}$ ని $\frac{3}{8}$ చే భాగించినచో పూర్ణాంక భాజితము రావలయును. అనగా, $\frac{x}{y}\times\frac{8}{3}$ ఒక పూర్ణాంకము కావలెను.

x, 3 చే భాజనీయము కావలెను. (1)
మరి 8, y ,, ,, ,, (2)
అట్లే x, 9 ,, ,, ,, (3) } రెండవదియైన $\frac{9}{10}$ ని
10, y ,, ,, ,, (4) } విచారణచేసినచో.
x, 19 ,, ,, ,, (5) } మూడవదియైన $\frac{19}{20}$ ని
20, y ,, ,, ,, (6) } విచారణచేసినచో.

$\frac{x}{y}$ కనిష్ఠసామాన్య గుణిజమగుటకు, లవమైన x అధమమును, హారమైన y మహత్తమమును కావలెను.

∴ (1), (3), (5) లనుబట్టి x 3, 9, 19 లచే భాజనీయమై, అధమము కావలె.

కాబట్టి, x, 3, 9, 19 ల క. సా. గు.

పైగా, (2), (4), (6) లనుబట్టి y 8, 10, 20 లకు సామాన్య ప్రమాణమై, మహత్తమము కావలె. కాబట్టి, y 8, 10, 20 లకు గ. సా. ప్ర.

∴ **కొన్ని భిన్నముల క. సా. గు.** $=\frac{x}{y}=\frac{\text{వాటి లవముల క. సా. గు.}}{\text{వాటి హారముల గ. సా. ప్ర.}}$

∴ లెక్క ఫలితము $=\frac{\text{3, 9, 19 ల క. సా. గు.}}{\text{8, 10, 20 ల గ. సా. ప్ర.}}=\frac{171}{2}=85\frac{1}{2}.$

ఉదా. 5. ఎంత ఇంగ్లీషు సొమ్ముతో కొన్ని నిండు రూపాయలుగాని, లేక కొన్ని నిండు డాలర్లుగాని పుచ్చుకొనవచ్చును? 1 రూ. = 1 షి. 4 పె., మరి, 1 డాలరు = 3 షి. 9 పె.

న్యాసము:—

1 రూ. $=\frac{4}{3}$ షి.; 1 డా $=\frac{15}{4}$ షి.

కట్టవలసిన సొమ్ము $=\frac{4}{3}$ షి. $\frac{15}{4}$ షి. ల క. సా. గు.

$=\frac{\text{లవముల క. సా. గు.}}{\text{హారముల గ. సా. ప్ర.}}=\frac{60}{1}$ షి. $=3$ పౌ.

బుజావు:—3 పౌనులకును, $\frac{60}{\frac{4}{3}} = 60 \times \frac{3}{4} = 45$ రూపాయలైన,

$\frac{60}{\frac{15}{4}} = 60 \times \frac{4}{15} = 16$ డాలరులైన, నిచ్చును.

8. వంతులు (ఏకాంశములు.)

రెండు రాసుల సంబంధమును తెల్పెడి భిన్నమునయొక్క లవ మెప్పుడును ఒకటి అగుచుండిన, అట్టి భిన్నమే "వంతు" అనిపించుకొనును.

ఉదా.

$1\frac{1}{2}$ పై. $= \frac{3}{2 \times 192}$ రూ. $= \frac{1}{128}$ రూ.

2 పై. $= \frac{2}{192}$ రూ. $= \frac{1}{96}$ రూ.

3 పై. $= \frac{3}{192}$ రూ. $= \frac{1}{64}$ రూ.

4 పై. $= \frac{4}{192}$ రూ. $= \frac{1}{48}$ రూ.

6 పై. $= \frac{6}{192}$ రూ. $= \frac{1}{32}$ రూ.

8 పై. $= \frac{8}{192}$ రూ. $= \frac{1}{24}$ రూ.

1 అ. $= \frac{1}{16}$ రూ.

1 అ. 4 పై. $= \frac{16}{192}$ రూ. $= \frac{1}{12}$ రూ.

2 అ. $= \frac{2}{16}$ రూ. $= \frac{1}{8}$ రూ.

2 అ. 8 పై. $= \frac{2}{12}$ రూ. $= \frac{1}{6}$ రూ.

4 అ. $= \frac{4}{16}$ రూ. $= \frac{1}{4}$ రూ.

5 అ. 4 పై. $= \frac{64}{192}$ రూ. $= \frac{1}{3}$ రూ.

8 అ. $= \frac{8}{16}$ రూ. $= \frac{1}{2}$ రూ.

∵ 1 రూ. = 192 పైసలు గనుక, 192 నకు కారణాంకమైన ప్రతి సంఖ్యయు ఒక "వంతు" నిచ్చును.

1 పె. $= \frac{1}{240}$ పౌ.

2 పె. $= \frac{2}{240}$ పౌ. $= \frac{1}{120}$ పౌ.

3 పె. $= \frac{3}{240}$ పౌ. $= \frac{1}{80}$ పౌ.

4 పె. $= \frac{4}{240}$ పౌ. $= \frac{1}{60}$ పౌ.

5 పె. $= \frac{5}{240}$ పౌ. $= \frac{1}{48}$ పౌ.

6 పె. $= \frac{6}{240}$ పౌ. $= \frac{1}{40}$ పౌ.

8 పె. $= \frac{8}{240}$ పౌ. $= \frac{1}{30}$ పౌ.

10 పె. $= \frac{10}{240}$ పౌ. $= \frac{1}{24}$ పౌ.

1 షి. $= \frac{12}{240}$ పౌ. $= \frac{1}{20}$ పౌ.

1 షి. 3 పె. $= \frac{15}{240}$ పౌ. $= \frac{1}{16}$ పౌ.

1 షి. 4 పె. $= \frac{16}{240}$ పౌ. $= \frac{1}{15}$ పౌ.

1 షి. 8 పె. $= \frac{20}{240}$ పౌ. $= \frac{1}{12}$ పౌ.

2 షి. $= \frac{2}{20}$ పౌ. $= \frac{1}{10}$ పౌ.

2 షి. 6 పె. $= \frac{5}{2 \times 20}$ పౌ. $= \frac{1}{8}$ పౌ.

4 షి. $= \frac{4}{20}$ పౌ. $= \frac{1}{5}$ పౌ.

5 షి. $= \frac{5}{20}$ పౌ. $= \frac{1}{4}$ పౌ.

6 షి. 8 పె. $= \frac{6\frac{2}{3}}{20}$ పౌ. $= \frac{20}{3 \times 20}$ పౌ. $= \frac{1}{3}$ పౌ.

10 షి. $\frac{10}{20}$ పౌ. $= \frac{1}{2}$ పౌ.

ఉదా. 6. వస్తువు రూ. 2—14—8 చొప్పున 1460 వస్తువుల ఖరీదు కట్టుము.

న్యాసము:—

	రూ.	అ.	పై.	
	1460	0	0	= ఒకొక్కటి 1 రూ. చొప్పున 1460 వస్తువుల ఖరీదు.
			2	
	2920	0	0	= ,, 2 రూ. ,,
8 అ. = $\frac{1}{2}$ రూ.	730	0	0	= ,, 8 అ. ,,
4 అ. = $\frac{1}{2}$ (8 అ.)	365	0	0	= ,, 4 అ. ,,
2 అ. 8 పై. = $\frac{1}{6}$ రూ.	243	5	4	= ,, 2 అ. 8 పై.
	4258	5	4	= ,, రూ. 2–14–8

(కూడినచో)

అన్యథా:—

	రూ.	అ.	పై.	
	1460	0	0	= ఒకొక్కటి 1 రూ. చొప్పున 1460 వస్తువుల ఖరీదు.
			3	
	4380	0	0	= ,, 3 రూ. ,,
1 అ. 4 పై. = $\frac{1}{12}$ రూ.	121	10	8	= ,, 1 అ. 4 పై.
	4258	5	4	= ,, రూ. 2–14–8

(తీసివేసినచో)

ఉదా. 7. బారువ 1-కి రూ. 50—6—0 చొప్పున 5 బా. 12 మ 6 వీ సెల పురపకాయల ఖరీదు కట్టుము.

	రూ.	అ.	పై.	
	50	6	0	= 1 బారువ ఖరీదు.
			5	
	251	14	0	= 5 బారువల ,,
10 మ. = బారువలో $\frac{1}{2}$.	25	3	0	= 10 మణుగుల ,,
2 మ. = 10 మ.లో $\frac{1}{5}$.	5	0	$7\frac{1}{5}$	= 2 మ. ,,
4 వీ. = 2 మ.లో $\frac{1}{4}$.	1	4	$1\frac{4}{5}$	= 4 వీ. ,,
2 వీ. = 4 వీ.లో $\frac{1}{2}$.	0	10	$0\frac{9}{10}$	= 2 వీ. ,,
	283	15	$9\frac{9}{10}$	= 5 బా. 12 మ. 6 వీ. ఖరీదు.
లేక	283	15	10	

ఉదా. (6) సామాన్య వ్యావహారిక పద్ధతికి మాదిరి.

ఉదా. (7) మిశ్రమ వ్యావహారిక పద్ధతికి మాదిరి.

అభ్యాసము 3.

1. ఈ క్రిందివాటిలో లోటుగా ఉన్న సంఖ్యలను కట్టుము:—

(a) $\frac{8}{9}=\frac{?}{36}$; (b) $\frac{?}{20}=\frac{45}{60}$; (c) $\frac{39}{?}=\frac{13}{16}$; (d) $\frac{15}{6}=\frac{45}{?}$.

2. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. $a=8$, $b=10$ అని తెలిసి, ఇచ్చిన సామ్యమును నిలబెట్టెడి మూడు జోతల విలువలను c, d లకు ఇమ్ము.

3. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{4}{5}$. $a=12$, $c=32$, $e=40$ అని తెలిసి, అప్పటి b, d, f ల విలువలను కట్టుము.

4. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ అని తెలిసినప్పుడు, ఇందులో ప్రతి భిన్నము $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ అని గ్రహింపుము. $a=5$, $b=13$ అనుకొని, c, d, e, f లకు భర్జించెడి విలువలు నీ చిత్తముచొప్పున ఇమ్ము. ఇచ్చి, ఇట్లు విశిష్టములైన విలువలకు పై నాలుగు భిన్నములును సామ్యములని నిరూపింపుము.

5. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ అని తెలిసినప్పుడు, ఇందులో ఒకొక్క భిన్నము $=\frac{a-c}{b-d}$ అని గ్రహింపుము. $a=16$, $b=20$ అనుకొని, c, d లకు భర్జించెడి విలువల నిచ్చి, ఆయా విలువలకు పై మూడు భిన్నములును సామ్యములని నిరూపింపుము.

6. $\frac{10}{18}$ అను భిన్నమును తీసికొని, లవమునకు 2 ను హారమునకు 2 ను కలుపుము. ఇప్పటి భిన్నమును $\frac{10}{18}$ తో పోల్చి, తేడా కట్టుము. ఇట్లే, మరి రెండు ఇతర భిన్నములతో చేయుము. సామాన్యముగ, $\frac{a}{b}$, $\frac{a+x}{b+x}$ (x ఒక ధనాత్మక పూర్ణాంకము) అను భిన్నములగురించి నీ వేమి ఊహింపగలవు?

7. $\frac{16}{23}$ అను భిన్నమును తీసికొని, దాని పదములనుండి (అనగా లవ హారములనుండి) 4 ను తీసివేయుము. ఇప్పటి భిన్నమును $\frac{16}{23}$ తో పోల్చుము. ఇట్లే మరి రెండు మూడు భిన్నములతో చేయుము. సామాన్యముగ, $\frac{a}{b}$, $\frac{a-x}{b-x}$ అను భిన్నములగురించి, x, a, b ల కంటె తక్కువైన ధనాత్మక పూర్ణాంకమైనప్పుడు, నీ వేమి ఊహింపగలవు?

8. $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{11}$ అను భిన్నములలో మహత్తమ భిన్నమేది? అధమమేది? $\frac{3+6+8}{4+7+11}$ అను భిన్నము, పైన కట్టిన మహత్తమ, అధమ భిన్నముల సందుది అని నిరూపింపుము.

9. 6, 8, 4, 3 లు అను నాలుగంకెలతోడను లవహారములు ఏర్పరుపగా వచ్చెడు మహత్తమ, అధమ భిన్నములను కట్టుము.

10. 6, 3, 8, 2 లలో మూడింటిచే మాత్రమే లవమును, 7, 8, 9, 5 లలో మూడింటిచే మాత్రమే హారమును ఏర్పరుపగా వచ్చెడు మహత్తమ, అధమ భిన్నములను కట్టుము.

11. లోతునకు దిగినచో, భూమి స్వభావము ఎట్లుండునో అని ఒక చోట ఒక గొయ్యి త్రవ్వి చూచినారు. ఉపరిభాగమునుండి, త్రవ్విన మొత్తములో, $\frac{1}{8}$ వరకు మట్టి; అక్కడనుండి $\frac{1}{12}$ ఇటుకలమయము; తరువాత $\frac{1}{6}$ ఇసుక; పిదప $\frac{1}{9}$ సుద్ది; మిగత గట్టి రాంపి. గట్టి రాంపి లోతు 1 అ. 9 అం. అయినచో, గొయ్యి లోతును, ఒకొక్క రకపు భూమి లోతును కట్టుము.

12. 500 గ. పొడుగును 400 గ. వెడల్పునుగల ఒక పొలము ఇద్దరు అన్నదమ్ములకు పంచవలయును. ఇందుకు, పటముగీసి, మానము తెలిపి ఎన్ని విధముల చేయవచ్చునో చెప్పుము.

13. ఒక నలుచదరపు గది భుజము 30 అ. దానికి, 5 అ. భుజముగల 4 నలుచదరపు కడపరాళ్లు నాలుగు మూలలా ఉన్నవి. మిగత వైశాల్యము గదిలో ఎంత భిన్నము?

14. $14' \times 10'$ అయిన ఒక గది గోడలకు, అడుగునుండి ఎత్తులో $\frac{1}{4}$ వరకు ఆకుపచ్చరంగును, మిగిలిన ఎత్తులో $\frac{1}{3}$, అక్కడనుండి నీలకాషాయరంగును, తక్కినమట్టునకు లోహపు తెలుపును వేసినారు. లోహపు తెలుపునకు, వంద చ. అ. లకును రూ. 3—2—0 చొప్పున, రూ. 7—8—0 అయినది. గది ఎత్తును, వివిధరంగుల మేరలును కట్టుము.

15. ఒకడు, ఒక నెలలో, తన రాబడిలో $\frac{5}{102}$ రాబడి పన్నునకును, $\frac{5}{48}$ విద్యాధనానికిని, $\frac{1}{8}$ బట్టలవానికిని, $\frac{5}{48}$ వైద్యునికిని, 50 రూ. ఇంటిపన్నునకును ఇవ్వగా ప్రాప్తము 83 రూ. ఉండెను. వాని రాబడి కట్టుము.

16. కొందరు స్నేహితులు కొంత సొమ్ము పట్టుకొని సరదాగా షికారు తిరుగుటకు బయలుదేరిరి, దానిలో $\frac{1}{4}$ కాఫీ హోటలుసకును, $\frac{1}{5}$ దారి ఖర్చులకును, మిగిలిన దానిలో $\frac{3}{4}$ పడవ తోటకును కాజేసిరి. ఒక ఇంటికి దారితీయ వలెనని వారు సంకల్పించుకొనగా, దారి ఖర్చులకు 2 అ. తక్కువగునట్లు కన్పించెను. వచ్చేటప్పటికంటె వెళ్లేటప్పుడు దారి ఖర్చులు $1\frac{1}{2}$ రెట్లు అయి ఉండిన, వారు ఎంత సొమ్ము పట్టుకొని బయలుదేరిరి?

17. ఒక కాలేజీ క్లాసులో ఉన్నవారిలో $\frac{2}{3}$ బ్రాహ్మణేతరులు, మిగతలో మహమ్మదీయులు, మిగతలో $\frac{1}{6}$ కిరస్తానీలు, తక్కినవారు బ్రాహ్మణులు. బ్రాహ్మణులు 24 మంది. క్లాసులో ఉన్నది ఎందరు?

18. ఒక మనుష్యుడు తన ప్రయాణములో $\frac{2}{3}$ మోటారుమీదను, మిగతలో $\frac{5}{7}$ రైలుమీదను, తక్కిన దూరము రెండెడ్లబండిమీదను వెళ్లినాడు. ప్రయాణములో ఈ చివరభాగము 4 మై. మొత్తము దూరమును, తక్కినభాగములను కట్టుము.

19. ఒక భాండాగారములో ఉన్న పుస్తకములలో $\frac{1}{6}$ గణితము, మిగతలో $\frac{3}{8}$ కేవల కల్పనాకథలు, ఆ మిగతలో $\frac{4}{9}$ చరిత్ర, తక్కినవి రసాయనాదిశాస్త్రములు. ఈ స్థితిలో, ఆ భాండాగారములో అధమము ఎన్ని స్వరూపములుండవలెను?

20. A కొన్ని రూపాయలు B కి, అందులో $\frac{3}{4}$ C కి, C కి ఇచ్చిన దానిలో $\frac{2}{3}$, D కిని ఇవ్వగా, C కంటె D కి 100 రూ. తక్కువ వచ్చెను. B, C, D లకు A ఎంత ఇచ్చెను?

21. ఒక మనుష్యుడు ఒక రేటుచొప్పున కొన్ని ఆవుపాలను, ఆ రేటునకు $1\frac{1}{2}$ రెట్లుచొప్పున ఆ పాలలో $\frac{3}{4}$ గేదెపాలును, కొని కలిపి పైవచ్చు, అందులో మొత్తము $\frac{1}{4}$ భాగము మంచి తీర్థముపోసి, పడి 6 అ. 6 పై. చేసి అమ్మి, పడి 1-కి 6 పై. లాభము తీసినాడు. వానికి వచ్చిన మొత్తపు లాభము 8 అ. అయితే, ఏ రకము పాలు ఎన్ని, ఏయే రేటుచొప్పున కొనినాడు?

22. A వద్ద కొంత ఉన్నది, దానిలో $\frac{3}{4}$ కంటె 50 రూ. B వద్ద ఎక్కువ ఉన్నది. A వద్ద ఉన్నదానిలో $\frac{2}{5}$ కంటె 25 రూ. C వద్ద తక్కువ ఉన్నది, B, [illegible] ల వద్ద కలిపి 395 రూ. ఉన్నది. ఒకొక్కనివద్ద ఎంత సొమ్మున్నది?

23. ఒక దివాలాదారు A కి 2040 రూ., B కి 3740 రూ., C కి 5525 రూ., మరిదికి 7990 రూ. బాకీ. వాని ఆస్తి అంతా కలిపి 1135 రూ. ఉన్నదానిలో ఏయే భాగము ఋణదాతలకు వచ్చును? ఒకొక్కనికి ఎంతెంత కిట్టును?

24. ఒక రకపు కంచులో, రాగి 80, తుత్తనాగము 15, తగరము 5 పాళ్లు. 25 పౌ. తూగు కంచు బిందెలో ఏ లోహము ఎంత ఎత్తు ఉండును?

25. ఒక పని, A 7, B 8, C 9, గంటలలో చేయగలరు. అట్టి పనిని A 2 గం. చేసి వెళ్లగా, B వచ్చి దానిని 3 గం. సాగించి వెళ్లగా, C వచ్చి దానిని సాగించి ముగించెను. C చేసిన పని ఎంత? ఎంతసేపు చేసినాడు?

26. ఒక పని AB లు 10, BC లు దానినే 12, CA లు దానినే 16, రోజులలో ముగింపగలరు. ఒకొక్కడే దానిని ఎన్నాళ్లలో ముగింపగలడు?

27. ఒక పని ABC లు 20, BCD లు దానినే 28, CDA లు దానినే 24, DAB లు దానినే 32, రోజులలో ముగింపగలరు. ఒకొక్కడే దానిని ఎన్నాళ్లలో ముగింపగలడు?

28. ఒక తొట్టిని నీళ్లతో నింపుటకు ఒక పైపుతిప్పిన 4 గంటలును, రెండవది తిప్పిన 5 గంటలును చాలు. నిండుతొట్టిని ఖాళీచేయుటకు మూడవది తిప్పిన 3 గంటలు పట్టును. తొట్టి ఖాళీగా ఉండగా, ప్రొద్దుట ఏడింటికి మూడింటిని కూడ వదలినచో, తొట్టి ఎప్పుడు భర్తీ అగును?

29. ఒక తొట్టిని నీళ్లతో నింపుటకు A అను పైపునకు 4 గంటలును, B అను దానికి 5 గంటలును పట్టును. ప్రతి గంట తరువాతను A ను 3 నిమిషములును B ని 4 నిమిషములను మూసివేయవలెను. తొట్టి ఖాళీగా ఉండగా, ప్రొద్దుట ఆరింటికి A, B లను వదలినచో, ఎప్పట్లో తొట్టి నిండును?

30. ఒక దారము అసమముగా రెండు ముక్కలైనది. ఒక ముక్క 40 అ. దీర్ఘతరము. దానికిని అసలు దారములో సగమునకును భేదా ఎంత?

31. A, D, B, C లు నాలుగు మైలు రాళ్లు (వరుసవి కావు). D, AB ల సందుది. C నుండి AB ల దూరముల మొత్తము 12 మైళ్లు. DC ల ఎడము కట్టుము.

32. (a) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$ లో $\dfrac{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}+3\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{4}$.

(b) $2\frac{1}{5}$ లో $8\frac{1}{3}+4\frac{2}{3}\times 1\frac{2}{7}-\frac{3}{8}\div 1\frac{1}{4}$.

(c) $8\frac{2}{3}\times 1\frac{2}{13}+\frac{5}{8}$ లో $1\frac{7}{9}-\frac{3}{8}$ లో $\dfrac{1}{2\frac{1}{5}}$.

(d) $16\frac{1}{8} \div 3\frac{10}{11} + 8\frac{1}{2} \div 5\frac{2}{3} - 4\frac{2}{7} \times 1\frac{1}{6}$.

(e) $3 + \dfrac{\frac{1}{2}}{8 + \dfrac{6}{4+\frac{1}{8}}}$

(f) $\dfrac{8\frac{2}{5}}{4\frac{2}{3}} + \dfrac{1\frac{1}{8}}{1\frac{1}{2}}$ లో $\dfrac{3\frac{2}{5}}{13\frac{3}{5}} \div \dfrac{8\frac{2}{9}}{7\frac{2}{5}}$.

(g) $\dfrac{\text{పౌ. } 15\text{–}6\text{–}8}{\text{పౌ. } 20\text{–}13\text{–}4} - \dfrac{11 \text{ అ. } 8 \text{ అం.}}{17 \text{ అ. } 4 \text{ అం.}}$.

(h) $\dfrac{12 \text{ x. } 2 \text{ అ. } 9 \text{ అం.}}{7 \text{ x. } 2 \text{ అ. } 3 \text{ అం.}} \div \dfrac{3 \text{ హం. } 2 \text{ క్వా.}}{1 \text{ హం. } 3 \text{ క్వా.}}$.

అను వాటిని సూక్ష్మము చేయుము.

33. (a) $4 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2}$.

(b) $2 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{6}$.

అను వాటిని సూక్ష్మము చేయుము.

34. వ్యావహారిక పద్ధతిని ఇవి కట్టుము:—

(a) డజను రూ. 1–8–0 చొప్పున 2 గ్రోసుల నీలిరంగు పెనసళ్ల ఖరీదు.

(b) రీము రూ. 5–15–6 చొప్పున 79 రీముల కాగితపు ఖరీదు.

(c) మణుగు రూ. 2–3–6 చొప్పున 36 పుట్లు 4 మ. 6 సే. ఉల్లి పాయల ఖరీదు.

(d) టన్ను 1,250 రూ. చొప్పున 20 ట. 12 హం. 84 పౌ. గట్టి సామగ్రి ఖరీదు.

35. (a) పౌ. 467–6–8 లో $\frac{19}{20}$ కట్టుటకు "$\frac{19}{20} = 1 - \frac{1}{20}$" అను సామ్యమును వాడుము.

(b) రూ. 2,838–5–4 లో $\frac{15}{16}$ కట్టుటకు "$\frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16}$" అను సామ్యమును వాడుము.

36. (a) 32 అ. 6 అంగుళములకు $1\frac{13}{72}$ రెట్లు కట్టుటకు "$\frac{1}{8} + \frac{1}{18} = \frac{13}{72}$" అను సారూప్యమును వాడుము.

(b) $\pi = 3\frac{1}{7}$ అని తెలిసి, $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{176}$ అని నిరూపింపుము.

ఈ సంగతి వాడి $\frac{1}{\pi} \times 8756$ గజములు అన్నది సూక్ష్మము చేయుము.

37. ఈ క్రిందివాటిలోని భిన్నములను విలువనుబట్టి తగ్గుక్రమములో సర్దుము:—

(a) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12}, \frac{23}{24}$.

(b) $\frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{11}{18}, \frac{13}{24}$.

38. ఈ క్రిందివాటిలోని భిన్నములను విలువనుబట్టి హెచ్చుక్రమములో సర్దుము:—

(a) $\frac{7}{15}, \frac{5}{21}, \frac{11}{24}, \frac{13}{27}, \frac{14}{35}$.

(b) $\frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{21}{32}, \frac{14}{72}$.

39. ఒక జెమీందారుయొక్క ఆస్తిలో $\frac{1}{3}$ కుంభకోణములోను, $\frac{1}{2}$ తంజావూరులోను, తక్కినది తిరుచునాపల్లిలోను ఉండెను. అతడు యావదాస్తియు తన కొడుకులకు సమానముగా పంచిపెట్టగా, అతని ఆస్తి ఏయే భిన్నములుగ నుండెనో వాటి x. సా. ప్ర. యే ప్రతివానికిని వచ్చినట్లు తేలెను. అతనికి కొడుకులెందరు? మొత్తము జెమీ 3,30,000 రూ. చేసినచో, ఒకొక్కనికి ఏమి వచ్చెను?

40. ఒక లోలకము సెకనునకు 2 నిండు ఊపులును, రెండవది సెకనునకు 3 ను, మూడవది 2 సెకనులకు 5 ను, ఊగును. ఏకముగ మూడింటిని వదలినచో, ఎంతసేపటిలో మూడును కొన్ని కొన్ని అభిన్నములైన నిండు ఊపులు ఊగును?

41. (a) ఒక కొలతబద్దమీద ఒకవైపున అంగుళము 16 సమభాగములుగను, రెండవవైపున అడుగు 100 సమభాగములుగను విభజనగా తెలుపు గీతలున్నవి. ఒక చోట రెండువైపుల గీతలును ముఖాముఖిగా నున్నవి. మరల ఎంత దూరములో రెండు గీతలు అట్లుండును?

(b) ఒక కొలతబద్దమీద ఒకవైపున అంగుళములో $\frac{1}{12}$ ను తెలుపునవియు, ఒక చోట రెండవవైపున అంగుళములో $\frac{1}{18}$ ను తెలుపునవియు గీతలున్నవి. ఒక చోట రెండువైపుల గీతలును ఏకగీతగా అయిపోయినవి. ఇంక ఎక్కడెక్కడ అట్లే జరుగును?

42. (a) $1\frac{1}{2}$ మైళ్లు పరిధిగల ఒక వృత్తపథములో పరుగెత్తవలసిన పందెములో, 5 గురు ఏకముగ ఒక చోటనే బయలుదేరినారు. వారు, క్రమముగ,

2 ఏసి, 3 ఏసి, 4 ఏసి, 5 ఏసి, 6 ఏసి మైళ్లు గంటకు పరుగెత్తగలరు. మరల ఎంత త్వరలో వారు 5 గురును అక్కడికే రాగలరు?

(*b*) 2 మైళ్లు పరిధిగల వృత్తముమీద ఇద్దరు పరుగెత్తుచున్నారు. ఒకని రేటు నిమిషమునకు 330 గజములు, రెండవవానిది 264 గజములు. వారు ఒకే చోట ఒకే మాటు బయలుదేరి ఒకవైపునకే పరుగెత్తినచో, మరల ఎంత త్వరలో, ఆ చోటనే, ఒకవైపునకే తిరిగి, వారుండుట తటస్థించును?

43. 1 సామ్రాజ్యపు మణుగు $=82\frac{2}{7}$ పౌ. (ఎవాయిర్ డ్యుపోయ్); 1 మెద్రాసు మణుగు $=26\frac{2}{3}$ పౌ. (ఎవాయిర్) అని గ్రహింపుము. ఇట్టి పౌనులు అధమము ఎన్ని అయినచో పైనచెప్పిన మణుగు రకములలో కొన్ని కొన్ని నిండు మణుగులకు సమానమని చెప్పవచ్చు?

44. చంద్రుని మాసము $29\frac{1}{2}$ రోజులు, సూర్యునిది $30\frac{7}{16}$ రోజులు, జనులది 30 రోజులు. రోజులు అధమము ఎన్ని అయినచో, పైనచెప్పిన మాస రకములలో కొన్ని కొన్ని నిండు మాసములకు సమానమగునో కట్టుము.

45. ఈ క్రిందివాటికి గ. సా. ప్ర., క. సా. గు. లు కట్టుము:—

(*a*) $\frac{a^2x}{b^2y}$, $\frac{3a^3x^2}{4b^2c}$, $\frac{5a^3c^2y}{6bx}$, $\frac{10a^5b^4c^2}{21xy^2}$.

(*b*) $\frac{x^2yz}{b^2cd}$, $\frac{xyz^2}{bcd^2}$, $\frac{xy^2z^3}{bcd^5}$, $\frac{xy^4z^3p}{b^2c^3d^2a}$.

అధ్యాయము IV.

అవ్యక్తగణితము.

9. అంకగణిత ప్రశ్నలలో సంఖ్యలస్థానే వర్ణములు పెట్టినచో, ఆ ప్రశ్నలు అవ్యక్తములగును. ఫలితములన్నియు వర్ణమయమగును. అట్టి ఫలితములద్వారా, అదేమాదిరిగాని అటువంటి మాదిరిగాని ఉండి విలువలలో మాత్రము భేదించు రాసులుగల ప్రశ్నలకు అన్నింటికిని ఫలితములను చెప్పుట సులభమగును. వర్ణరాసులతోనున్న ప్రశ్నలు **అవ్యక్తగణితమనియు**, వాటి ఫలితములు **సంకేతసూత్రములనియు** అనిపించుకొనును.

ఉదా. 1. ఒక తొట్టి 3,250 గాలనుల నీళ్లు పట్టును. ప్రతి దినమును 75 గాలనులను అందుండి తోడివేసినచో, 4 రోజుల తరువాత, అందు ఎన్ని నీళ్లుండును?

న్యాసము:—

మిగులు నీళ్లు $=3250-4\times75$ గాలనులు.

ఇప్పుడు, 3250, 75, 4 ల బదులు ఇతరమైన ఉచిత సంఖ్యలు తీసికొన్నచో మిగులు నీళ్లు కట్టెడి విధానము అదే. అట్లే, తొట్టి h గాలనులు పట్టి, రోజు 1-కి g గాలనుల చొప్పున d రోజులు తోడగా మిగులు నీళ్లు l గాలనులు అయినచో, $l=h-gd$ అని వచ్చును. ఇది అవ్యక్తముగ ప్రశ్న కట్టవలసిన విధానమును సూచించుచున్నది. $+, -, \times, \div$ అను సంజ్ఞల సాయమున వర్ణరాసులను బంధింపగా వచ్చెడు అవ్యక్తస్వరూపమే సంకేత సూత్రము.

ఉదా. 2. పౌ. a-b-c:—దీనిని పెన్నులలోనికి మార్చుము.

a పౌ. $=240\,a$ పె.; b షి. $=12\,b$ పె.; c పె. $=c$ పె.

$\therefore$ పౌ. a-b-$c=(240\,a+12b+c)$ పె.

అట్లే, పౌ. 3-10-9 $=240\times3+12\times10+9$ పె (ఏమన, $a=3$, $b=10$, $c=9$) $=849$ పె.

ఉదా. 3. a రూ.-b అ. c పై. ను రూపాయలలోను, దాని భాగముగను చెప్పుము.

a రూ. $=a$ రూపాయలు; b అ. $=\frac{b}{16}$ రూపాయ; c పై. $=\frac{c}{192}$ రూపాయ.

$\therefore$ ఫలితము $=\left(a+\frac{b}{16}+\frac{c}{192}\right)$ రూపాయలు.

అభ్యాసము 4.

1. D భాజ్యము, d భాజకము, q భాగఫలము, r శేషము. వీటిని బంధించు సంకేతసూత్రము ఏది?

2. వర్ణములను, కర్మసంజ్ఞలను వాడి, ఈ క్రింది అంకగణిత శాసనములను చెప్పుము:—

(*a*) రెండు సంఖ్యలను ఏ క్రమమున కలిపినను, మొత్తము అదే.

(*b*) మూడుగాని, ఎక్కుడుగాని సంఖ్యలను ఏ క్రమమున కలిపినను, మొత్తము అదే.

(c) రెండు సంఖ్యలలో ఏది గుణ్యమనుకొనిగాని, గుణకమనుకొనిగాని వాటిని గుణించినను, లబ్ధము అదే.

(d) పై (c) లోని శాసనము మూడుగాని, ఎక్కుడుగాని సంఖ్యలకు వర్తించును.

(e) ఒక భిన్నపు లవహారములను అదే సంఖ్యచే గుణించినచో, భిన్నపు విలువ చలింపదు.

(f) ఒక భిన్నపు లవహారములను అదే సంఖ్యచే భాగించినచో, భిన్నపు విలువ చలింపదు.

(g) ఎన్ని భిన్నములైనను సరె, అదే హారముగలవియైనచో, వాటి మొత్తము: అదే హారము హారముగను, భిన్నలవముల మొత్తము లవముగను, గల భిన్నమే.

(h) విషమహారములుగల రెండు భిన్నముల మొత్తము: మొదటి లవ రెండవ హారముల లబ్ధముయొక్కయు రెండవ లవ మొదటి హారముల లబ్ధము యొక్కయు మొత్తము లవముగను, రెండు హారముల లబ్ధమును హారముగను, గల భిన్నమే.

(i) విషమహారములుగల రెండు భిన్నముల తేడా: మొదటి లవ రెండవ హారముల లబ్ధముయొక్కయు రెండవ లవ మొదటి హారముల లబ్ధము యొక్కయు తేడా లవముగను, రెండు హారముల లబ్ధమును హారముగను, గల భిన్నమే.

(j) రెండు భిన్నముల లబ్ధము: భిన్న లవముల లబ్ధము లవముగను, భిన్నహారముల లబ్ధము హారముగను, గల భిన్నమే.

(k) రెండు భిన్నముల భాజితము: భాజ్యలవ భాజకహారముల లబ్ధము లవముగను, భాజ్యహార భాజకలవముల లబ్ధము హారముగను, గల భిన్నమే.

3. m మ. v వీ. p పలములను పలములలోనికి మార్చుము. వచ్చిన సంకేతఫలితముద్వారా, 8 మ. 6 వీ. 39 పలములకు పలములను కట్టుము.

4. a ట. b హం. c క్వా. d పౌ. ను టన్నులలోను టన్ను భాగముగను చెప్పుము.

5. p, q, r లు క్రమముగ ఒక సంఖ్యయొక్క నందల, పదుల, ఒకట్ల స్థానములలోనున్న అంకెలు. సంఖ్య విలువ కట్టుము.

6. IV, V, VI ఫారములు మాత్రమేగల ఒక అప్పర్ సెకండరీ స్కూలులో, క్రమముగ ఒకొక్క ఫారములో a, b, c విద్యార్థులు. జీతములు

చెల్లింపగా వచ్చిన రోజువారీ వసూలు C రూ. VI, V, IV ఫారములలో జీతము విద్యార్థి 1-కి క్రమముగ, 7 రూ. $6\frac{3}{4}$ రూ. $6\frac{1}{2}$ రూ.లు. ఈ రాసులను బంధించు సంకేతసూత్రము కట్టుము.

$a=20,\ b=12,\ c=8$ అయినప్పుడు C విలువ కట్టుము.

7. ఒక నాటకకంపెనీలో ఎనిమిదేసి అణాలచొప్పున గ్యాలరీటికెట్లు p, రూపాయచొప్పున కుర్చీటికెట్లు q, రెండేసి రూపాయలచొప్పున కుర్చీటికెట్లు r, అయిదేసి రూపాయలచొప్పున సోఫాటికెట్లు s, అమ్మగా ఒక రాత్రి, వసూలు మొత్తము W రూ. అయితే, వసూలు సొమ్మునకు సంకేతసూత్రము కట్టుము.

$p=560,\ q=124,\ r=68,\ s=5$ అయినప్పుడు దాని విలువ ఎంత?

8. మధ్యనున్న మూడు స్టేషన్లలో క్రమముగ a, b, c నిమిషముల చొప్పున ఆగి, మొత్తముమీద d గంటలలో p మైళ్లు నడచిన ఒక రైలు రేటు, గంటకు v మైళ్లు. ఈ రాసులను బంధించు సంకేతసూత్రమేది?

$a=5,\ b=10,\ c=15,\ p=60,\ d=3$ అయినప్పుడు v విలువ కట్టుము.

9. ఒక ఉన్నవాని తాలూకు జమగా ఒక బ్యాంకులో సంవత్సరము ఆది నాడు b రూ. ను, సంవత్సరము చివరరోజున a రూ. ను నిలువ తేలెను. $(b>a)$. ఆ యేడు, అతడు, మూడు నెలల తరువాత w రూ. తీసికొని, మరి మూడు నెలలకు d రూ. వేసి, మరి మూడు నెలలకు w రూ. తీసికొని, మరి మూడు నెలలకు d రూ. వేసెను. చివరరోజు నిలువ తేల్చుటకు వీలైన సంకేత సూత్రము కట్టుము.

10. ఒక గది ఎత్తు h అ., పొడుగు l అ., వెడల్పు b అ., నాలుగు గోడల వైశాల్యము a చ. అ. వీటితో ఒక సంకేతసూత్రము కట్టుము.

$h=12,\ l=35,\ b=25$ అయినప్పుడు a విలువ కట్టుము.

11. l అ. పొడుగు, b అ. వెడల్పు, c అం. మందముగల ఒక దూలపు ముక్క ఘనము v ఘ. అ. ఈ రాసులతో ఒక సంకేతసూత్రము కట్టుము.

$l=30,\ b=1\frac{1}{2},\ c=9$ అయినప్పుడు v విలువ కట్టుము.

12. P రూపాయలమీద, నూటికి సాలుకి r చొప్పున, T ఏళ్లకు వడ్డీ I రూపాయలు. వడ్డీ చెప్పుటకు ఉపచరించు సంకేతసూత్రము కట్టుము.

$P=840,\ T=3\frac{1}{2},\ r=10\frac{1}{2}$ అయినప్పుడు I విలువ కట్టుము.

13. (*a*) మొదటి 12 మాటలకును ముప్పావలా, అంతకు మించిన మాటలలో మాటకు అణా, చొప్పున చార్జి ఇచ్చుకొని m మాటలు ($m>12$) మామూలు టెల్లిగ్రాము ఇవ్వవలసినచో ఎంత అగును?

$m=23$ అయినప్పుడుఫలితపు విలువ ఎంత?

(*b*) మొదటి 12 మాటలకును రూ. 1—8—0, అంతకు మించిన మాటలలో మాటకు 2 అ. చొప్పున చార్జి ఇచ్చుకొని e మాటలు ($e>12$) అర్జెంటు టెల్లిగ్రాము ఇవ్వవలసినచో ఎంత అగును!

$e=26$ అయినప్పుడు ఫలితపు విలువ ఎంత?

14. ఒక మేనేజరు తన హోటలులో తిను ప్రతివాని దగ్గరను నెలకు s రూ. పుచ్చుకొనును గాని, మానినప్పుడు రోజుకి d అ. చొప్పున కొట్టి వేయును. హోటలులో x రోజులు తినుటమానిన ఒకడు, ఏమి ఇవ్వవలెను!

$s=15$, $d=6$, $x=8$ అయినప్పుడు ఫలితపు విలువ కట్టుము.

15. ఒక స్వరూపము సెకనునకు u అడుగుల వేగముతో బయలు దేరి, ప్రతి సెకనులోను సెకనునకు f అ. చొప్పున హెచ్చు వేగముతో, t సెకనులు చలించినది. t సెకనుల అనంతరము దాని వేగము ఎంత?

$u=180$, $t=30$, $f=5$ అయినప్పుడు ఫలితపు విలువ కట్టుము.

16. ఒక ఆఫీసరుగారి జీతము, అధమము a రూ. గను, మహత్తమము b రూ. గను నిర్ణయమైనది. ఏటేటను కొంత హెచ్చు పుచ్చుకొనుచు అతడు x ఏళ్లలో మహత్తమము పుచ్చుకొనును. అతడు ఉద్యోగములో జేరిన n వ ఏట అతని జీతమెంత? ($n \angle x$).

$b=1000$, $a=500$, $x=20$, $n=6$ అయినప్పుడు ఫలితపు విలువ కట్టుము.

17. ఒక ఆఫీసరుగారి జీతపు స్కేలు (p రూ.—q రూ.—r); అనగా, ఆదిని వచ్చునది p రూ., ఏటేటను హెచ్చు q రూ., మహత్తమము r రూ. అతడు మహత్తమము ఎన్నేళ్లలో పుచ్చుకొనును?

$p=200$, $r=600$, $q=16$ అయినప్పుడు ఫలితపు విలువ కట్టుము.

18. m మగవారును f ఆడంగులునుగల ఒక సంసారములో నెల 1-కి ప్రతివాడును x రూ. చొప్పునను, ప్రతిదియును y రూ. చొప్పునను సంపాదింతురు. వారు సగటున తలొక z రూ. ను ఖర్చుచేతురు. నెలసరిని వారు మొత్తముమీద E రూ. వెనుకవేసినచో, దానిని ఇతర రాసులతో తెలిపెడి సంకేతసూత్రమును తీయుము.

$m=3$, $f=4$, $x=10$, $y=7$, $z=5$ అయినప్పుడు ఫలితపు విలువ కట్టుము.

19. ఒకడు గంట 1-కి r మైళ్లచొప్పున, h గంటలలో m మైళ్లు నడచినచో, ఈ రాసులను బంధించు సంకేతసూత్రము కట్టుము.

$h=4\frac{1}{2}$, $r=5\frac{1}{4}$ అయినప్పుడు m విలువ కట్టుము.

20. ఒక పండ్లవర్తకుడు గ్రోసు r రూపాయలుచేసి d డజన్ల పళ్లు కొన్న మున్నాడే f పళ్లు పాడైపోగా, తక్కినవాటిని అతడు డజను s అణాలు చేసి అమ్మి, g అణాలు లాభము తీసెను. ఈ రాసులను బంధించు సంకేతసూత్రము కట్టుము.

$d=36$, $r=12$, $f=48$, $s=36$ అయినప్పుడు g విలువ కట్టుము.

21. చదరపు గజము 1-కి p అణాల చొప్పున, l అ. పొడుగును, b అ. వెడల్పును, h అ. ఎత్తునుగల ఒక గది గోడలను రంగువేయుటకు c రూపాయలు కావలసినచో, రంగు ఖర్చు తెలిపెడి సంకేతసూత్రమును కట్టుము.

$l=30$, $b=18$, $h=12$, $p=12$ అయినప్పుడు c విలువ కట్టుము.

22. (1) x కనిష్ఠసంఖ్యగాను, (2) x గరిష్ఠసంఖ్యగాను, (3) x మధ్యసంఖ్యగాను ఉండునట్టి వరుససంఖ్యలను మూడింటిని కట్టుము. (3) లో వాటి మొత్తమెంత?

23. (*a*) A x ఏళ్లవాడు, B y ఏళ్లవాడు. ఇప్పటి వీళ్ల వయస్సులలో తేడా ఎంతో, ముందు m ఏళ్ల తరువాతను అంతే. ఇది సంకేతభాషలో చెప్పుము. ($x>y$).

(*b*) A x ఏళ్లవాడు, B y ఏళ్లవాడు. n ఏళ్ల క్రితము వీళ్ల వయస్సులలో తేడా ఎంత ఉండెనో, ఇప్పుడును అంతే ఉన్నది. ఈ సంగతి సంకేతభాషలో చెప్పుము. ($x>y$).

24. a అ. పొడుగును, b అ. వెడల్పును, c అ. లోతునుగల ఒక తొట్టిలోనికి, గంట 1-కి m గాలనుల చొప్పున ఒక పైపుద్వారా నీరురాగా, తొట్టి n గంటలలో నిండినది. ఒక ఘన అడుగు ఎన్ని గాలనులు?

25. ఒక రైల్వేవారి స్థూల ఆదాయము సాలు 1-కి g రూ., ఖర్చులు మొత్తము c రూ., మిగతలో r రూ. శాశ్వతనిధిలో వేయుటయు, ఆ మిగిలినది వ్యాపారపు మొత్తమగు p కోట్ల రూపాయలమీదను వడ్డీగా పంచిపెట్టుటయు జరిగినది. షేరుదార్లకు ఏ రేటు వడ్డీ కిట్టును?

26. ఒక పెద్దమనిషి x ఏళ్లపాటు నెల 1-కి a రూ. సంపాదించి b రూ. ఖర్చు చేసెను. తరువాత y ఏళ్లపాటు నెల 1-కి c రూ. సంపాదించి d రూ. ఖర్చు చేసెను. $x+y$ ఏళ్ల ఆఖరున, తాను వెనుక వేసిన సొమ్ము ఒక బ్యాంకులో సాలు 1-కి నూటికి r రూ. చొప్పున వడ్డీకి వేసెను. అప్పటినుండి ఏడాదికి ఎంతవడ్డీ అతనికి వచ్చుచుండెను?

27. ఒక కచేరీ తాలూకు రక్షకనిధికి దొరతనమువారు రూపాయకు b అణాల చొప్పునను, కచేరీ అధికారులు రూపాయకు c అణాలచొప్పునను వేసికొనగా మొత్తము a రూపాయలు పోగయ్యెను. ఆ కచేరీలో జీతాల పూర్వకముగ ఎంత ఇచ్చెడివారు?

$b=1\frac{1}{3}$, $c=1$, $a=3500$ అయినప్పుడు, జీతాలమొత్తము కట్టుము.

28. ఒక రైలు గంట 1-కి p మైళ్ల రేటుతో l గంటలును, గంట 1-కి q మైళ్ల రేటుతో m గంటలును, తరువాత గంట 1-కి r మైళ్ల రేటుతో n గంటలును నడచినచో, అది వెళ్లిన మొత్తము దూరమెంత? అంత దూరమును అది గంట 1-కి x మైళ్ల రేటుతో వెనుకకు వచ్చినచో ఎంతకాలము పట్టును?

అధ్యాయము V.

దశాంశములు.

10. దశాంశములు.

ఉదా. 1. (*a*) 36·487 ను 1000 చేతను, (*b*) ·00835 ను 10000 చేతను గుణింపుము.

$$(a)\ 36{\cdot}487\times1000=\frac{36487}{1000}\times1000=36487.$$

$$(b)\ {\cdot}00835\times10000=\frac{835}{100000}\times10000=\frac{835}{10}=83{\cdot}5.$$

సూత్రా:—ఒక దశాంశమును పదిచేగాని పదియొక్క ఏ ఘాతముచేగాని గుణించుటకు, గుణకములోని సున్నలెన్నో అన్ని స్థానములు గుణ్యములోని దశబిందువు కుడివైపునకు జరిపిన సరి.

ఉదా. 2. (*a*) 86·489 ను 1000 చేతను, (*b*) 83 ను 100000 చేతను భాగింపుము.

$$(a)\ \frac{86{\cdot}489}{1000}=\frac{86489}{1000}\times\frac{1}{1000}=\frac{86489}{1000000}={\cdot}086489.$$

$$(b)\ \frac{83}{100000}={\cdot}00083.$$

సూత్రా:—ఒక దశాంశమును పదిచేగాని పదియొక్క ఏ ఘాతముచేగాని భాగించుటకు, భాజకములోని సున్నలెన్నో అన్ని స్థానములు భాజ్యములోని దశబిందువు ఎడమవైపునకు జరిపిన సరి.

ఉదా. 3. 506·83 ను 63·89 చే గుణింపుము.

(*a*) గుణకము ఒక **నియమితాకారమును** చెందునట్లు చేయవలయును. అనగా, ఆ ఆకారమున రాశిలోని పూర్ణాంకభాగమున ఒక అంకె మాత్రమే ఉండవలెను.

∴ 63·89 ని 10 చే భాగించినచో, దానికి **నియమితాకారము** వచ్చును. అనగా, 63·89 అనునది **నియమితాకారమును** దాల్చుటకు, దాని పదోవంతు వ్రాయవలెను. ఇప్పుడు లబ్ధము చలింపకుండ చేయుటకు గుణ్యమునకు పదిరెట్లు వ్రాయవలెను.

$$506{\cdot}83\times63{\cdot}89=5068{\cdot}3\times6{\cdot}389.$$

(*b*) లబ్ధముగురించి స్థూలముగ అంచెనా: **5000 × 6 = 30000** అని కూడ గ్రహింపుము.

(*c*) గుణకారము ప్రారంభించుటకు ఇప్పటి గుణకములోని ఒకట్ల స్థానము ఇప్పటి గుణ్యములోని చివర అంకెక్రిందకు వచ్చునట్లు వ్రాయుము.

$$\begin{array}{r}
5068{\cdot}3\\
6{\cdot}389\\
\hline
30409{\cdot}8\\
1520{\cdot}49\\
405{\cdot}464\\
45{\cdot}6147\\
\hline
32381{\cdot}3687
\end{array}$$

ఉదా. 4. (a) 32381·3687 ను 5068·3 చేతను, (b) 32381·3698 ని 5068·3 చేతను భాగింపుము.

(a) భాజకమును ఒక **నియమితాకారమును** పొందునట్లు చేయవలెను. అనగా, ఆ ఆకారమున రాశిలోని పూర్ణాంకభాగమున ఒక అంకె మాత్రమే ఉండవలెను.

∴ 5068·3 ను 1000 చే భాగించినచో, దానికి **నియమితాకారము** వచ్చును. అనగా, 5068·3 అనునది **నియమితాకారమును** దాల్చుటకు దాని వెయ్యవవంతు వ్రాయవలెను. ఇప్పుడు భాజితము చలింపకుండ చేయుటకు భాజ్యముయొక్క వెయ్యవవంతు కూడ వ్రాయవలెను.

$$32381{\cdot}3687 \div 5068{\cdot}3 = 32{\cdot}3813687 \div 5{\cdot}0683.$$

(b) భాజితము గురించి స్థూలముగ అంచనా: 32÷5=6 పై చిలుకు. కాబట్టి, భాజితముయొక్క పూర్ణాంకభాగమున ఒకటే అంకెమాత్రమే ఉండును.

(c) భాగహారము ప్రారంభించి, భాజితములోని ఒకట్లసంఖ్యను భాజ్యములో ఒకట్లసంఖ్యను మీద వ్రాయుము.

(a)
```
          6·389
5·0683 ) 32·3813687 (
         30·4098
          197156
          152049
           451078
           405464
            456147
            456147
```

(b) 32381·3698 ÷ 5068·3
= 32·3813698 ÷ 5·0683
```
          6·389
5·0683 ) 32·3813698 (
         30·4098
          197156
          152049
           451079
           405464
            456158
            456147
                11
```

శేషము 11 కాదనియు దశబిందును గమనించినచో అది ·0000011 అనియు గ్రహింపుము. కాని భాజకమును, మనము **నియమితాకారములో** వ్రాయుటవల్ల భాజక భాజ్యముల వెయ్యవవంతులు వ్రాసికొని లెక్కచేసితిమి గావున, ఇప్పుడు వచ్చిన శేషము అసలు శేషములో వెయ్యవ

వంతు అని కూడ గ్రహింపుము. అసలు శేషము వ్రాయుటకు దీనిని వెయ్యిచే గుణింపుము.

శేషము = ·0011. (దశబిందును మూడు స్థానములు కుడిగా జరుపుము.)

ఉదా. 5. (a) ·585 ను (b) ·1625 ను అంకభిన్నములుగ మార్చుము.

(a) $\cdot585 = 585$ వెయ్యవవంతులు $= \frac{585}{1000} = \frac{117}{200}.$

(b) $\cdot1625 = \cdot16\tfrac{1}{4} = 16\tfrac{1}{4}$ పంచోసంతులు $= \frac{65}{4\times100} = \frac{13}{80}.$

ఉదా. 6. $\frac{11}{64}$ ను దశాంశముగ మార్చుము.

1-వ పద్ధతి. అనగా, 11 ను 64 చే భాగించి, ఫలితము దశాంశములలో చెప్పుము. $\frac{11}{64} = \frac{1{\cdot}1}{6{\cdot}4}$ (భాజకమును **నియమితాకారములో** వ్రాసినచో.) కాబట్టి, భాజిత పూర్ణాంకభాగములో అంకెలు లేవనుట విశదమైనది.

```
      ·171875
6·4 ) 1·1000000
       64
       460
       448
        120
         64
         560
         512
          480
          448
           320
           320
```

2-వ పద్ధతి. $\frac{11}{64} = \frac{11}{16\times4} = \frac{11}{4}$ లో $\frac{1}{16} = 2{\cdot}75$ లో $\frac{1}{16} = \cdot171875$ అని పొట్టి భాగహారమువల్ల వచ్చును. ఈ పద్ధతియే న్యాయ్యమైనది.

ఉదా. 7. 5 హం. 2 క్వా. 3 పౌనులను టన్నుయొక్క దశాంశముగ చెప్పుము.

1-వ పద్ధతి.

$$\frac{5\text{ హం. }2\text{ క్వా. }3\text{ పా.}}{1\text{ టన్ను.}} = \frac{619\text{ పా.}}{2240\text{ పా.}} = \frac{619}{2240} = \frac{\cdot619}{2\cdot24}$$

```
       ·2763
2·24 ) ·619000      = ·276 (3 దశాంశస్థానములకు సరి.)
        448
        1710
        1568
         1420
         1344
          760
          672
```

2-వ పద్ధతి.

5 హం. = 1 ట. లో $\frac{1}{4}$ = ·25 ట.

2 క్వా. = 5 హం. లో $\frac{1}{10}$ = ·025 ట.

8 పా. = 2 క్వా. లో $\frac{1}{7}$ = ·00357 . . . ట.

2 పా. = 8 పా. లో $\frac{1}{4}$ = ·00089 . . . ట.

1 పా. = 2 పా. లో $\frac{1}{2}$ = ·00044 . . . ట.

∴ 5 హం. 2 క్వా. 3 పా. = ·27633 ట.

= ·276 (3 దశాంశస్థానములకు సరి.)

ఉదా. 8. 18 షి. 9 పెన్సులను పౌను దశాంశముగ చెప్పుము.

1-వ పద్ధతి.

10 షి. = ·5 పా.

5 షి. = ·25 పా. (10 షి. లో $\frac{1}{2}$ గనుక)

2 షి. 6 పె. = ·125 పా. (5 షి. లో $\frac{1}{2}$ గనుక)

1 షి. 3 పె. = ·0625 పా. (2 షి. 6 పె. లో $\frac{1}{2}$ గనుక)

∴ 18 షి. 9 పె. = ·9375 పా.

2-వ పద్ధతి.

18 షి. 9 పె. = 18·75 షి.

$= \frac{18\cdot75}{20}$ పా.

$= \frac{1\cdot875}{2}$ పా.

= ·9375 పా.

ఉదా. 9. $\frac{1}{7}$ ను దశాంశముగ మార్చి, ఫలితము మూడు దశాంశస్థానములకు సరిగ ఇమ్ము.

$$\tfrac{1}{7} = \cdot1428 = \cdot143.$$

11. ఒక అంక భిన్నమును మార్చినప్పటి ఫలితము (1) ఆవర్తరహిత దశాంశమగునో, (2) పూర్ణావర్త దశాంశమగునో, (3) మిశ్రమావర్త దశాంశమగునో చూచుటతోడనే నిర్ధరించుకొనుటకు ఈ క్రింది సూత్రములు ఎంతయు ఉపచరించును:—

1-వ సూత్రము.—అంకభిన్నముయొక్క హారమున రెండ్లుగాని, అయిదులుగాని, రెండ్లును అయిదులును కూడగాని, కారణాంకములై ఇతరములు లేనిచో, అంకభిన్నమునకు సమానమైన దశాంశభిన్నము ఆవర్తరహితము.

ఉదా. $\frac{1}{2} = \cdot5$; $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = \cdot25$; $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = \cdot125$; $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = \cdot0625$...

$\frac{1}{5} = \cdot2$; $\frac{1}{5^2} = \frac{1}{5}$ లో $\frac{1}{5} = \cdot04$; $\frac{1}{5^3} = \frac{1}{5^2}$ లో $\frac{1}{5} = \cdot04$ లో $\frac{1}{5} = \cdot008$...

$\frac{1}{2\times5^2} = \frac{1}{50} = \cdot02$; $\frac{1}{2^2\times5} = \frac{1}{20} = \cdot05$.

2-వ సూత్రము.—అంకభిన్నముయొక్క హారమందలి కారణాంకములు 2, 5 లు తప్ప తక్కిన ఏవి అయినను సరె, అట్టి అంకభిన్నమునకు సమానమైన దశాంశభిన్నము పూర్ణావర్తము.

ఉదా. $\frac{1}{3} = \cdot\dot{3}$; $\frac{1}{7} = \cdot\dot{1}4285\dot{7}$; $\frac{1}{9} = \cdot\dot{1}$; $\frac{1}{11} = \cdot\dot{0}\dot{9}$; మఱియు ఇట్లే.

3-వ సూత్రము. అంకభిన్నముయొక్క హారము రెండు, అయిదులలో ఏ ఒక్కటిగాని రెండునుగాని పైగా తదితర సంఖ్యలలో ఒకటిగాని కొన్నిగాని కలగలుపుగా కారణాంకములు గలిగినచో, అట్టి అంకభిన్నమునకు సమానమైన దశాంశభిన్నము మిశ్రమావర్తము.

ఉదా. $\frac{1}{15} = \frac{1}{3\times5} = \cdot2$ లో $\frac{1}{3} = \cdot0\dot{6}$

$\frac{5}{6} = \frac{5}{2\times3} = 2\cdot5$ లో $\frac{1}{3} = \cdot8\dot{3}$

$\frac{1}{14} = \frac{1}{2\times7} = \frac{\cdot5}{7} = \cdot0\dot{7}1428\dot{5}$.

12. ఆవర్తదశాంశములను అంకభిన్నములుగ మార్చుటకు సూత్రములు.

(*a*) ఒక పూర్ణావర్తమును భిన్నాంకముగ మార్చుటకు, దానిలోని అంకెలచే ఏర్పడు సంఖ్య లవముగను, దానిలో ఎన్ని అంకెలున్నవో అన్ని తొమ్మిదులచే ఏర్పడు సంఖ్య హారముగను తీసికొనిన సరి.

ఉదా. $\cdot\dot{1} = \frac{1}{9}$; $\cdot\dot{4}\dot{5} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$; $\cdot\dot{0}3\dot{7} = \frac{037}{999} = \frac{37}{999} = \frac{1}{27}$.

(*b*) ఒక మిశ్రమావర్తమును భిన్నాంకముగ మార్చుటకు, దానిలోని అంకెలన్నిటిచేతను ఏర్పడు సంఖ్యనుండి, ఆవర్తములేని అంకెలచే ఏర్పడు సంఖ్యను తీసివేయగా వచ్చిన శేషమును లవముగను, ఆవర్తములగు అంకెలెన్నో అన్ని తొమ్మిదుల తరువాత ఆవర్తములేని అంకెలెన్నో అన్ని సున్నలు చేర్చగా వచ్చిన సంఖ్య హారముగను తీసికొనిన సరి.

ఉదా. $\cdot 8\dot{3} = \frac{83-8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$; $\cdot\dot{3}\dot{7} = \frac{137-1}{990} = \frac{136}{990} = \frac{68}{495}$.

13. స్థూలఫలములు. — సార్థక అంకములు.

అర్ధగాని, మరి ఎక్కుడుగాని విలువగల హారాధిక భిన్నములను 1-కి సమానముగను, అర్ధకు తక్కువగనుండువాటిని సున్నకు సమానముగను వాడుకొనవచ్చును. దశాంశములలో, ఫలితము n దశాంశస్థానములకు సరిగ కట్టవలసినప్పుడు $(n+1)$-వ స్థానమును విచారణచేయవలెను. ఆ స్థానములోనిది 5 గాని మరి ఎక్కుడుగాని అంకె అయినచో n-వ దశాంశస్థానమును ఒకటి ఎక్కువచేయవలెను; 5 కంటె తక్కువది అయినచో, n-వ దశాంశస్థానమును అట్లే ఉంచేవచ్చును.

ఒక ధనికుని యావదాస్తియు కలిపి 54,73,829 రూ. అనుకొనుము. ఇక్కడ మొదటి రెండు అంకెలను మాత్రమే చూచి, రెండవదానిని మూడవ అంకెను పరీక్షించినమీదట దిద్ది, తక్కిన అంకెలు ఏదో విలువగలవైనను వాటిని నిరసించి, వాని ఆస్తినిగూర్చి మొత్తముగ మాటాడునప్పుడు 'అతనిది 55 లక్షల ఆస్తి' అని గాని 'అతని ఆస్తి 55,00,000 రూ. చేస్తుంది' అని గాని అందుము. అనగా, మనము అతని ఆస్తికిగల విలువలో మొదటి రెండు సార్థక అంకములను మాత్రమే వాడి చెప్పుదుము. ఇవి అన్ని లక్షలు అని తరువాత స్థానములన్నియు అన్ని సున్నలు అనుకొనుటవలన తేలును. ఆ ఆస్తియే పది వేలలో చెప్పవచ్చును. అప్పుడది 54,70,000 రూ. ఇక్కడ ఇచ్చినది మూడు సార్థక అంకములు ఇవి. పదివేలని తరువాత స్థానములన్నియు అన్ని సున్నలు అనుకొనుటవలన తేలుచున్నది.

దశాంశములలోను, ఇట్లే. ·012645 ను రెండు దశాంశస్థానములకు సరిగ చెప్పవలయునన్న అది ·01 అగును, అనగా 1-కి పూర్వము ఒక సున్న ఉన్నది కావున అది వందోవంతు. ఇక్కడ, రెండవ సార్థక అంకమైన 2 ను బట్టి 1-వ సార్థక అంకమైన ఒకటిని దిద్ది, ·01 అని చెప్పుటలో, ఒక సార్థక అంకమునకు సరిగ ఫలితము ఇచ్చితిమన్నమాట. అట్లే, ·012645 అనుదానిని, రెండు సార్థక అంకములకు సరిగ చెప్పవలయునన్న అది ·013 అనగా 13 వెయ్యవవంతులు అగును. (ఇప్పుడు మూడవ సార్థక అంకమునుబట్టి రెండవ సార్థక అంకమును దిద్దవలయును.)

అభ్యాసము 5.

1. కొన్ని ఏళ్లపాటు నాకాదళ వ్యయము ఈ క్రింద ఇచ్చి ఉన్నది:—

	పౌ.		పౌ.
1897–8	.. 20,848,863	1901–2	.. 30,981,315
1898–9	.. 23,880,875	1902–3	.. 31,003,977
1899–1900	.. 25,731,220	1903–4	.. 35,709,477
1900–1	.. 29,998,529	1904–5	.. 36,889,500

పై మొత్తములను, రెండు దశాంశస్థానములకు సరిగ, మిలియనులలో చెప్పుము.

2. (*a*) 1 అణాను రూపాయయొక్క దశాంశముగను.

(*b*) 1 పైసను, 4 స్థానములవరకు అణాయొక్క దశాంశముగను, రూపాయయొక్క దశాంశముగను.

(*c*) 8 అ., 4 అ., 2 అ., 6 అ., 10 అ., 14 అ., 5 అ. 4 పై., 10 అ. 8 పై., 12 అ. 6 పై., 14 అ. 9 పై. వీటిని రూపాయయొక్క దశాంశములుగను.

(*d*) (i) రూ. 114—3—5, (ii) రూ. 36—15—11, (iii) రూ. 75—1—1, (iv) రూ. 89—13—10—వీటిని మూడు దశాంశస్థానములకు సరిగ రూపాయలలోను చెప్పుము.

3. ఈ క్రిందివాటిని, నాలుగవ స్థానమును చూచి మూడవది దిద్ది, రూ. అ. పై. లోనికి మార్చి చెప్పుము: (*a*) 748·625 రూ., (*b*) 893·9375 రూ., (*c*) 690·0677 రూ., (*d*) 75·0948 రూ.

4. (*a*) క్రౌను, (*b*) క్రౌనులో సగము, (*c*) ఫ్లారిను, (*d*) షిల్లింగు, (*e*) పెన్నీ—వీటిని పౌనుయొక్క దశాంశముగ మార్చుము.

5. ఈ క్రిందివాటిని మూడు దశాంశస్థానములవరకు, పౌనులలో చెప్పుము:—

(*a*) పౌ. 153—15—6, (*b*) పౌ. 335—8—8, (*c*) పౌ. 179—6—8, (*d*) 5 గినీల 5 షి. 6 పె.

6. ఈ క్రిందివాటిని పౌ. షి. పె. లోనికి మార్చుము:—

(*a*) 49·666 పౌ., (*b*) 52·788 పౌ., (*c*) 89·345 గినీలు, (*d*) 145·37 క్రౌన్లు.

7. తనకు తాను గిరుక్కున తిరుగుటకు భూమికి నిసలుగా 23·9344696 గంటలు పట్టును. ఇది ఒక మిశ్రమరాశిగా చెప్పుము. ఇది 24 గంటలుగా చెప్పుకొనినచో, తప్పు ఎంత?

8. $\pi = 3\cdot 1416$ అని తెలిసి, (*a*) π రూపాయులను, (*b*) π పౌనులను (ధనము), (*c*) π టన్నులను, (*d*) π మణుగులను మిశ్రమరాసులుగా చెప్పుము.

9. భూమి సూర్యునిని 365·242218 మాధ్యమ సౌరదినములలో చుట్టి వచ్చును. దీనిని ఒక మిశ్రమరాశిగా చెప్పుము.

10. ఒకొక్క సంవత్సరమునకు సగటున $365\frac{1}{4}$ రోజులు అనుకొనినచో, పై 9-వ ప్రశ్నలో ఇచ్చిన భూప్రదక్షిణ సంవత్సరమునకును దీనికిని తేడా ఎంత? 400 సంవత్సరములలో ఆ తేడా ఏమగును?

11. కాగితపు లెక్కలలో ప్రతి 400 సంవత్సరములకును 97 రోజు తక్కువ సంవత్సరములు వచ్చును. అట్లయినచో, 400 భూప్రదక్షిణ సంవత్సరములకును 400 కాగితముమీది సంవత్సరములకును తేడా ఎంత? అట్టి తేడా 1 రోజు అగుటకు ఎంతకాలము పట్టును?

12. ఒక దశాంశభిన్నములోని 1-వ, 2-వ, 3-వ, 4-వ, 5-వ అంకెలు క్రమముగా ౦, (సున్న). *p*, *q*, *r*, *s* లు దాని విలువ వ్రాయుము.

13. $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}$; వీటిని దశాంశములుగ మార్చుము. (ఆవర్తాంకము లున్నప్పుడు, అట్టి మొదటి తుది అంకెలకు నెత్తిమీది బొట్లుపెట్టుము.)

14. $\frac{1}{7}$ ను ఒక ఆవర్తదశాంశముగ మార్చి, తద్ద్వారా $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ లను కట్టుము.

15. ఈ క్రిందివాటిని అంకభిన్నములుగ మార్చుము:—

$\cdot\dot{1}4285\dot{7}$, $\cdot\dot{8}5714\dot{2}$, $\cdot\dot{4}2857\dot{1}$, $\cdot\dot{3}7\dot{0}$.

16. $\cdot 1\dot{6} = \cdot 1\frac{6}{9} = \frac{15}{9\times 10} = \frac{1}{6}$. ఇట్లే, $\cdot 08\dot{3}$, $\cdot 02\dot{7}$, $\cdot 0\dot{1}4285\dot{7}$, $\cdot 003\dot{7}$ ల విలువలు కట్టుము.

17. (*a*) 3·87, (*b*) 4·69, (*c*) 1·7389, (*d*) 10·2835: వీటి వ్యుత్క్రమములను క్రమముగ 3, 3, 4, 5 దశాంశస్థానములకు సరిగ కట్టుము.

18. $\pi = 3\cdot 1416$ అని తెలిసి, $\frac{1}{\pi}$ యొక్క విలువ 3 స్థానములకు సరిగ కట్టి, తద్ద్వారా (*a*) $\frac{1}{\pi}$ గంట, (*b*) $\frac{1}{\pi}$ మైలు, (*c*) $\frac{1}{\pi}$ ఎకరము, (*d*) $\frac{1}{\pi}$ బుషెల్: వీటిని మిశ్రమరాసులుగ చెప్పి విలువ కట్టుము.

19. A అను ఒక "స్కోటు" 2 నిమిషములలో 24 మాటలును, B అను స్కోటు 1 ని. 45 సెకనులలో 28 మాటలును, C అను స్కోటు 2 ని. 10 సెకనులలో 30 మాటలును కొట్టి తీగెటపా పంపగలరు. వీరిలో ఎవరిది గరిష్ఠవేగము? ఈ లెక్కకు మాత్రము మాటలన్నియు సమానమైన పొడుగే అనుకొనుము. దశాంశపద్ధతి అవలంబించి వారి వేగముల పోల్చుము.

20. లవముల క. సా. గు. గాని, హారముల క. సా. గు. గాని కట్టకుండనే, $\frac{7}{8}, \frac{9}{11}, \frac{11}{13}, \frac{14}{15}, \frac{16}{17}$: వీటిలో మహత్తమ అధమములను కట్టుము.

21. π అనుదానికి ఈ క్రింద ఇచ్చిన విలువలలో గరిష్ఠ కనిష్ఠములను కట్టుము:—(1) $3\frac{1}{7}$, (2) $\frac{355}{133}$, (3) $3\frac{1008}{6997}$.

22. ఈ క్రిందివాటిలో గురుతుపెట్టిన అంకెలను మాత్రమే గుణింపగా వచ్చు లబ్ధములను కట్టుము:—

(*a*) $\cdot 897\mathring{3}67 \times \cdot 001\mathring{2}3456$.

(*b*) $\cdot 3\mathring{6}7843 \times 16\cdot 392\mathring{3}87$.

(*c*) $\cdot 00\mathring{8}438 \times 3\mathring{4}\cdot 382$.

(*d*) $\cdot 53\mathring{8}27 \times \cdot 6893\mathring{7}$.

23. ఈ క్రింది లెక్కల గుణ్యగుణకములలో క్రమముగ, ఏయే అంకెల జతలు తీసికొని గుణించినచో వాటి లబ్ధములోని అంకెలు:—

(*a*) 48764·3289 మరి 6·00834 ల లబ్ధములోని దశాంశపు ప్రథమస్థానము నిచ్చును?

(*b*) 343009·86354 మరి 12·0083765 ల లబ్ధములోని దశాంశపు ద్వితీయస్థానము నిచ్చును?

(*c*) 4865089·32543 మరి 612·9876003 ల లబ్ధములోని దశాంశపు తృతీయస్థానము నిచ్చును?

(*d*) 8·38765 మరి ·00008376 ల లబ్ధములోని దశాంశపు చతుర్థ స్థానము నిచ్చును?

24. (*a*) 768·345 ను 42·637 చే రెండు దశాంశస్థానములకు సరిగ గుణించి, తద్వారా 7683·45 × ·042637 ను రెండు దశాంశస్థానములకు సరిగ కట్టుము.

(*b*) 8·009 ను 46·389 చే మూడు దశాంశస్థానములకు సరిగ గుణించి, తద్వారా 80090 × ·0046389 ను మూడు దశాంశస్థానములకు సరిగ కట్టుము.

(*c*) 6534·08 ను 156·32 చే గుణించి లబ్ధమును ఒకట్లను సరిగ చెప్పుము. తద్వారా 65·3408 × 1·5632 విలువ కట్టుము.

(*d*) 3·005342 ను ·0083 చే ఆరు దశాంశస్థానములకు సరిగ గుణించి, తద్వారా 30053·42 × 8·3 ను రెండు స్థానములకు సరిగ చెప్పుము.

25. (*a*) 1486·438 ని 783·2 చే 4 దశాంశస్థానములకు సరిగ భాగించి, తద్వారా $\frac{14\cdot86438}{\cdot7832}$ యొక్క విలువ రాబట్టుము.

(*b*) 16·8498 ని 32·48 చే 3 దశాంశస్థానములకు సరిగ భాగించి, తద్వారా $\frac{\cdot0168498}{324\cdot8}$ యొక్క విలువ రాబట్టుము.

(*c*) 83·428 ని 101·329 చే 2 దశాంశస్థానములకు సరిగ భాగించి, తద్వారా $\frac{\cdot0083428}{\cdot101329}$ యొక్క విలువ రాబట్టుము.

(*d*) 964·329 ని 1238·429 చే 4 దశాంశస్థానములకు సరిగ భాగించి, తద్వారా $\frac{\cdot00964329}{\cdot001238429}$ యొక్క విలువ కట్టుము.

26. ఈ క్రింది లెక్కలు తప్పులని, చేయకయే చెప్పుము:—

(*a*) $46\cdot785 \times 602\cdot38 = 2412\cdot36$.

(*b*) $\frac{86\cdot783 \times 4\cdot82}{9\cdot34} = 3\cdot639$.

(*c*) రూపాయి, 1 షి. 4 పె. చొప్పున, 100 రూ. 600 పౌనులకు సమానము.

(*d*) ఒక్కొక్క రేక ·00625 అం. మందముగలవి 625 రేకలు పేర్చినచో, మందము 1 అంగుళము.

27. (*a*) $x + \cdot3625 + 14\cdot0895 = 25\cdot3$ అయినప్పుడు, x కట్టుము.

(*b*) $x - \cdot1425 + 12\cdot3864 = 26\cdot4$ అయినప్పుడు, x కట్టుము.

(*c*) $x \times \cdot1738 = 26\cdot42 \times 8\cdot375$ అయినప్పుడు, x కట్టుము.

(*d*) $\frac{x}{\cdot438} = \frac{6\cdot785}{9\cdot32}$ అయినప్పుడు, x కట్టుము.

28. $x = \cdot1435$, $y = \cdot2625$ అయినప్పుడు, ఈ క్రిందివాటి విలువ కట్టుము:—

(*a*) $2x + 3y$; (*b*) $4x - 2y$; (*c*) $8\,xy$; (*d*) $\frac{7x}{5y}$ (మూడు దశాంశస్థానములకు సరిగ); (*e*) $\frac{3y + 2x}{3y - 2x}$ (మూడు దశాంశస్థానములకు సరిగ.)

29. $u = 3\cdot24$, $v = 2\cdot86$ అయినప్పుడు, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, $\frac{1}{u+v}$, $\frac{1}{u-v}$ $\frac{1}{u} + \frac{1}{v}$, $\frac{1}{u} - \frac{1}{v}$ అనువాటి విలువలు మూడు దశాంశస్థానములకు సరిగ కట్టుము.

30. మైలునకు $\frac{1}{240}$″ ప్రమాణముతో గీసిన ఒక బర్మాదేశపటములో, మాండలే రంగూనుల మధ్య దూరము 1·55″ ఉన్నది. సహజముగ వాటి దూరము, మైలునకు సరిగ కట్టుము.

31. ఒక చక్రపు వ్యాసము 6·205 అడుగులు, పరిధి = 3·1416 × వ్యాసము అని తెలిసి, ఆ చక్రపు పరిధి అడుగులలో కట్టుము.

32. భూమధ్యరేఖార్ధవ్యాసము 20,923,600 అడుగులు అనియు, పరిధి = 3·1416 × వ్యాసము అనియు తెలిసి భూమధ్యరేఖ పొడవు మైళ్లలో కట్టుము.

33. నీటినిబట్టి చూచిన, పాదరసము 13·596 అంతలు బరువు. నీరు ఘన అడుగునకు 62·43 పౌనులు తూగును. ఒక ఘన అడుగు పాదరసము ఎత్తు పౌనులలోను అవున్సులలోను కట్టుము.

34. 20″ × 7½″ గల ఒక ఇనుపదూలపు ముక్క అడుగునకు 89 పౌ. చొప్పున తూగును. 12·785′ వెడల్పుగల ఒక గది గోడలమీద ఇటునుంచి అటుదాక ఇట్టి దూలమొకటి, ఒక్కొక్క గోడమీద 0·75 అ. ఆనుకొని ఉన్నది. ఒక్కొక్క గోడమీద ఎంత బరువు ఎత్తినట్లు?

35. 100 చ. అడుగులకు 3·125 రూ. చొప్పున, 8′×3′ 6″ అయిన 18 వెనీసు తలుపులకు లోహపు తెలుపురంగు వేయుటకు ఏమగును? వెనీసు తలుపులకు రంగువేయుటకు మామూలు ఖర్చునకు 3·25 రెట్లు అగును.

36. యునైటెడ్ స్టేట్సులో, ఒకానొక సంవత్సరము తాలూకు, సాగుబడి నేలల వైశాల్యములును, పైరుల పంటలును ఈ క్రింద ఇచ్చి ఉన్నవి:—

పైరులు.	ఎకరములు (వేలలో.)	బుషెల్స్ (వేలలో.)	ఎకరము 1-కి బుషెల్స్.
వరి ...	119,755	3,159,494	......
గోధుమ ...	45,941	650,828	......
ఓట్సు ...	43,572	1,587,286	......

పై దానిలో ఖాళీలు, 2 దశాంశస్థానములకు సరిగ కట్టి, పూర్తిచేయుము.

37. ఒకానొక సంవత్సరములో ఇండియాలోని బ్రిటిషు కోస్తాలో జనాభా 244,267 వేలు, సామంత సంస్థానములలో 70,889 వేలు. అప్పుడు ఇండియా జనాభా ఎంత? మొత్తపు జనాభాలో ఏ దశాంశభాగము (i) బ్రిటిషు కోస్తాలో, (ii) సామంత సంస్థానములలో ఉండెను? (3 దశాంశస్థానములకు సరిగ కట్టుము.)

38. ఈ క్రింది పట్టీ భూమిమీద పత్తిపంట తెలుపును (అంకెలు బేలు 400 పౌనుల చొప్పున గలిగి ఉన్న బేళ్ల వేలలో నున్నవి):—

కాలము.	అమెరికా.	ఇండియా.	ఈజిప్టు.	ఇతర దేశములు.	మొత్తము.
1913-14	14885	6149	970	7796	......
1914-15	15607	4753	880	6987	......
1915-16	12953	5016	. 735	7459	......

పై ఖాళీలు పూర్తి చేయుము. ఒక్కొక్క సంవత్సరము, మొత్తపు ఉత్పత్తిలో ఏ దశాంశభాగములు అమెరికా, ఇండియా, ఈజిప్టులలోనివో కట్టుము. (2 దశాంశస్థానములకు సరిగ చెప్పుము.)

39. ఒక కొలతబద్దమీద అంగుళమును పది సమానభాగములు చేయు గీతలున్నవి. అట్టివి తొమ్మిదింటితో ఏర్పడు పొడుగు, పది సమానభాగములుగ చేయబడినది. కొలతబద్దయొక్క ఒక భాగమునకును, ఇప్పుడు వచ్చిన భాగమునకును తేడా దశాంశముగ చెప్పుము.

40. ఒక కొలతబద్దమీద అంగుళమును పది సమానభాగములు చేయు గీతలున్నవి. అట్టివి పదకొండింటితో ఏర్పడు పొడుగు, పది సమానభాగములుగ చేయబడినది. కొలతబద్దయొక్క ఒక భాగమునకును, ఇప్పుడు వచ్చిన భాగమునకును తేడా దశాంశముగ చెప్పుము.

41. ఒక రైలు సెన్ట్రల్ స్టేషనులో 6—45 పూ. అ. బయలుదేరి, మెడ్రాసునకు 116 మైళ్లు ఉన్న రేణిగుంట 12—5 అ. అ. నకు చేరును. రైలుయొక్క సగటురేటు, 2 దశాంశస్థానములకు సరిగ కట్టుము. ఆ రైలు, ఆర్కోణములో 20 నిమిషములు, మరి ఇతర స్టేషనులలో కలిపి 48 నిమిషములును ఆగినచో, ఈ వ్యవధులు కలుపుకొనగా, రేటు ఏమగును?

42. ఒక త్రిభుజముయొక్క భుజములలో నొకటి స్వతహా 164′. నలుగురు సర్వే విద్యార్థులు దానిని కొలుచుకొని వచ్చి, ప్రతివాడును 1″=50 అడుగుల ప్రమాణముతో ప్లానుగీయగా, కాగితముమీద అది 3·25″, 3·30″, 3·275″, 3·28″ ఉన్నట్లు, క్రమముగ తేలెను. ఒక్కొక్కరి పట్లనున్న తప్పు, సహజమానముయొక్క దశాంశభిన్నముగ కట్టుము.

43. వ్యాయామము ఏమియులేని ఒక స్థూలకాయుడు 234·5 పౌనులును, అదే వయస్సుండి వ్యాయామము చేయుచు లోకముతోపాటు పెరిగిన మరియొకడు 148·675 పౌనులును తూగినారు. ముందువాడు తరువాతవానికి ఎన్ని అంతలు బలువు? (2 దశాంశస్థానములకు సరిగ చెప్పుము.)

44. ఒక ఆయతముయొక్క వైశాల్యము 1 అం. భుజముగాగల ఒక నలుచదరమునకు సమానము. ఆయతముయొక్క పొడుగు 1·78 అం. వెడల్పు ఎంత?

45. 1 ఎకరము వైశాల్యముగల ఒక ఆయతభూమి పొడుగు 620 గజములు. దాని వెడల్పు, రెండు దశాంశస్థానములకు సరిగ కట్టుము.

46. ఒక గజముబద్దమీద $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1 అని వ్రాసి నాలుగు గీతలున్నవి. కాని, ఆ గీతలుండు చోట్లకు ఒక చివరనుండి అసలు దూరము ·27 గ., ·49 గ., ·76 గ., 1·1 గ. పైగా, ఈ నాలుగు భాగములును అంగుళములలోనికి భాగింపబడినవి. ఈ బద్దప్రకారము ఒక గుడ్డ $1\frac{1}{4}$ గజములమీద 4 అం. ఉన్నది. దాని అసలు పొడుగు కట్టుము.

47. సూర్యునికిని భూమికిని దూరము 93,000,000 మైళ్లును, సూర్యునకును నెప్ట్యూన్‌నకును 2,750,000,000 మైళ్లు. భూమికిని సూర్యునకును దూరము ఆదిగా పుచ్చుకొని, నెప్ట్యూన్ సూర్యుల దూరము ఎన్ని అంతలో, 2 దశాంశస్థానములకు సరిగ కట్టుము. అదే ఆదితో, సూర్యునినుండి ఈ క్రింది గ్రహముల దూరము ఎన్ని అంతలో కూడ, 3 దశాంశస్థానములకు సరిగ కట్టుము:—

గ్రహము				సూర్యునకు దూరము (మైళ్లు)
బుధుడు	...	...	...	35,000,000
శుక్రుడు	...	...	...	66,000,000
అంగారకుడు	...	...	...	140,000,000
గురుడు	...	...	...	483,000,000
శని	...	...	...	870,000,000
యురేనస్	...	...	...	1,754,000,000

48. పై ప్రశ్నలో సూర్యునినుండి ఇచ్చిన గ్రహముల దూరములను రెండు కారణాంకముల లబ్ధముగా చెప్పుము. ఒక కారణాంకములో రెండే సార్థకాంకములుండి, అది నియమితాకారముగల దశాంశము కావలెను, రెండవ కారణాంకము 10 యొక్క ఘాతము కావలెను.

49. ఈ క్రింది వానిని సూక్ష్మముచేసి, ఫలితమును ఇతరత్రా సరి చూపుము:—

(*a*) $(1+\cdot756)\ (2+\cdot385)$

(*b*) $(1-\cdot756)\ (2-\cdot385)$

(*c*) $7\ (1+\cdot01)\ 8\ (1+\cdot02)$

(*d*) $\dfrac{3\ (1+\cdot01)}{5\ (1+\cdot02)}$

50. ఇవి సూక్ష్మము చేయుము:—

(*a*) $\dfrac{\cdot625\times\cdot625-\cdot375\times\cdot375}{\cdot625-\cdot375}$.

(*b*) $\dfrac{\cdot589\times\cdot589-\cdot411\times\cdot411}{\cdot589+\cdot411}$.

(*c*) $\dfrac{2\cdot5\times2\cdot5\times2\cdot5+1\cdot25\times1\cdot25\times1\cdot25}{2\cdot5+1\cdot25}$.

(*d*) $\dfrac{3\cdot6\times3\cdot6\times3\cdot6-1\cdot8\times1\cdot8\times1\cdot8}{3\cdot6-1\cdot8}$.

51. ఈ క్రిందివానికి అడిగిన ఆకారము ఇమ్ము:—

(*a*) $86\cdot354=80\ (1+a)$, a ఒక దశాంశము కావలె.
(*b*) $92\cdot456=100\ (1-b)$, b ,,
(*c*) $256\cdot354=300\ (1-c)$, c ,,
(*d*) $654\cdot894=500\ (1-d)$, d ,,

52. ఒకడు, మొదటి రకము మణుగు 1-కి రూ. 1—14—0 చొప్పున 5·625 మణుగులును, రెండవ రకము మణుగు 1-కి రూ. 1—8—0 చొప్పున 4·875 మణుగులును రెండు రకముల బెల్లము కొని, కలిపి, ఆ కలగలుపుది వీసె రూ. 0—3—6 చేసి అమ్మినచో, వాని లాభము ఎంత?

53. మెడ్రాసులో ఒక కంపెనీకి ఇంగ్లండునుండి మొత్తము 2000 పౌనుల ఖరీదునకు 6000 టోపీలు దిగినవి. లాటు రాగానే విప్పిచూడగా, వాటిలో ·15 నలిగిపోయినట్లును, మిగతలో ·01 ఎలుకలు కొరికివేసినట్లును కనబడెను. తక్కినవి, ఒకొక్కటి 6·65625 రూ. చేసి అమ్మినచో, కంపెనీకి ఎంత లాభము? (1 పౌ. = 15 రూ.)

54. ఒక నుయ్యి అంచునుండి $0\cdot\dot{1}$ భాగము క్రిందికి గచ్చుచేసియు, అక్కడనుండి మిగత లోతులో 0·625 భాగము క్రిందికి ఇటుకలు కలిపించుచును, అక్కడనుండి మిగత లోతులో ·6 భాగము క్రిందికి సిమెంటుచేసియు, తక్కినది నీటిలోను ఉండెను. నీటిలోతు 5 అ. అని తెలిసి, నుయ్యిలోతును, భాగములును కట్టుము.

55. A, B లు కలిసి ఒక పనిచేయుటకు 8 రోజులు పట్టును. వారు కలిసి మొదలుపెట్టి పనిలో ·375 చేసిన పిదప A వెళ్లిపోగా, B ఒక్కడే $4\frac{1}{6}$ రోజులు చేయుచుండగా C వచ్చి వానికి ఆసరా అయ్యెను. మరి 4 రోజులలో ·95 పని కాగా, అప్పుడు A తిరిగి వచ్చి చేరినమీదట పని ·25 రోజులలో

పూర్తి అయ్యెను B, A, C లు వేర్వేరుగా ఆ పని ఎన్నేసి రోజులలో చేయగలరు?

56. ఒక మనిపర్సునకు మూడు అరలు ఉన్నవి. మొదటిదానిలో కొన్ని రూపాయనోట్లు ఉన్నవి. రెండవదానిలో వెండినాణెములున్నవి. వాటి మొత్తపు విలువ మొదటి అరలోని రూపాయలలో విలువ ·25; మూడవదానిలో నిక్కెలువి, రాగివి నాణెములున్నవి. వాటి మొత్తపు విలువ రెండవ అరలోని వెండి నాణెముల విలువలో ·10. వెండి నాణెముల విలువలో ·2, అర్ధరూపాయబిళ్లలు, మిగతలో ·5 రూపాయబిళ్లలు, తక్కినవి పావలా కాసులు. మూడవ అరలో రాగి స్వరూపముల విలువ నిక్కెల్ వాటి విలువకు $1\frac{1}{2}$ రెట్లు. ఆ పర్సులో ఉన్నది రూ. 63—12—0 అయితే, ఏ రూపేణ ఎంతెంత సొమ్మున్నది?

అధ్యాయము VI.

మెట్రిక్ సాంప్రదాయము.

14. మెట్రిక్ సాంప్రదాయములో కొలామానము.

10 మిల్లిమీటరులు (మి.మీ.)	=	1 సెంటిమీటరు (సెం.మీ.)
10 సెంటిమీటరులు	=	1 డెసిమీటరు (డె.మీ.)
10 డెసిమీటరులు	=	1 మీటరు (మీ.)
10 మీటరులు	=	1 డెకామీటరు (డెకా.మీ.)
10 డెకామీటరులు	=	1 హెక్టోమీటరు (హె.మీ.)
10 హెక్టోమీటరులు	=	1 కిలోమీటరు (కి.మీ.)
10 కిలోమీటరులు	=	1 మిరియమీటరు (మిరి.మీ.)

అభ్యాసము 6 (A)

1. (*a*) A, B అను రెండు స్టేషనులమధ్య రోడ్డుయొక్క పొడుగు 15·483 కి.మీ. అది కొంత ఎగుడు, కొంత మట్టము, కొంత దిగుడు. ఎగుడు 6 కి.మీ. 20 మీ. న్నూ, మట్టము 3 కి.మీ. 65 మీ. అయినచో, దిగుడు రోడ్డు భాగము పొడుగు ఎంత?

(*b*) మూతలేని ఒక పెట్టెయొక్క బయటి పొడుగు 10 డె.మీ., లోపలి పొడుగు 920 మి.మీ. పెట్టెచెక్కల మందము అంతటను సమానమే అయిన, అది ఎంత?

(*c*) ఒక గాజుగొట్టముయొక్క బయటి వ్యాసము ·029 మీ. లోపలి వ్యాసము ·017 మీ. మందము మిల్లిమీటర్లలో కట్టుము.

(*d*) ఒక గదియొక్క బయటి పొడుగు 6·25 మీ. బయటి వెడల్పు 4·75 మీ. గోడలమందము ·45 మీ. గదియొక్క లోపలి కొలతలు కట్టుము.

2. (*a*) దిమ్మమీదనున్న ఒక విగ్రహము ఎత్తు 6·35 మీ. విగ్రహము పొడుగు 1·75 మీ. దిమ్మ ఎత్తు సెంటిమీటర్లలో కట్టుము.

(*b*) ఏటవాలుగా ·09 మీ. ఎత్తు ఉన్న ఒక నీళ్ల గ్లాసులో నీళ్లు పోసినప్పుడు ·036 మీటర్లవరకును, నూనె పోసినప్పుడు ·025 మీటర్లవరకును వచ్చినది. ఖాళీజాగాయొక్క ఏటవాలు ఎత్తు కట్టుము.

(*c*) ఒక రోడ్డు పొడుగు 243 కి.మీ. 596 మీ. అది చెరియొక వైపునను ప్రారంభించి కంకరచేయుటకు ఇద్దరు కంట్రాక్టు తీసికొనినారు. కొంతకాలమునకు వారు 112856 మీ. ఒకడును, 61459 మీ. రెండవవాడును చేసిరి. ఇంక కంకరచేయవలసినది ఎంత?

(*d*) ప్రక్కలు నిటారుగానుండి, సమానమైన రెండు తొట్టెల నడుమ ఒక గోళము రెండిటిప్రక్కలను స్పృశించుచు ఉన్నది. ఎడమతొట్టి ఎడమప్రక్కనుండి కుడితొట్టి కుడిప్రక్కవరకు, వాటిమీద, 3·09 మీ. పొడుగుగల ఒక బల్లచెక్క ఉన్నది. ఒకొక్క తొట్టి పొడుగు 95·8 సెం.మీ. ఆ గోళపు వ్యాసము కట్టుము.

3. (*a*) ఒకొక్కటి ·049 మీ. మందముగల పుస్తకములు 53 ఒకటిపై నొకటి పేర్చినచో, అవి ఎంత ఎత్తు ఉండును?

(*b*) ఒకొక్కటి 123 మి.మీ. ఎత్తుగల ట్రంకుపెట్టెలు 15 ఒకటిపై నొకటి పెట్టినచో, అవి మీటర్లలో ఎంత ఎత్తు ఉండును?

(*c*) ఒకొక్కటి ·064 మీ. మందముగల 65 ఇటుకలను ఒకటిపై నొకటి ఉంచినచో, అవి ఎంత ఎత్తు ఉండును?

(*d*) ఒకొక్కటి ·002 మీ. మందముగల 33 ఒకేరకపు నాణెముల దొంతరయొక్క ఎత్తు కట్టుము.

4. (*a*) ఒక మోటారుకారు 2 గం. 10 ని. లలో 50 మైళ్లు లాగి వేయును. దానిరేటు గంటకు ఎన్ని కిలోమీటర్లు? (1 కి.మీ. = $\frac{5}{8}$ మైలు.)

(*b*) ఒక రైలు 42 నిమిషములలో 20 మైళ్లు వెళ్లును. అది గంటకు ఎన్ని కిలోమీటర్లు వెళ్లినట్లు? (1 కి.మీ. = $\frac{5}{8}$ మైలు.)

(*c*) ఒక విమానము $11\frac{3}{4}$ సెకన్లలో 3,000 అడుగులు ఎక్కును అది గంటకు ఎన్ని కిలోమీటర్లు లేచినట్లు?

(*d*) ఒక మనుష్యుడు 30·3 నిమిషములలో 23·6 కి.మీ. ఎగురును. అతనికి 1 కి.మీ. ఎగురుటకు ఎంత పట్టును?

5, 6 ప్రశ్నలలో ఫలితమును, కోరిన రూపమున చెప్పుము:—

5. (*a*) a కి.మీ. + b హె.మీ. + c, డెకా మీ. + d మీ. (మీటర్లలో చెప్పుము.)

(*b*) a హె.మీ. + b డెకా.మీ. + c మీ. + d డె.మీ. (మీటర్లలో చెప్పుము.)

(*c*) p కి.మీ. + q మీ. − r డె.మీ. + s మి.మీ. (కిలోమీటర్లలో.)

(*d*) p హె.మీ. + q డె.మీ. − r సెం.మీ. + s మి.మీ. „

6. (*a*) (m మీ. + d డె.మీ. + c సెం.మీ. + m మి.మీ.) × 100 . . . (ఒక మిశ్రమరాశిగ.)

(*b*) (x డె.మీ. − y సెం.మీ. − z మి.మీ.) × 1000 . . . (ఒక మిశ్రమరాశిగ.)

(*c*) (a మిరియ.మీ. + b కి.మీ. + c హె.మీ. − d డెకా.మీ.) ÷ 10 . . . ఒక మిశ్రమరాశిగ.)

(*d*) (a కి.మీ. + b హె.మీ. + c డెకా.మీ. − d మీ.) ÷ 1000 . . . (ఒక మిశ్రమరాశిగ.)

7. భూమధ్యరేఖనుండి ధ్రువమునకు దూరము 10 మిలియనుల (10^7) మీటర్లు. భూమియొక్క పరిధి (i) మీటర్లలో, (ii) కిలోమీటర్లలో వ్రాయుము.

8. వెలుగుయొక్క వేగము సెకనునకు 3×10^{10} సెం.మీ. సూర్యుని నుండి భూమికి వెలుగు వచ్చుటకు 8 నిమిషములు పట్టును అని తెలిసి, భూసూర్యుల మధ్య దూరము కిలోమీటర్లలో కట్టుము.

9. భూమియొక్క పరిధి 4×10^7 మీ. 1 మీ. 39·3708 అంగుళములకు సమానము. భూమధ్యరేఖనుండి ధ్రువమునకు దూరము మైళ్లలో, మైలునకు సరిగ కట్టుము.

10. 1 మీ. = 1·0936 గజములు. 1 మీ. = 39·3707 అంగుళములు అని ఉండెడు మామూలు సాపత్యమునకును దీనికిని తేడా ఎంత? రెండు సందర్భములకును తేడా 1 అంగుళమగుటకు ఎన్ని మీటర్లు తీసికొనవలెను?

11. 1 కి.మీ. = $\frac{5}{8}$ మైలు. ఈ సాపత్యమునుబట్టి 1 మీటరునకు ఎన్ని అంగుళములు సమానము? అది ఒక మతము. 1 మీ. = 37·3709 అంగుళములు అని మరియొక మతము. రెండింటికిని తేడా ఒక అంగుళము ఎన్ని మీటర్లు తీసికొనినప్పుడు అగును?

12. ఒక భారమితిలో పాదరసముయొక్క యెత్తు 750 మి.మీ. అదే ఎన్ని అంగుళములు? (1 మీ. = 39·3708 అం.)

13. ఒక చలయంత్రమును నడుపు చక్రములలో ఒకొక్కదాని పరిధి 5 మీ. 75 సెం.మీ. తక్కిన చక్రములలో ఒకొక్కదాని పరిధి 3 మీ. 25 సెం.మీ. 192 కి. మీటరులు ఆ చలయంత్రము పోవునప్పటికి, ఒకొక్క రకపు చక్రము ఎన్నెన్ని సారులు దొర్లును?

14. 1 మీ. = 39·3709 అంగుళములు అని తెలిసి, ఒక గజమును మీటరుయొక్క దశాంశముగ చెప్పుము.

15. 650 టావులు దొంతరగా పెట్టి మందము చూడగా 3·55 సెం.మీ. ఉన్నది. ఒకొక్క టావు మందము ఎంత?

16. 6·85 మీటర్ల పొడుగున్న కర్రనుండి, 5·5 సెంటిమీటర్ల ముక్కలు ఎన్ని కోయవచ్చును? చివరకు ఎన్ని మిల్లిమీటర్ల ముక్క దిగడును?

17. ఒక చేవ్వ పొడుగు 48·26 సెం.మీ. అదే 18·9 అంగుళములున్నది. ఒక అంగుళమునకు ఎన్ని సెంటిమీటర్లు?

18. విద్యుచ్ఛక్తి సెకనునకు 186,400 మైళ్లు వెళ్లును. ఈ వేగము సెకనునకు ఎన్ని కిలోమీటర్లో చెప్పుము. (1 మీ. = 39·37 అం.)

19. నౌకాశ్రయములలోనికి ఉన్న ప్రవేశ ప్రవాహముల పొడుగు 4 మైళ్లును కలుపుకొని, సూయెజ్ కెనాల్ పొడుగు 102 మైళ్లు. ఆ ప్రవాహములు మినహాయించి, కెనాల్ పొడవును కిలోమీటర్లలో కట్టుము. 1 మీ. = 39·37 అం. అనుకొనుము. (మొదట, 1 కి.మీ. = $\frac{5}{8}$ మైలు అనుకొని ఉజ్జాయింపుగా వేయుము.)

20. భూమధ్యరేఖా వ్యాసము 7926·6 మైళ్లు అని తెలిసి, అది మీటర్లలో కట్టుము. (1 కిలోమీటరు = ·621 మైలు.)

21. సెకనునకు 16 మీటర్ల వేగము గంటకు ఎన్ని మైళ్లు? (13 అం. = 33 సెం.మీ. అను సాపత్యము వాడుము.)

22. ఒక పెన్నీ నాణెముయొక్క వ్యాసము $\frac{1}{10}$ అడుగు. 1524 మి. మీటర్ల పొడుగున, ఎన్ని పెన్నీలు ఒకటినొకటి తాకించి పెట్టవచ్చును? (1 అం. = $2\frac{1}{2}$ సెం.మీ.)

23. ఇండియాలో ఒకచోట 120 కి.మీ. రైలుమార్గము వేయుటకు **521,000** పౌ. అగును. మొత్తము ఖర్చును, మైలు 1-కి ఖర్చును, ఈ దేశపు సొమ్ములో చెప్పుము. (మారకము, 1 పౌ. = 12 రూ.; 1 కి.మీ. = $\frac{5}{8}$ మైలు.)

24. గంటకు 21 నాట్సు వేగమును, సెకనునకు కొన్ని సెంటిమీటర్లగా చెప్పుము. (1 నాట్ = 15 మైలు. 1 కి.మీ. = $\frac{5}{8}$ మైలు.)

25. 1 మీ. = **39·37** అం. ఏవైన కొన్ని అంగుళములను సులువుగా మీటర్లలోనికి మార్చి చెప్పుటకు వీలైన ఒక గుణకమును, నాలుగు దశాంశములకు సరిగ కట్టుము. x అం. = y మీటర్లు అని తెలిసి, x, y లకు సంబంధము కట్టుము.

26. (*a*) వీటిలో ఏ చార్జి నయము:—1 కిలోమీటరుకు 6·25 సెంటైములు లేక 1 మైలునకు 1 పెన్నీ. (1 పౌ. = 25 ఫ్రాంకులు, 1 కి.మీ. = మైలు.)

(*b*) మీటరు 1-కి 8·9 ఫ్రాంకుల చొప్పున 168 మీటర్ల పట్టుగుడ్డ ఖరీదు ఫ్రెంచిసొమ్ములో కట్టుము.

27. 1 పౌ. = 25 ఫ్రాంకులు అని తెలిసి, 1 షిల్లింగును ఫ్రాంకులు సెంటైములగాను చెప్పుము. 1 పౌ. = **25·17** ఫ్రాంకులు అయినప్పుడు, 1 షిల్లింగునకు ఎన్ని ఫ్రాంకుల ఎన్ని సెంటైములు? ఎన్ని పౌనుల సొమ్ము అయితే, ఈ రెండు రకముల మారకపు రేట్ల ప్రకారమును తేడా 100 ఫ్రాంకులు వచ్చును?

28. ఒక పత్రిక ఫ్రాన్సులో 6·30 ఫ్రాంకులకు వచ్చును, అదే ఇంగ్లండులో 4 షి. 11 పెన్సులకు వచ్చును. 25·15 ఫ్రాంకులు 1 పౌనునకు సాటి అయినప్పుడు, న్యాయతః ఉండవలసిన ఖరీదునకు ప్రస్తుతపు ఖరీదు ఇంగ్లండులో ఎంత తక్కువో, ఫార్తింగునకు సరిగ కట్టుము.

29. ఒక గడియారము ఇంగ్లండులో పౌ. 4—15—0, ఫ్రాన్సులో 117·75 ఫ్రాంకులు. మారకపు రేటు 1 షిల్లింగునకును 1·25 ఫ్రాంకులు అయినప్పుడు, ఆ గడియారము ఫ్రాన్సులో చౌకా, ప్రియమా? నూటికి ఏమాత్రము?

30. 1 పౌ. = 25 ఫ్రాంకులు అనియు, 1 మీ. = 39·37 అం. అనియు తెలిసి, మీటరుకు ఇన్ని ఫ్రాంకులు అని ఇచ్చిన ఒక వస్తువు ఖరీదును, దేని చేత గుణించినచో ఆ లబ్ధము, గజమునకు అన్ని షిల్లింగులు అని ఆ వస్తువు ఖరీదే ఇచ్చునో, అట్టి గుణకమును, 3 దశాంశస్థానములకు సరిగ కట్టుము.

31. 1915 సం॥లో, ఒక దేశమున ప్రయాణానుకూలమైన రైలుమార్గము పొడుగు 25,633 మైళ్లు, మొత్తము రాబడి 49,406,200 పౌ. 1 పౌ. = **25·20** ఫ్రాంకులును, 1 కి.మీ. = ·621 మైలును అనుకొని, కిలోమీటరు 1-కి సగటు రాబడి, సెంటైమునకు సరిగ కట్టుము.

32. 1913 సం॥లో, ఫ్రాన్సులో, 790,173 మైళ్లమేర వ్యాపించియుండిన టెలిఫోను తీగపై స్థూలాదాయము 65,800,000 ఫ్రాంకులు. 1 కి.మీ. = ·621 మైలు అని తెలిసి, కిలోమీటరు 1-కి ఆదాయము, సెంటైమునకు సరిగ కట్టుము.

33. 1917 సం॥ జూను నెల 30 వ తేదీతో ఆఖరగు సాలున యునైటెడ్ స్టేట్సులో 261,500 మైళ్ల మేర వెళ్లిన టపాలకన్నిటికిని కలిపి చార్జి 62,750,000 డాలర్లు అయ్యెను. 4·8655 డాలర్లు = 25·10 ఫ్రాంకులు అని తెలిసి, మైలు 1-కి సగటున టపాచార్జి ఫ్రెంచిసొమ్ములో, సెంటైమునకు సరిగ కట్టుము.

15. బ్రిటిషు ఫక్కీలోవలెనే, దీనిలోకూడ వైశాల్యప్రమాణములు సాజాత్యములైన దైర్ఘ్యప్రమాణములనుండియే తీసినారు. అవి, చదరపు మీటరు, చదరపు సెంటిమీటరు, చదరపు కిలోమీటరు వగైరాలు; వ్రాతలో 1 చ. మీ., 1 చ. సెం.మీ., 1 చ. కి.మీ. వగైరా.

మెట్రిక్ ఫక్కీ వైశాల్యమానము.

100 చదరపు మిల్లిమీటరులు (చ. మి.మీ.)	= 1 చదరపు సెంటిమీటరు (1 చ. సెం.మీ.)
100 చదరపు సెంటిమీటరులు	= 1 చదరపు డెసిమీటరు (చ. డె.మీ.)
100 చ. డెసిమీటరులు	= 1 చ. మీటరు (చ. మీ.) లేక 1 సెంటి ఆర్.
100 చ. మీటరులు లేక సెంటి ఆర్‌లు	= 1 చ. డెకామీటరు (చ. డెకా. మీ.) లేక 1 ఆర్.
100 చ. డెకామీటరులు లేక ఆర్‌లు	= 1 చ. హెక్టోమీటరు (చ. హె. మీ.) లేక 1 హెక్టార్.
100 చ. హెక్టోమీటరులు లేక హెక్టార్‌లు	= 1 చ. కిలోమీటరు (చ. కి.మీ.)

భూవైశాల్యము కట్టునపుడు వాడెడి ముఖ్యప్రమాణము, చదరపు డెకామీటరు. దానికే 'ఆర్' అని పేరు. తక్కినట్టి ప్రమాణములు ఇవి:—

1 సెంటి ఆర్ (సెం. ఆ.)	= $\frac{1}{100}$ ఆర్ (ఆర్.)
1 హెక్టార్	= 100 ఆర్‌లు.
1 హెక్టార్	= $2\frac{1}{2}$ ఎకరములు (ఉజ్జాయింపుగా.)
$40\frac{1}{2}$ ఆర్‌లు	= 1 ఎకరము (ఉజ్జాయింపుగా.)

16. బ్రిటిషు ఫక్కీలోవలెనే, ఘనప్రమాణములు సాజాత్యములైన దైర్ఘ్యప్రమాణములనుండియే తీసినారు. అవి ఘనమీటరు, ఘన డెసిమీటరు, ఘన సెంటిమీటరును.

ఘనముయొక్క ప్రమాణము లేక ఘనప్రమాణము.

1000 ఘన మిల్లిమీటరులు (ఘ. మి.మీ.)	= 1 ఘన సెంటిమీటరు (ఘ. సెం.మీ.)
1000 ఘన సెంటిమీటరులు	= 1 ఘన డెసిమీటరు లేక లీటరు.
1000 ఘన డెసిమీటరులు	= 1 ఘన మీటరు.

17. పరిమాణముయొక్క ప్రమాణము.

1 ఘన డెసిమీటరగు **"లీటరు"** పరిమాణమునకు ప్రమాణము. ఇవి ఇతర ప్రమాణములు:—

1 సెంటిలీటరు (సెం.లీ.)	= $\frac{1}{100}$ లీటరు (లీ.)
1 డెసిలీటరు (డె.లీ.)	= $\frac{1}{10}$ లీటరులు.
1 డెకాలీటరు (డెకా. లీ.)	= 10 లీటరులు.
1 హెక్టోలీటరు	= 100 లీటరులు.

1 లీటరు = $1\frac{3}{4}$ పైంట్లు (ఉజ్జాయింపుగా); 1 గాలను = 4·5 లీటరులు.

18. తూనికలో ప్రమాణము ఏదో ఒకటి కాదు, అది ఘనప్రమాణమునుండియే తీసినది. అది ఒక గ్రాము. (వ్రాతలో 'గ్రా.'). అది, నిర్దిష్టములైన ఉష్ణ, భార, పరిస్థితులలో ఒక ఘన సెంటిమీటరు నిర్మలజలముయొక్క ఎత్తు.

తులామానము.

10 మిల్లిగ్రాములు (మి.గ్రా.)	= 1 సెంటిగ్రాము (సెం.గ్రా.)
10 సెంటిగ్రాములు	= 1 డెసిగ్రాము (డె.గ్రా.)

10 డెసిగ్రాములు	= 1 గ్రాము (గ్రా.)
10 గ్రాములు	= 1 డెకాగ్రాము (డెకా. గ్రా.)
10 డెకాగ్రాములు	= 1 హెక్టోగ్రాము (హె.గ్రా.)
10 హెక్టోగ్రాములు	= 1 కిలోగ్రాము (కి.గ్రా.)

1 కి.గ్రా. = $2\frac{2}{5}$ పౌ. (ఉజ్జాయింపుగా); 1 ఔన్సు = 28 గ్రాములు.

వైశాల్యము, ఎత్తు.

అభ్యాసము 6 (B)

1. (*a*) 40·6 మీ. పొడుగు, 32·5 మీ. వెడల్పును గలిగి ఆయతాకారమగు ఒక నేలకు చుట్టును 2 మీటర్ల ఎత్తున దడి కట్టినారు. ఆ దడి వైశాల్యము, చదరపు మీటర్లలో కట్టుము.

(*b*) 53 మీ. పొడుగు, 32·6 మీ. వెడల్పునుగల ఒక టెన్నిసు కోర్టు చుట్టును, 3·6 మీ. ఎత్తున కట్టిన ఇనుపవల వైశాల్యము కట్టుము.

2. (*a*) 6 మీ. 5 సెం.మీ. పొడుగును, 4 మీ. 5 డె.మీ. వెడల్పును గల ఒక ఆయతముయొక్క వైశాల్యమును ఒక చ. కి.మీ. యొక్క దశాంశముగ చెప్పుము.

(*b*) ఒక ఎకరమును ఒక చదరపు డెకామీటరుయొక్క దశాంశముగ చెప్పుము. (1 ఎకరము = 4840 చ. గజములు; 1 మీ. = 1·0936 గజములు.)

(*c*) 1 మీటరు = 39·37 అం.; ఒక హెక్టార్‌లో, అనగా 10000 చదరపు మీటర్లలో ఎన్ని ఎకరములుండునో, 3 దశాంశస్థానములకు కట్టుము.

(*d*) 1000 ఎకరముల భూమిలో ఎన్ని హెక్టార్‌లు ఉండును? (1 ఆర్ = 1 చదరపు డెకామీటరు; 1 మీ. = 39·37 అం.)

3. (*a*) 1 చ. మీ. = 1·196 చ. గజములు అనుకొనగా, ఒక చ. కి.మీ. లో ఎన్ని ఎకరములుండును? ఎకరముయొక్క భిన్నమును విసర్జింపుము.

(*b*) 1 మీ. = 39·370 అం. అని తెలిసి, 12 చ. మీ. పెద్దదో, 14 గజములు పెద్దదో కట్టుము.

(*c*) 1 మీ. = 39·370 అం. అని తెలిసి, ఒక చ. కిలోమీటరులో ఎన్ని ఎకరములుండునో కట్టుము. (సన్నిహిత పూర్ణాంకమునకు సరిగ చెప్పుము.)

(*d*) 1 మీ. = 39·3708 అం. అని తెలిసి, ఒక చ. గజమును ఒక చ. మీటరు రూపేణ, 3 దశాంశస్థానములకు సరిగ చెప్పుము.

4. ఈ క్రిందివి, కోరినట్లు చెప్పుము:—

(*a*) a హెక్టారులు $+ b$ ఆర్‌లు $- c$ చ. మీ. (చ. మీటర్లలో చెప్పుము.

(*b*) p ఆర్‌లు $+ q$ చ. మీ. $- r$ చ. డె.మీ. (చ. డె.మీటర్లలో చెప్పుము.

(*c*) $\dfrac{a \text{ చ. మీ.}}{b \text{ చ. సెం.మీ.}} + \dfrac{c \text{ సెంటి ఆర్‌లు}}{d \text{ హెక్టార్‌లు}}$.

(*d*) (p చ. మీ. $+ q$ చ. డె.మీ. $+ r$ చ. సెం.మీ. $- s$ చ. మి. మీ.) $\times 100$ (ను, ఒక మిశ్రమరాశిగా చెప్పుము.)

5. (*a*) 1 అం. = 2·54 సెం.మీ. అని తెలిసి, 1 చ. అంగుళములో ఎన్ని చ. సెం.మీటర్లో కట్టుము.

(*b*) 2·9 డె.మీ. × 240 మి.మీ. గల ఒక ఆయతముయొక్క వైశాల్యము చ. సెం.మీటర్లలో కట్టుము. అదే చ. మీటర్లలో కూడ కట్టుము.

(*c*) చతురస్రమై, 3·6 డె.మీ. భుజముగాగల ఒక అట్టనుండి, ఒక్కొక్కటి 7·4 సెం.మీ. × 36 మి.మీ. గల దర్శనలేఖ ముక్కలు ఎన్ని కోయవచ్చును?

(*d*) ఒక రకపు టావు వెడల్పు 8·82″ లేక 22·4 సెం.మీ., పొడుగు 14″ లేక 35·7 సెం.మీ. వైశాల్యము చ. అంగుళములలోను, చ. సెంటిమీటర్లలోను కట్టి, ఒక చ. అంగుళములో ఎన్ని చ. సెం.మీటర్లో, 2 దశాంశస్థానములకు సరిగ కట్టుము.

6. ఫ్రాన్సులో ఒక పొలము కిమ్మతు చ. మీటరుకు 4 ఫ్రాంకుల చొప్పున నున్నది. 1 పౌ. = 25·10 ఫ్రాంకులును, 1 హెక్టార్ = 2·47 ఎకరములును అని తెలిసి, ఆ పొలమే ఎకరము ఎంతో, ఇంగ్లీషు సొమ్ములో, పౌనునకు సరిగ కట్టుము.

7. (*a*) గ్రాము 1-కి 4·387 ఫ్రాంకులచొప్పున 11·79 గ్రాముల బంగారము కిమ్మతు ఎంత?

(*b*) కి.గ్రాము 1-కి 5·6 ఫ్రాంకులచొప్పున 843 కి.గ్రాముల కాఫీ ఖరీదు ఎంత?

(*c*) గ్రాము 1-కి ·0078 ఫ్రాంకు చొప్పున 2·386 గ్రాముల పాదరసము ఖరీదు కట్టుము.

(*d*) టికెట్టు 1-కి 32 ఫ్రాంకుల 35 సెంటైముల చొప్పున 45 టికెట్లకు ఎంత అగును?

8. (*a*) 1 ఔన్సు 28·3 గ్రాములకు సమానమని తెలిసి, 3 కి.గ్రాములనగా ఎన్ని పౌనుల ఎత్తో, 2 దశాంశస్థానములకు కట్టుము.

(*b*) ఒక మనుష్యుడు ఇంగ్లండులో 14·5 స్టోన్‌లును, ఫ్రాన్సులో 94 కి.గ్రాములున్ను తూగెను. ఏది ఎక్కువ? (1 కి.గ్రాము = $2\frac{1}{5}$ పౌనులు అనుకో.)

(*c*) 2 టన్నులు గొప్పా? 2000 కి.గ్రాములా? (1 కి.గ్రాము = $2\frac{1}{5}$ పౌనులు.)

(*d*) ఇంగ్లీషు రైళ్లమీద 60 పౌనుల "లగ్గేజి" ఊరికే పట్టుకొని వెళ్లవచ్చు; ఫ్రెంచి రైళ్లమీద, 30 కి.గ్రాములు. ఏ రైలువాళ్లు ఎక్కువ ఉదారులు?

9. (*a*) కి.గ్రాము 1-కి 4 ఫ్రాంకుల 50 సెంటైముల చొప్పున 415 ఫ్రాంకులు పెట్టి ఎన్ని కి.గ్రాముల కాఫీ కొనవచ్చు?

(*b*) కి.గ్రాము 1-కి 7·30 ఫ్రాంకుల చొప్పున 2 కి.గ్రాముల టీ, హె.గ్రాము 1-కి 44 సెంటైముల చొప్పున 3 హె.గ్రాముల కాఫీ, కి.గ్రాము 1-కి 76 సెంటైముల చొప్పున 4 కి.గ్రాముల పంచదార కొన్నచో మొత్తము ఏమగును?

(*c*) ఒక సరుకు కి.గ్రాము 1-కి 21·48 పౌ. చొప్పున కొన్నచో, 36 కి.గ్రాముల, 9 డెకాగ్రాముల, 7 గ్రాముల ఖరీదు, పౌనునకు సరిగ కట్టుము.

(*d*) 1915—16 లో, అమెరికాలో, బేలునకు 400 ఏసి పౌన్ల బరువు చొప్పున, 12,953 వేల బేళ్ల ప్రత్తి పండెను. ఈ పంట మిరియగ్రాములలో చెప్పుము. (1 పౌ. = 454 గ్రాములు.)

10. (*a*) 12 చ. సెం.మీ. ఉన్న ఒక అయోమయము (అలుమినియమ్) రేకుయొక్క బరువు 2·5 గ్రాములు. ఎంత వైశాల్యముగల రేకు ఒక కి.గ్రాము తూగును?

(*b*) 4 చ. సెం.మీ. ఉన్న ఒక లోహపు రేకుయొక్క బరువు 12 గ్రాములు. ఆ రేకువంటిదే విషమాకారము గలది 16·6 గ్రాములు తూగినచో, దాని వైశాల్యమెంత?

11. ఒకానొక వస్తువు ఇంగ్లండులో పౌను 9 పె. చొప్పునను, ఫ్రాన్సులో కి.గ్రాము 2 ఫ్రాంకుల 80 సెంటైముల చొప్పునను అమ్మును. ఇంగ్లండులో 1 గినీకి దాని తాలూకు ఎంతవచ్చునో, అంతయు ఫ్రాన్సులో కొనవలసినచో, ఖరీదులలో తేడా, షిల్లింగులలో కట్టుము. [1 పౌ.=25 ఫ్రాంకులు.; 1 కి.గ్రా.= $2\frac{1}{5}$ పౌ.]

12. ఒక వస్తువుమీద, ఫ్రాన్సులో కి.గ్రామునకు 3 ఫ్రాం. 76 సెం. చొప్పున పన్ను. ఇదే పౌనునకు ఎన్ని అణాలో, అణాకు సరిగ కట్టుము. [1 పౌ.= 455 గ్రాములు; $10\frac{1}{2}$ రూ. = 1 పౌ. =25·10 ఫ్రాంకులు.]

13. 1916-17 లో ఇండియాలో, మొత్తము సాగు నేల 79,700,000 ఎకరములకును పండినది, 34,079,000 టన్నుల ధాన్యము. ఇదే హెక్టార్ 1-కి ఎన్ని టన్నీలో, సన్నిహిత పూర్ణాంకమునకు కట్టుము. [1 హెక్టార్ = 2·47 ఎకరములు; 1 టన్నీ = ·984 టన్ను.]

14. ఒక లోహపురేకు చదరపు అంగుళము 1-కి $\frac{1}{2}$ ఔన్సు తూగును. ఇది చ. మీటరుకు ఎన్ని హె.గ్రాములు తూగును? [1 మీటరు = 40 అంగుళములు; 1 కి.గ్రా.= $2\frac{1}{5}$ పౌనులు.]

15. 2 అడుగులు × $1\frac{1}{2}$ అడుగులు ఉన్న ఒక అద్దమునకు కళాయి పెట్టించుటకు ఖర్చు 3 రూ. చ. మీటరుకు ఎన్ని ఫ్రాంకులు అగును? [1 మీటరు= 39·4 అంగుళములు; 25 ఫ్రాంకులు = 1 పౌ.= 16 రూపాయలు.]

16. (*a*) 1916–17 లో ఇండియాలో, పట్టాల ఎడము 5 అ. 6 అం. గల "బ్రాడ్ గేజి" రైలుమార్గము పొడుగు 18182 మైళ్లు. ఈ రైల్వే ఎంత వైశాల్యము ఆక్రమించెనో హెక్టార్లలో, హెక్టారునకు సరిగ కట్టుము. [1 హెక్టార్ = 2·47 ఎకరములు.]

(*b*) 1916-17 లో, ఇండియాలో, "మీటరు గేజి" రైలుమార్గము పొడుగు 14806 మైళ్లు. ఈ రైల్వే ఎంత వైశాల్యము ఆక్రమించెనో, చదరపు కిలోమీటర్లలో చెప్పుము. [1 కి.మీ. = 0·621 మైలు.]

(*c*) "కార్టూము" నకు వేసిన "సుడాన్ మిలిటరీ రైల్వే" పట్టాల ఎడము 3 అ. 6 అం., పొడుగు 375 మైళ్లు. ఈ రైల్వే ఎంత వైశాల్యము ఆక్రమించెనో, హెక్టారునకు సరిగ కట్టుము. [1 హెక్టార్ = 2·47 ఎకరములు.]

17. (*a*) 1 పౌ. = 25 ఫ్రాంకులు అనియు, $40\frac{1}{2}$ ఆర్లు = 1 ఎకరము అనియు తెలిసి, హెక్టార్ 1-కి ఇన్ని ఫ్రాంకులు అని ఇచ్చిన ఒక భూమి

ఖరీదు, దేనిచే గుణించినచో, ఆ లబ్ధమన్ని పౌనులు ఆ భూమి తాలూకే 1 ఎకరము ఖరీదు అగును?

(*b*) 1 కి.గ్రా. = $2\frac{1}{5}$ పౌ., 1 పౌ., (సొమ్ము)=25 ఫ్రాంకులు అనియు తెలిసి, కిలోగ్రాము 1-కి ఇన్ని ఫ్రాంకులు అని ఇచ్చిన ఒక వస్తువు ఖరీదు, దేనిచే గుణించినచో ఆ లబ్ధమన్ని షిల్లింగులు ఆ వస్తువు తాలూకు 1 పౌను ఖరీదు అగును?

18. ఈజిప్టులో భూమికొలతకు ప్రమాణము 7468·148 చదరపు పిక్కులు, 1 చదరపు పిక్కు = 0·5628 చ. మీటరు. 1 హెక్టార్ = 2·47 ఎకరములు అని తెలిసి, ఈజిప్టు భూప్రమాణమును ఎకరములలో, 5 దశాంశములకు సరిగ కట్టుము.

19. 1916 లో, ఇటలీలో పుట్టిన పట్టు పుట్టినట్లుగా, 3,612,000 కిలోగ్రాములు. ఈ ఉత్పత్తిని కొన్నివేల పౌనులుగా చెప్పుము. [1 కి.గ్రా.= 2·20 పౌనులు.]

20. 1913 లో, జర్మనీలో, పశువులతో సహా 618,351,000 మెట్రిక్ టన్నుల సరుకులు, మొత్తముమీద 2,213,200,000 మార్కుల చార్జికి కొనిపోబడెను. 1 పౌను = 20·45 మార్కులనియు, 1 మెట్రిక్ టన్ను = ·984 టన్ను అనియు అనుకొని, ఇంగ్లీషు సొమ్ములో, ఈ చార్జి టన్నునకు ఎంతగునో, పెన్నీకి సరిగ కట్టుము.

ఘనము, పరిమాణము, బరువు, సాటి బరువు.

అభ్యాసము 6 (C)

1. (*a*) 315064048756 ఘ. డె.మీటర్లను ఘ. మీటర్లు వగైరా మిశ్రమరాశిగా చెప్పుము.

(*b*) 6250836938 మి.గ్రాములను కి.గ్రాములు వగైరా మిశ్రమ రాశిగా చెప్పుము.

(*c*) 375 లీ. 4 డె. లీటర్లను హె.లీటర్లలోనికి మార్చుము.

(*d*) 63 హె.లీటర్లను 3·561 రెట్లు, లీటర్లుగా చెప్పుము.

2. (*a*) తారతమ్య గరిమ 2·5 గల అయోమయము, 32 ఘ. సెం.మీటర్ల ఎత్తు ఎంత!

(*b*) తా. గ. 19 గల బంగారు, 3·48 ఘ. సెం. మీటర్ల ఎత్తు ఎంత?

(*c*) తా. గ. 10·4 గల వెండి, 36·22 ఘ. సెం.మీటర్ల ఎత్తు ఎంత?

(*d*) తా. గ. 11·4 గల సీసము, 64·88 ఘ. సెం.మీటర్ల ఎత్తు ఎంత?

3. (*a*) 8·56 మీ. పొడుగు, 6·35 మీ. వెడల్పు, 4·73 మీ. లోతు గల ఒక తొట్టిలోని నీటి ఎత్తు ఎన్ని కి.గ్రాములు?

(*b*) 9·35 మీ. పొడుగు, 5·68 మీ. వెడల్పు, 3·78 మీ. ఎత్తుగల ఒక గదిలోని గాలి ఎన్ని లీటర్లు?

(*c*) ఘనాకారమైన ఒక ఇనుపముక్క అంచు ·95 డె.మీ. ఇనుముయొక్క తా. గ. 7. దాని బరువు ఎన్ని కి.గ్రాములు?

(*d*) హె.లీటరు 1-కి 45 ఫ్రాంకుల చొప్పున 648 లీటర్ల సారాయి ఖరీదు ఎంత?

4. ఒక రయితు 9 హె.లీ. 70 లీటర్ల గోధుమలు 96 ఫ్రాంకుల 90 సెంటైములకు అమ్మెను. హెక్టోలీటరు 1-కి అతనికెంత వచ్చినది?

5. (*a*) తా. గ. b గల ఒక ద్రవము a లీటర్లు ఎంత బరువు?

(*b*) ఒక స్వరూపము బరువు s గ్రాములు. దాని తా. గ. t. దాని ఘనమెంత?

(*c*) ఒక పదార్థముయొక్క ఘనము v ఘ. సెం.మీ., బరువు w గ్రాములు. దాని తా. గ. ఎంత?

(*d*) ఒక పదార్థముయొక్క ఘనము, బరువు, తా. గ. క్రమముగా p ఘ. సెం.మీ. q గ్రాములు, r. p, q, r లను బంధించు సూత్రమును కట్టుము.

6. ఒక పదార్థములోని 1 ఘ. సెం.మీ. బరువు 0·026342 గ్రాము. దాని తాలూకు 1 లీటరు బరువు కట్టుము.

7. ఒక చెరువు 48·3 పౌనుల నీరు పట్టును. లీటర్లలో దాని ఘనము కట్టుము. [1 కి.గ్రా. = 2·20 పౌనులు.]

8 (*a*) 1 అం. = 25·4 మి.మీ. అని తెలిసి, 1 ఘ. అంగుళములో ఎన్ని ఘ. సెం.మీటర్లో, 3 దశాంశస్థానములకు సరిగ కట్టుము.

(*b*) 1 ఘ. అడుగులో ఎన్ని ఘ. డె.మీటర్లు ఉన్నవి? [1 అం. = 2·54 సెం.మీ.]

(*c*) 0·75 లీటరు, 600 మి. లీటర్లు, 0·6 డెకాలీటరు, 70 డె. లీటర్లు—వీటి మొత్తము ఘ. సెం.మీటర్లలో ఎంత?

(*d*) ·007 ఘ. డె.మీటరునకును 0·7 లీటరునకును తేడా ఎంత?

9. (*a*) ఒక చెరువు 9 డె.మీ. × 75 సెం.మీ. × 600 మి.మీ. ఉన్నది. అందులో ఎన్ని లీటర్ల నీరు పట్టును.

(*b*) ఒక చెరువు పొడుగు 2·8 మీ., వెడల్పు 180 సెం.మీ., ఒక డెకాలీటరు ఘనముగల ఒక గాజుబుడ్డితో 324 బుడ్లు నీరు పోసినచో, చెరువు నిండును. దాని లోతు ఎంత?

(*c*) ఒకొక్క లాంపులోనికి రోజునకు $\frac{1}{4}$ పైంటు నూనె కావలసినచో, ఒక హె.లీటరు నూనె 18 లాంపులలోనికి ఎన్నాళ్లువచ్చును? [1 లీటరు = 1·76 పైంట్లు.]

10. (*a*) ఒక ఖాళీ గాజుబుడ్డి బరువు 72 గ్రాములు, నిండా నీరున్నప్పుడు 215 గ్రాములు. దాని పరిమాణమెంత?

(*b*) ఒక 60 ఘ. సెం.మీటర్ల బుడ్డి, నిండా నీరున్నప్పుడు 80 గ్రాములు తూగును. దాని బరువెంత?

(*c*) ఒక చెరువునీరు బరువు 73·4 పౌనులు. దాని ఘనము లీటర్లలో కట్టుము. [1 కి.గ్రా. = 2·2 పౌ.]

(*d*) 1 గాలను నీటిబరువు 10 పౌనులనియు, 1 ఔన్సు 28·35 గ్రాములకు సాటి అనియు తెలిసి, 1 గాలనులో ఎన్ని లీటర్లో కట్టుము.

11. (*a*) ఒక జిల్లాలో 4·75 సెం.మీటర్ల వాన కురిసినది. ఒక అంగుళము $2\frac{1}{2}$ సెం.మీ., అనుకొని, 1 ఘ. అడుగు నీటిబరువు $62\frac{1}{2}$ పౌనులు అనుకొని, ఎకరమునకు ఎన్ని టన్నుల నీరు కురిసినదో, వందలకు సరిగ కట్టుము.

(*b*) ఒక జిల్లాలో 4·75 సెం.మీటర్ల వాన కురిసినది. ఇది హెక్టారుకి ఎన్ని లీటర్లు?

12. ఆల్జీరియాలో ఒకప్పుడు తీసిన సారా మొత్తము 731,000 హె. లీటర్లు. 1 హె.లీటరు అనగా 26·4 గాలనులు. ఆ మొత్తము ఎన్ని గాలనులు?

13. 1916 లో, యునైటెడ్ స్టేట్సులో తీసిన పెట్రోలియము మొత్తము 300,700,000 పీపాలు. పీపా 1-కి 42 గాలనులు పట్టును. ఈ పంట హె.లీటర్లలో చెప్పుము. [1 లీటరు = 0·220 గాలను.]

14. లీటరు 1-కి రూ. 2—9—6 చేసెడి ఒక ద్రవముతో, 4 అ. 6 అం., × 2 అ., 9 అం., × 2 అ., 6 అం. ఉన్న ఒక చెరువును నింపుటకు ఎంత అగునో, రూపాయకు సరిగ కట్టుము. [1 అం. = 2·54 సెం.మీ.]

15. 1 లీటరు = ·220 గాలను. ఇన్ని గాలనులు అని ఇచ్చినప్పుడు, వాటిని ఏ గుణకముచే గుణించినచో అవి లీటర్లుగా మారును? x గాలనులు $= y$ లీటర్లు అని తెలిసి, x, y లకు సంబంధము కట్టుము.

16. 1 ఘ. సెం.మీ. = 0·0610 ఘ. అం. ఇన్ని ఘన అంగుళములు అని ఇచ్చినప్పుడు, వాటిని ఏ గుణకముచే గుణించినచో అవి ఘ. సెంటిమీటర్లుగా మారును? x ఘ. అం. $= y$ ఘ. సెం.మీ. అని తెలిసి, x, y లకు సంబంధము కట్టుము.

17. 1 పౌ. = 25 ఫ్రాంకులు, 1 లీటరు = $1\frac{7}{8}$ పైంట్లు అని తెలిసి, ఒక ద్రవము లీటరు 1-కి ఇన్ని ఫ్రాంకులు అని ఇచ్చిన ఖరీదును దేనిచే గుణించినచో ఆ లబ్ధ మన్ని పెనులు ఆ ద్రవమునకే గాలను 1-కి ఖరీదు అగును?

18. టర్కీలో, 100 కైల్సు = 12·128 బ్రిటిషు సామ్రాజ్యపు క్వార్టర్లు = 35·266 హె.లీటర్లు. "కైలు" అనునది టర్కీలో ధాన్యము తూచుటకు ప్రమాణము. పై సంబంధములబట్టి బ్రిటిషు, ఫ్రెంచి ప్రమాణముల సాపత్యము కట్టుము.

అధ్యాయము VII.

సరళరేఖలు, కోణములు, వృత్తములు, సరళరేఖల సమద్విఖండనము, కోణముల సమద్విఖండనము, లంబములను గీయుట, సమాంతరములను గీయుట, రేఖాగణితములోని కొన్ని ముఖ్య సిద్ధాంతములు.

సరళ రేఖలు.

19. కొలామానములు. — రేఖలను కొలుచుటకు రేఖాప్రమాణమగు ఒక అంగుళమును, తక్కువరేఖలను కొలుచుటకు మరియొక ప్రమాణమగు సెంటిమీటరును వాడుదురు.

అభ్యాసము 7 (A)

1. ఒక సరళరేఖ, AB, గీయుము. దానిపై ఒక బిందువు, X, చేయుము. AX, XB మరి AB లు కొలిచి, AB=AX+XB అని సరిచూపుము.

2. ఒక సరళరేఖ, AB, గీయుము. AB ని పెంచి, ఆ పెంపకముపై ఒక బిందువు, X, చేయుము. AX, XB మరి AB లు కొలిచి, AB=AX—XB అని సరిచూపుము.

3. ఒక సరళరేఖ, ACDB, గీయుము. AC, CD, DB మరి AB లలో ప్రతిదానిని తక్కినవాటి రూపేణ చెప్పుము. కొలిచి సరిచూపుము.

4. AC=5·4 సెం.మీ., CB=3·2 సెం.మీ. మరి AB=8·6 సెం.మీ. A, B, C అను బిందువుల స్థితినిగూర్చి నీవు ఏమి చెప్పగలవు?

5. AC=3·8 సెం.మీ., CB=6·2 సెం.మీ. మరి AB=7·5 సెం.మీ. A, B, C అను బిందువుల స్థితినిగూర్చి నీవు ఏమి చెప్పగలవు?

6. ఒక రేఖ, AB, 10 సెం.మీ. పొడుగు గీయుము. అది ఎన్ని అంగుళములో కొలువుము. తద్వారా, అంగుళములో ఏ భాగము 1 సెం.మీటరునకు సమానమో కట్టుము. AB పొడుగు, క్రమముగ 8 సెం.మీ., 5 సెం.మీ. మరి 9 సెం.మీ. అయినప్పుడు కూడ పై మాదిరిగ కట్టి చూడుము.

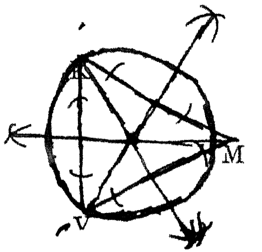
7. ఒక రేఖ, AB, 4·5 అం. పొడుగు గీయుము. అది సెం.మీ.లలో కొలువుము. తద్వారా, ఎన్ని సెం.మీ.లు ఒక అంగుళమో కట్టుము. AB పొడుగు, క్రమముగ 5·3 అం., 3·6 అం., మరి 4·7 అం. అయినప్పుడు కూడ పై మాదిరిగ కట్టి చూడుము.

8. ఏదో రేఖ, XY, గీయుము. అది అంగుళములలోను, సెం.మీ.లలోను కూడ కొలువుము. తద్వారా, ఎన్ని సెం.మీ. ఒక అంగుళమునకు సమానమో, ఈ రెండును తిరుగవేసిన రెంతో కట్టి, ఈ ఫలితములు 6, 7 ప్రశ్నల ఫలితములతో పోల్చి చూడుము.

9. మెడ్రాసునుండి ఆర్కోణము 42 మైళ్లు. 10 మైళ్లకు ఒక అంగుళము ప్రమాణముతో, ఆ దూరముయొక్క నమోనా గీసి, మెడ్రాసునుండి 26 మైళ్లు ఉన్న తిరువళ్లూరుయొక్క స్థితి దానిమీద చూపుము.

10. ఈ ప్రక్క బొమ్మలోని రేఖలను కొలిచి, మైలునకు 16″ ప్రమాణమైనప్పుడు, అసలు దూరములను కట్టుము.

11. ఈ క్రింది బొమ్మలో M, K, V అను మూడు నగరుల అన్యోన్య స్థితి తెలియును. 80 మైళ్లకు 1 అం. ప్రమాణమైనప్పుడు, అవి అసలు పరస్పరముగ ఎంత దూరమున నున్నవో కట్టుము.

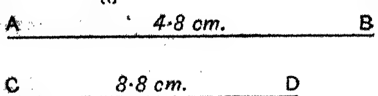


12. ఒక సరళరేఖ, AB, 1·4 అం. పొడుగు గీయుము. AC=3 AB ఉండునట్లు, మరొక సరళరేఖ AC గీయుము. ఏ సాధనము వాడుదువు? అది చేయుటకు ఇతరమార్గ మేదైన ఉన్నదా?

13. ఒక సరళరేఖ, AB, 3·5 అం. పొడుగు గీయుము. అది 5 సమ భాగములుగ భాగించి, ఒకొక్క భాగము పొడుగు కట్టుము. ఏ సాధనము వాడుదువు? అది చేయుటకు ఇతరమార్గ మేదైన ఉన్నదా?

14. క్రమముగ, 4·8 మరి 3·8 సెం.మీ. కొలత ఉన్న AB, CD లను గ. సా. ప్ర. విభాగినితో ఎట్లు కట్టుదువు?

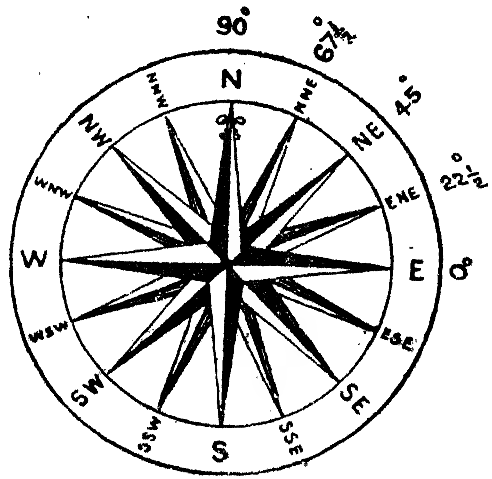
15. గళ్లకాగితముమీద ఒకే నిడుపురేఖపై రెండు బిందువులు A, B తీసికొనుము. A మీదుగా ఉన్న మట్టపు రేఖపై 2·8 అం. ఎడమున ఎర్ర పెన్సలుతో గుర్తులు పెట్టుము. B మీదుగా ఉన్న మట్టపురేఖపై 2·1 అం. ఎడమున నీలి పెన్సలుతో గుర్తులు పెట్టుము. ఇట్లు పెట్టుచుబోయి, ఏ నిడుపురేఖపై రెండు రంగుల బిందువులును ఉండునో చూచి, ఎంతెంత ఎడములో అట్టి రేఖలుండునో కట్టుము.



పటము 6.

కోణములు.

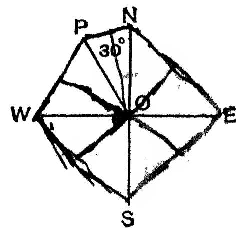
20. సముద్రీదిగ్దర్శకమును పరించినచో, ఉత్తరము (N) తూర్పు (E) లకును, తూర్పు (E) దక్షిణము (S) లకును, దక్షిణము (S) పడమర (W) లకును,



పటము 7.

పడమర (W) ఉత్తరము (N) లకును మధ్యకోణములు సమకోణములని తెలియును. N. E. దిక్కు N. తో 45° ను E. తో 45° ను చేయును; అట్లే, S. E. దిక్కు S. తోను E. తోను 45° చొప్పున చేయును; S. W. దిక్కు S. తోను W. తోను 45° చొప్పునను, N. W. దిక్కు N. తోను W. తోను 45° చొప్పునను చేయును.

ఈ ప్రక్క బొమ్మలో P అను బిందువు N కు 30° పడమర వాలుగాని, W కు 60° ఉత్తరము వాలుగాని, ఉన్నదని చెప్పవచ్చును.



పటము 8.

అభ్యాసము 7 (B)

1. ఒక సరళరేఖ, AB, గీయుము. దానిలో ఒక బిందువైన C నుండి, ఒక సరళరేఖ CD గీయుము. ACD, BCD కోణములు కొలు

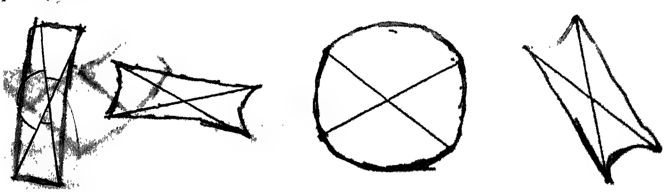
వుము. వాటి మొత్తము కట్టుము. CD అనేక దిక్కులకు గీసి, తక్కిన చర్య రెట్టింపుము.

తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—ఒక సరళ రేఖ మరియొక దానిపై నిలిచినచో, అప్పుడు ఏర్పడెడి రెండు సన్నిహిత కోణములయొక్కయు మొత్తము రెండు సమకోణములు.

2. ఈ కోణముల జోడాలు గీయుము, $140°$, $40°$; $120°$, $60°$; $80°$; $100°$; $75°$, $105°$ ను. వీటిని కత్తిరించుము. వీటిలో ఒకొక్క జోడు తీసికొని, వాటి శీర్షములను ఏకీభవింపజేసి, ఒకదానియొక్క ఒక భుజము, రెండవదాని ఒక భుజమును స్పృశించునట్లు పెట్టుము. కడమ రెండు భుజములును స్పృశించినవాటికి చెరియొక పెడను ఉన్నచో, వాటినిగూర్చి ఏమి చెప్ప గలవు?

తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—రెండు సన్నిహిత కోణముల మొత్తము రెండు సమకోణములై, వాటి తాలూకు రెండు భుజములు స్పృశించి, వాటి కడమ రెండు భుజములును స్పృశించిన వాటికి చెరియొక పెడను ఉన్నచో, ఈ కడమ రెండును కేవలము ఒకే గీత.

3. రెండేసి అన్యోన్య ఖండిత రేఖలుగల ఈ క్రింది సందర్భములలో, అభిముఖ కోణములను కొలువుము:—

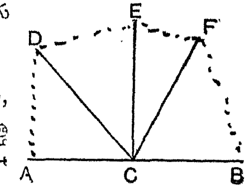


పటము 9.

నీవు గమనించునది ఏమి? తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—**రెండు సరళ రేఖలు ఒకదానినొకటి ఖండించినచో, అభిముఖకోణములు సమానములు.**

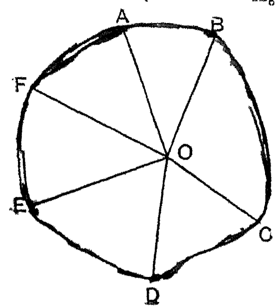
4. రెండు అధికకోణములు గీయుము. వాటిని కొలిచి, వాటి మొత్తము కట్టుము. వాటి మొత్తము రెండు సమకోణములకు తక్కువ ఎన్నడును ఉండదని సరిచూపుము.

5. ఈ ప్రక్క బొమ్మలో, ACD, DCE, ECF, FCB కోణములు కొలువుము. వాటి మొత్తము ఎంత? CD, CE, CF లను తదితర స్థితులలో గీసి మరల అట్లే కొలువుము. నీవు తీయుగల సారమేమి?



పటము 10.

6. ఈ ప్రక్క బొమ్మలో AOB, BOC, COD, DOE, EOF మరి FOA కోణములను కొలువుము. వాటి మొత్తము ఎంత? OA, OB, OC, OD, OE మరి OF లను తదితర స్థితులలో గీసి పై చర్య రెట్టించి, మొత్తమును కట్టుము. నీవు గమనించినదానిని బట్టి ఊహింపగల సర్వసామాన్య సత్యమేది?



పటము 11.

7. ఈ క్రింది కోణములకు పూరకములను, సంపూరకములను కట్టుము:— $47° 13'$, $68° 12'$, $18° 23'$, $82° 14'$ మరి $x° y'$ ($x \angle 90$, $y \angle 60$ అని తెలిసి.)

8. ఒక చక్రమునకు 12 ఆకులు ఉన్నవి. ప్రతి ఆకును దాని ప్రక్క ఆకుతో ఎంత కోణము చేయును?

9. రెండు సరళరేఖలు ఒకదానినొకటి ఖండింపగా ఏర్పడు కోణములలో ఒకటి $x°$. తక్కిన ప్రతిదానియొక్కయు విలువ కట్టుము. $x = 38° 45'$ అని తెలిసి, తక్కిన ప్రతిదియు ఎంతెంత?

10. 5-వ ప్రశ్న తాలూకు బొమ్మలో, $\angle ACD = 18°$, $\angle DCE = 32°$, $\angle ECF = 40°$, $\angle FCB$ కట్టుము.

11. 6-వ ప్రశ్న తాలూకు బొమ్మలో, $\angle AOB = 32°$, $\angle BOC = 35°$, $\angle COD = 28°$, $\angle DOE = 40°$ మరి $\angle EOF = 60°$. $\angle FOA$ ఎంత?

12. ఒక సర్వేదారు, తన స్థానము, O, నుండి తన దిక్సూచక యంత్రమును A అను స్థానమునకు సూటిగపట్టి, ఆ దిశ ఆధారముగ బిగించి, పిమ్మట, సూచ

కమును B అను స్థానమునకు సూటిగపట్టి AOB కోణము 60° 45′ 35″ అని యంత్రమువల్ల కట్టెను. తరువాత యంత్రమును ఆతడు C కేసి పెట్టగా, సూచకము 121° 35′ 57″ మీద పడెను. అదే దారిని ఆతడు గిర్రున తిరిగి సూచకమును మరల A కు సూటిగ పట్టగా, సూచకము 359° 59′ 47″ పై ఉండెను. అతడు గమనించినదానిలో తప్పు ఎక్కడ? మొదటి రెండు లెక్కలును సరియైనవే అని తెలిసి, AOB, BOC, COA ల అసలు విలువలు కట్టుము.

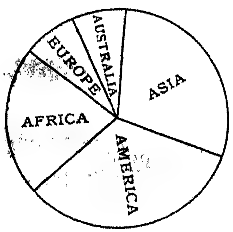
13. ఒక నిమిషపుముల్లు ఈ క్రింది కాలములలో ఎన్నెన్ని డిగ్రీలు తిరుగును:—(1) $\frac{5}{12}$ గంట, (2) 35 నిమిషములు, (3) $\frac{3}{8}$ గంట, (4) 45 నిమిషములు.

14. క్రమముగ 75°, 180°, 135°, 275° మరి 350° తిరిగివచ్చుటకు నిమిషపుముల్లునకు ఎంతెంత కాలము పట్టును?

15. ఒక 'వాచీ' యొక్క గంట నిమిషపుముల్ల మధ్యకోణము, 12.15, 3.30, 1.20, 11.45, 7.35, మరి 9.45 టైము అయినప్పుడు ఎంతెంత ఉండును?

16. ఒక నూతికి ఉన్న గిలకచక్రము, చేదెడు నీళ్లు పైకి వచ్చేటప్పటికి, 12 సార్లు గిరగిరా తిరుగును. ఆ గిలక ఎన్ని డిగ్రీల కోణముచేయునో కట్టుము. తోడుటకు పట్టెడికాలము 15 సెకన్లు అయినచో, ఒక సెకనులో ఆ చక్రము ఎన్ని డిగ్రీలు తిరుగును?

17. వివిధ భూఖండముల వైశాల్యములు ఈ ప్రక్క బొమ్మలోని వృత్తఖండములచే చిహ్నితమైనవి. వాటి తాలూకు కేంద్రమువద్దనున్న నాలుగు కోణములను కొలిచి, అయిదవది కట్టుము.



పటము 12.

18. ఒక కోణము గీయుము. దానిని కోణమితితో కొలువుము. దానిపై ఒకొక్కచోట రెండేసి సంఖ్యలు ఉన్నవి. వాటిలో ఒకటే స్వీకరించి, రెండవది నీవు ఎందుకు విసర్జించితివి? స్వీకరించిన సంఖ్యయు, విసర్జించిన సంఖ్యయు మొత్తమెంత? దీనినిబట్టి నీవేమి ఊహింతువు?

19. నావికుని దిగ్దర్శినిలో N. N. E., S. E. రేఖలకును; N. E., S. W. రేఖలకును; E., N. W. రేఖలకును; E., S. W. రేఖలకును; S. E., N.

N. E. రేఖలకును మధ్యనున్న కోణములను కట్టుము. ప్రతి సందర్భమునను తక్కువ కోణమునే చెప్పుము. పైగా, దానిలో ఏయే దిక్కులమధ్య ఈ దిగువ కోణములుండునో కట్టుము:—

70°, 48°, 89°, 157°, 272°, 114°, 306°, 357° (ప్రతి కోణముయొక్కయు ఒక భుజము N. అనుకొని చేయుము.)

20. ఇద్దరు ఒకేబిందువునుండి బయలుదేరి, క్రమముగ సరిగా తూర్పునకును సరిగా పడమరకును, 6 మైళ్లును 4 మైళ్లును సాగి, అక్కడ క్రమముగ ఉత్తరమునకును దక్షిణమునకును తిరిగి, అక్కడనుండి $4\frac{1}{2}$ మైళ్లును 3 మైళ్లును నడచిరి. ఆరంభమునుండి, ఒకొక్కడు ఎంతలో నున్నాడు? తద్వారా, ఇప్పటి వారి స్థానములు మూలబిందువుతో ఒకేగీత చేయునని నిర్ధరింపుము. (ప్రమాణము 2″=1 మైలు.)

21. 13 అ. పొడుగు ఉన్న ఒక నిచ్చెన, దిగువకొన గోడనుండి 5 అ. ఎడమున ఉండునట్లు, ఒక గోడకు వేసియున్నది. అది గోడతో ఎంత కోణము చేయును?

22. ఒక హాలు 16′ × 12′. ఎదురుమూలల దూరములు కట్టుము. 4 అడుగులకు 1 అంగుళము ప్రమాణముతో గళ్లకాగితముమీద దాని నమోనా ఒకటి గీసి, తద్వారా ఐ మూలరేఖల ఖండన బిందువు, ఒకొక్క మూలనుండి ఎంత దూరమున నున్నదో కట్టుము. ఖండనబిందువువద్ద కోణములను కొలువుము.

23. ఒక ఓడ ఒక నౌకాశ్రయమగు A, వద్ద బయలుదేరి, ఉత్తరముగ నడచెను. మరియొకటి ఇంకొక నౌకాశ్రయమగు B, వద్ద బయలుదేరి, తూర్పుగ నడచెను. రెండును ఎదురుపడినప్పుడు, ఆ ఒకటి A నుండి 80 మైళ్లును, ఆ మరియొకటి B నుండి 60 మైళ్లును ఉండెను. నౌకాశ్రయములగు A, B లమధ్య దూరమెంత?

24. ఒక నౌకాశ్రయమగు A, నుండి ఒక ఓడ, S, ఉత్తరమునకు 30° పడమరవాలుగనుండి, A కి $3\frac{1}{2}$ మైళ్లు పడమటనున్న ఒక బిందువు, B, నుండి ఉత్తరమునకు 40° తూర్పువాలుగ నున్నది. ప్రమాణపటము గీసి A, B లనుండి S యొక్క దూరములు కట్టుము.

25. ఒక త్రిభుజము (Δ) ABC గీయుము (ఒకేరేఖలో పడకుండ మూడు బిందువులు A, B, C తీసికొని). దాని కోణములు కొలిచి, వాటి మొత్తము కట్టుము. అనేక త్రిభుజములు గీసి ఈ చర్య రెట్టింపుము. తద్వారా,

ఇది గ్రహింపుము:—**"త్రిభుజమునకుగల మూడు కోణములయొక్కయు మొత్తము రెండు సమకోణములు."**

26. ఒక △ ABC లో, ∠ A = 60°, ∠ B = 80°. C విలువ ఎంత?

27. ఒకే త్రిభుజమునకు రెండు అధిక కోణములుండునా? ఉండనిపక్షమున కారణము?

28. **(1)** ఒక సమకోణ త్రిభుజమునకును, **(2)** ఒక అధికకోణ త్రిభుజమునకును ఎన్నేసి న్యూనకోణములు ఉన్నవి?

29. ABCD ఏదో ఒక చతుర్భుజము. (ఏ మూడును ఒకే రేఖలో పడకుండ, ఏవో నాలుగు బిందువులను చేసి, వాటిని సక్రమముగ కలుపుము.) AC గీయుము. △ ABC తాలూకు మూడు కోణములయొక్కయు మొత్తమెంత? అట్లే, △ ACD తాలూకు మూడు కోణములయొక్కయు మొత్తమెంత? తద్వారా, చతుర్భుజముయొక్క నాలుగు కోణములయొక్కయు మొత్తమును గురించి నీవేమి చెప్పగలవు? చతుర్భుజముయొక్క నాలుగు కోణములను కొలిచి, ఆ కొలతలను కలిపి, పై సంగతి సరిచూపుము.

30. మరి రెండో ఎక్కువో చతుర్భుజములు గీసి, 29-వ ప్రశ్నలోని చర్య రెట్టింపుము. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—**"ఒక చతుర్భుజమునకుగల నాలుగు కోణములయొక్కయు మొత్తము నాలుగు సమకోణములు."**

31. ఒక పంచభుజము, ABCDE, గీయుము. (ఏ మూడును ఒకే రేఖలో పడకుండ, ఏవో అయిదు బిందువులను చేసి, వాటిని సక్రమముగ కలుపుము.) AC, AD లు గీయుము. బొమ్మ ఎన్ని త్రిభుజములైనది? ప్రతి త్రిభుజపు మూడు కోణములయొక్కయు మొత్తము రెండు సమకోణములు గదా, ఈ పంచభుజము మూడు త్రిభుజములైనది గదా, పంచభుజమునకుగల అయిదు కోణములయొక్కయు మొత్తమెంత? దానియొక్క అయిదు కోణములను కొలిచి, ఆ కొలతలను కలిపి, పై సంగతి సరిచూపుము.

అనేక పంచభుజములు గీసి, పై చర్య రెట్టించి, తద్వారా ఇది గ్రహింపుము:—**"ఒక పంచభుజమునకుగల అయిదు కోణములయొక్కయు మొత్తము ఆరు సమకోణములు."**

32. ఒక షట్భుజము గీయుము. (ఏ మూడును ఒకేరేఖలో పడకుండ, ఏవో ఆరు బిందువులను చేసి, వాటిని సక్రమముగ కలుపుము.) ఏదో ఒక శీర్షమును, సన్నిహిత శీర్షములతో తప్ప, తక్కినవాటితో కలిపి, బొమ్మను

కొన్ని త్రిభుజములుగా ఛేదింపుము. అప్పుడు ఏర్పడు త్రిభుజముల కోణములనుబట్టి, షట్భుజమునకుగల కోణములయొక్క మొత్తమును కట్టుము.

వృత్తములు.

21. వృత్తములయొక్క జ్యాలు. ఒక వృత్తపరిధిపై ఏవో రెండు బిందువులను కలిపినచో, ఒక "జ్యా" ఏర్పడి, పరిధిని రెండు "చాపములు" అను అసమభాగములుగ విడగొట్టును. AB ఒక వృత్తముయొక్క "జ్యా" అనుకో. దాని భాగములు ఒకదాని నొకటి కప్పి, A పై B పడునట్లు ఆ వృత్తమును మడువుము. ఆ మడత ఒక వ్యాసము. అది 'జ్యా'ను లంబితముగ సమద్విఖండనము చేయును. అనేక 'జ్యా'లతో ఈ చర్య రెట్టింపుము. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—**ఒక 'జ్యా'కు లంబిత సమద్విఖండన రేఖ కేంద్రముమీదుగ నుండును.**

ఒకేకేంద్రముగల వృత్తములు 'ఏకకేంద్ర వృత్తములు' అనబడును.

అభ్యాసము 7 (C)

1. 20 గజముల త్రాటితో, ఒక ఆవును ఒక పచ్చికబయలున గుంజకు కట్టిపెట్టినారు. పటము గీయుటకు వీలునుబట్టి ఏదో ఒక ప్రమాణము పుచ్చుకొని, అది మేయుటకు వదలిన మేరను మాదిరిగ చూపుము.

2. 1-వ ప్రశ్నలోని త్రాడు 8 గ. తగ్గినది. అందువల్ల మేసెడిమేర ఎంత తగ్గినదో ఆ బొమ్మలోనే, నలుపుచేసి చూపుము. నలుపుచేసిన భాగమునకు వివిధ స్థలములలో అడ్డకొలత ఎంత?

3. ఒక కొయ్యకు ఒక ఆవు ఒక గొఱ్ఱెపిల్లయు, క్రమముగ, 20 గజముల 10 గజముల త్రాళ్లతో కట్టి ఉన్నవి. రెండును కూడ త్రాళ్లపొడుగును పూర్తిగ సార్థకపరచుకొనెను అనుకొని, (1) వాటి అధమదూరమును, (2) మహత్తమ దూరమును మాదిరి గీసి చూపుము.

4. ఒక కుర్రవాడు ఒక కాలువగట్టుమీద రూపాయ కాసు పాతిపెట్టి, అది ఒక వేపచెట్టునకు 20 అడుగులు గదా అన్నమాట తనలోతాను జ్ఞాపకముంచుకొనినాడు. అప్పుడు వానితో ఉన్నవాని స్నేహితుడు ఆ రూపాయ, ఆ గట్టుమీదనే ఉన్న ఒక మామిడిచెట్టునకు 15 అడుగుల దూరము గదా అన్న సంగతి తనలోతాను జ్ఞాపకముంచుకొనినాడు. మరునాడు, ఒకనికి తెలియకుండ ఒకడు వచ్చి ఆ రూపాయ లాగివేయవలెనని యత్నించిరి కాని, ఇద్దరును తెల్లబోయిరి. అట్లేల జరిగెను? మూడవనాడు వారు ఏకముగ వచ్చి,

ఒకరి మనస్సు ఒకరికి ఇచ్చుకొని, రూపాయను పెల్లగించిరి. ఇది ఎట్లు వీలయ్యెను?

5. 10′ ఎడముగనున్న రెండు స్తంభములలో ఒకదానికి 6′ త్రాటితో ఒక పిల్లవానిని, రెండవదానికి 8′ త్రాటితో మరియొకనిని కట్టిపెట్టినారు. వారు కలిసి ఆడుకొనుటకు వీలైన మేర, ఉచితప్రమాణముతో మాదిరి గీసి చూపుము. త్రాళ్లు, క్రమముగ, 5′ మరి 6′ అయినవి అనుకో, ఉమ్మడి స్థలము ఎట్లు మారును? ఇప్పుడు మొదటి త్రాడు 4′ అయినచో, ఉమ్మడి స్థలము ఏమగును? ఇప్పుడు రెండవ త్రాడు 5′ దాక తగ్గించినచో, అసలు ఆ పిల్లలు కలిసి ఆడుకొనుట పడునా?

6. ఒక గానుగ కాడి 12′, ఇంకొకటి 9′. రెండింటి ఎడ్లను ఎప్పుడును కూడ డీడిక్కులు కొట్టుకొనకుండ తిరుగవలయునన్న, గానుగరోళ్లు అధమము ఎంత దూరమున నుండవలెను?

7. ఒక ఆవును, దాని దూడను ఒకేకొయ్యకు, క్రమముగ, 15′ మరి 10′ పొడుగు త్రాళ్లతో కట్టివేసినారు. ప్రత్యేకించి ఆవునకేగల మేర నలుపుచేసి చూపుము.

8. రెండు తుపాకులలో, ఒకదాని రంగస్థానము 400 గజములు, రెండవ దానిది 600 గజములు. రెండును ఒక లక్ష్యమును, (1) ఒకే వైపునుండి, (2) చెరియొక వైపునుండియు, కొట్టవలయునన్న వాటి మహత్తమ దూరమెంత? దీనినిబట్టి నీవేమి గ్రహింతువు?

9. 3″ సరళరేఖయగు AB గీయుము. A కేంద్రముగ వ్యాసార్థము 2″ గను ఒక వృత్తమును, B కేంద్రముగ వ్యాసార్థము 5″ గను ఒక వృత్తమును చుట్టుము. ఈ వృత్తములు అసలు కలుసుకొనునా? ఖండించుకొనునా? BA పెంచుము. ఏమి గమనింతువు? మొదటిదాని వ్యాసార్థము 1 అం. తగ్గినచో, వృత్తములు ఖండించుకొనునా? చూడుము. దానినే 3″ చేసిన, వృత్తములు ఎన్ని బిందువులలో ఖండించుకొనును? ఖండన బిందువులను కలుపుము. ఈ రేఖ కేంద్రరేఖతో చేయు కోణమెంత?

10. 9 సెం.మీ. ఎడమున రెండు బిందువులు P, Q తీసికొనుము. P, Q లు కేంద్రములుగను మరి క్రమముగ, (*a*) 3 సెం.మీ., 6 సెం.మీ.; (*b*) 4 సెం.మీ., 5 సెం.మీ.; (*c*) 4·5 సెం.మీ., 4·5 సెం.మీ.; (*d*) 3·5 సెం.మీ., 5·5 సెం.మీటర్లును వ్యాసార్థములుగను వృత్తములు చుట్టుము. ఈ సందర్భములలో నీవు ఏమి గమనింతువు? తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:— **రెండు వృత్తముల కేంద్రమధ్య దూరము వ్యాసార్థముల మొత్తమునకు సమమైనచో వృత్తములకు బాహ్యస్పర్శ ఉండును. పైగా, కేంద్రములును స్పర్శబిందువును ఒకే రేఖలో నుండును.**

11. 3 సెం.మీ. ఎడమున రెండు బిందువులు P, Q తీసికొనుము. P, Q లు కేంద్రములుగను మరి క్రమముగ, (*a*) 5 సెం.మీ., 2 సెం.మీ.; (*b*) 5·5 సెం.మీ., 2·5 సెం.మీ.; (*c*) 6 సెం.మీ., 3 సెం.మీ.; (*d*) 6·5 సెం.మీ., 3·5 సెం.మీటర్లును వ్యాసార్థములుగను వృత్తములు చుట్టుము. ఇన్ని సందర్భములలోను నీవేమి గమనింతువు? తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:— **రెండు వృత్తముల కేంద్రమధ్య దూరము వ్యాసార్థముల తేడాకు సమమైనచో, వృత్తములకు అంతరస్పర్శ ఉండును. పైగా, కేంద్రములును స్పర్శబిందువును ఒకే రేఖలో నుండును.**

12. 6 సెం.మీటర్ల వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తము చుట్టుము. 3 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగలిగి దీనిని బాహ్యమున స్పృశించు మరియొక వృత్తము చుట్టుము. అట్టివి ఎన్ని గీయవచ్చు? అట్టివాటి కేంద్రములు ఎక్కడనుండును?

13. 6 సెం.మీటర్ల వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తము చుట్టుము. దాని పరిధిపై A అను బిందువు తీసికొనుము. వృత్తమును A వద్ద బాహ్యమున స్పృశించు మరియొక వృత్తము చుట్టుము. అట్టివి ఎన్ని గీయవచ్చు? అట్టివాటి కేంద్రములు ఏ దారిలో నుండును!

14. 6 సెం.మీటర్ల వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తము చుట్టుము. దాని పరిధిపై A అను బిందువు తీసికొని, వృత్తమును A వద్ద బాహ్యమున స్పృశించు 3 సెం.మీటర్ల వ్యాసార్థముగల వృత్తము చుట్టుము. ఇప్పుడు ఎన్ని వృత్తములు గీయవచ్చు? 12, 13 ప్రశ్నలలోవలె అనేకము గీయుటకు ఏల వీలులేదు?

15. 5 సెం.మీటర్ల వ్యాసార్థముగల ఒక వృత్తమును అంతరమున స్పృశించు 3 సెం.మీటర్ల వ్యాసార్థపు వృత్తమును చుట్టుము. ఇట్టివి ఎన్ని గీయవచ్చు? వీటి కేంద్రములు ఏ దారిలో నుండును?

16. 5 సెం.మీటర్ల వ్యాసార్థముగల ఒక వృత్తమును, దాని పరిధిపైగల A అను ఒక బిందువువద్ద అంతరమున స్పృశించు మరియొక వృత్తము చుట్టుము. ఇట్టివి ఎన్ని గీయువచ్చు? వీటి కేంద్రములు ఏ దారిలో నుండును.

17. 5 సెం.మీటర్ల వ్యాసార్థముగల ఒక వృత్తమును దాని పరిధిపైగల A అను ఒక బిందువువద్ద అంతరమున స్పృశించు 3 సెం.మీ. వ్యాసార్థపు

వృత్తమును చుట్టుము. ఇప్పుడు ఎన్ని వృత్తములు గీయవచ్చు? 15, 16 ప్రశ్నలలోవలె, అనేకము గీయుటకు ఏల వీలులేదు?

18. 4 సెం.మీ. వ్యాసార్ధముతో వృత్తము చుట్టుము. దాని పరిధిపై A అను బిందువు తీసికొనుము. ఆ వృత్తమును A వద్ద బాహ్యమునను అంతరమునను స్పృశించు 5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధపు వృత్తములను రెండింటిని చుట్టుము.

19. పై ప్రశ్న తాలూకు బొమ్మలో, క్రమముగ 5 సెం.మీ., 3 సెం.మీ. వ్యాసార్ధములు గలిగి దత్తవృత్తమును A వద్ద (*a*) రెండును అంతరమునను, (*b*) రెండును బాహ్యమునను, (*c*) మొదటిది అంతరమునను రెండవది బాహ్యమునను (*d*) మొదటిది బాహ్యమునను, రెండవది అంతరమునను స్పృశించునట్లు వృత్తములను గీయుము.

20. 4 సెం.మీ., 5 సెం.మీ., 6 సెం.మీ. వ్యాసార్ధములుగాగల మూడు వృత్తములు బాహ్యస్పర్శలో నున్నవి. ప్రతి రెంటికిని కేంద్రమధ్య దూరము కట్టుము.

21. $2\frac{1}{2}$ అం., $1\frac{1}{2}$ అం. వ్యాసార్ధములుగా గలిగి బాహ్యమున స్పృశించు రెండు వృత్తములు చుట్టుము. వీటిని బాహ్యమున స్పృశించు 1 అం. వ్యాసార్ధపు వృత్తమును చుట్టుము.

22. 5 సెం.మీ. ఎడమున రెండు బిందువులు A, B తీసికొనుము. A, B లు కేంద్రములుగను మరి క్రమముగ, (*a*) 2 సెం.మీ., 2 సెం.మీ.; (*b*) 2·5 సెం.మీ., 1·5 సెం.మీ.; (*c*) 3 సెం.మీ., 1·5 సెం.మీ.; (*d*) 2·5 సెం.మీ., 2 సెం.మీ. వ్యాసార్ధములుగను వృత్తములు చుట్టుము. నీవేమి గమనింతువు? తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:— **రెండు వృత్తముల కేంద్రమధ్య దూరము వ్యాసార్ధముల మొత్తమును మీరినచో, రెండు వృత్తములును పూర్తిగ విడివిడిగ నుండును.**

23. 3 సెం.మీ. ఎడమున రెండు బిందువులు A, B తీసికొనుము. A, B లు కేంద్రములుగను మరి క్రమముగ (*a*) 6 సెం.మీ., 2 సెం.మీ.; (*b*) 6·5 సెం.మీ., 2 సెం.మీ.; (*c*) 6·5 సెం.మీ., 2·5 సెం.మీ.; (*d*) 6 సెం.మీ., 2·5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధములుగను వృత్తములు చుట్టుము. ఇన్ని సందర్భములలోను నీవేమి గమనింతువు? తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:— **రెండు వృత్తముల కేంద్రమధ్య దూరము వ్యాసార్ధముల తేడాకు తగ్గిపోయినచో ఒక వృత్తము పూర్తిగ రెండవదానిలోపల నుండును.**

24. 5 సెం.మీ. ఎడముననున్న A, B అను రెండు బిందువులు కేంద్రములుగను మరి క్రమముగ (*a*) 4 సెం.మీ., 3 సెం.మీ.; (*b*) 6 సెం.మీ., 3 సెం.మీ.; (*c*) 6·5 సెం.మీ., 4 సెం.మీ.; (*d*) 7 సెం.మీ., 2·5 సెం.మీ. వ్యాసార్ధములుగను వృత్తములు చుట్టుము. నీవేమి గమనింతువు? తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:— **రెండు వృత్తముల కేంద్రమధ్య దూరము వ్యాసార్ధముల తేడాను మీరి, వాటి మొత్తమునకు తగ్గి ఉన్నప్పుడు, ఆ వృత్తములు ఒకదానినొకటి ఖండించుకొనును.**

కేంద్రమధ్య దూరము: d
ఒక వృత్తపు వ్యాసార్ధము: r_1
రెండవ వృత్తపు వ్యాసార్ధము: r_2
$r_1 > r_2$
} అనుకో.

కేంద్ర మధ్యదూరము	సమానమో, అసమానమో	వ్యాసార్ధముల మొత్తమో, తేడాయో	తీర్పు	త్రిభుజము ఏర్పడునా?
(1) d	$<$	$r_1 - r_2$	ఒక వృత్తము పూర్తిగ రెండవదానిలో నుండును.	ఏర్పడదు.
(2) d	$=$	$r_1 - r_2$	అంతరస్పర్శ.	ఏర్పడదు.
(3) d	$>$ $<$	$r_1 - r_2$ $r_1 + r_2$	వృత్తఖండన.	ఏర్పడును.
(4) d	$=$	$r_1 + r_2$	బాహ్యస్పర్శ.	ఏర్పడదు.
(5) d	$>$	$r_1 + r_2$	వృత్తములు పూర్తిగ విడివిడిగ నుండును.	ఏర్పడదు.

25. AB ఒక సరళరేఖ. P, దానికి ఎడముగ ఒక బిందువు. C AB పై నుండునట్లును, PC 4 సెం.మీ. ఉండునట్లును P నుండి ఒక సరళరేఖ గీయుము. (P కేంద్రముగ, ౩ సెం.మీ. వ్యాసార్థముగ వృత్తము గీసి AB ని ఖండింపుము. PC కలుపుము.) PC యే కోరిన రేఖ. ఎన్ని ఫలితములు ఉండును? శూన్యఫలితము ఎప్పుడు?

26. ABC అనునది 6 సెం.మీటర్ల వ్యాసార్థపు వృత్తము. దానిలో 4 సెం.మీటర్ల జ్యా అమర్చుము. (పరిధిపై A అను ఒక బిందువు తీసికొనుము. A కేంద్రముగ, 4 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగ రెండు చాపములతో పరిధిని P, Q ల వద్ద ఖండింపుము. AP, AQ లు కలుపుము. అప్పుడు AP గాని AQ గాని కోరిన జ్యా అగును.)

27. O కేంద్రముగాగల ఒక వృత్తములోగాని, మీదగాని, బయటగాని P ఒక బిందువు. పరిధిని A వద్ద ఖండించువరకు OP ని గాని, కాక PO ని గాని పెంచుము. అప్పుడు, పై క్రమముబట్టి వృత్తవ్యాసమునకు తగ్గియో, సమముగనో, మించియో AP ఉండును. ఇప్పుడు P నుండి PB, PC, PD వంటి అనేక రేఖలు పరిధిని B, C, D వగైరా బిందువులవద్ద ఖండించునట్లు గీయుము. పై మూడు సందర్భములలోను, వేర్వేరుగ PA, PB, PC, PD వగైరా రేఖలపొడుగులు పోల్చి చూడుము.

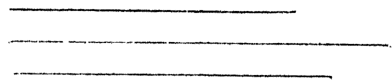
త్రిభుజములు.

22. ప్రతి త్రిభుజమునకును మూడు భుజములును, మూడు కోణములును ఉండును. ఈ ఆరును దాని **అవయవములు.** సర్వసాధారణముగ, ఒక త్రిభుజము తాలూకు మూడు అవయవములు తెలిసినచో, దానిని రచింపవచ్చును. ఉదా. ఏదైన త్రిభుజముయొక్క మూడు భుజముల పొడుగులను ఇచ్చినచో, దానిని రచింపవచ్చును—ఆ పొడుగులలో ఏ రెండిటి తేడాయైనను మూడవదానికి తగ్గియు, ఏ రెండిటి మొత్తమైనను మూడవదానికి మించియు, మాత్రము ఉండిన సరి.

అభ్యాసము 7 (D)

1. 4 సెం.మీ., 5 సెం.మీ., 6 సెం.మీ. భుజములతో ఒక త్రిభుజమును గీయుము. (4 సెం.మీ. పొడుగున ఒక సరళరేఖ AB గీయుము. A, B లు కేంద్రములుగను క్రమమున 5 సెం.మీ., 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థములుగను వృత్తములు చుట్టుము. వృత్తములను P, Q లవద్ద ఖండించుకొననిమ్ము. AP, BP లును, AQ, BQ లును కలుపుము. అప్పుడు APB గాని, AQB గాని కోరిన త్రిభుజము.)

2. ఈ క్రింద ఇచ్చిన రేఖల పొడుగులుగల భుజములతోనుండు త్రిభుజమును రచింపుము.



3. 3", 2", 3" భుజములతో ఒక త్రిభుజమును రచింపుము.

4. ఒక తిన్నని రోడ్డుమీద $2\frac{1}{2}$ మైళ్ళ ఎడమున A, B లు రెండు సత్రములు. AB తో 45° చేయు ఒక తిన్నని రోడ్డుమీదను, BA తో 60° చేయు మరియొక తిన్నని రోడ్డుమీదను కూడ ఒకే రైలుస్టేషను ఉన్నది. స్టేషను A కి ఎంత దూరము, B కి ఎంత దూరము? (ప్రమాణము 1" = 1 మైలు.)

5. (*a*) ఒక గోపురపు మొదలునకు 50 గ. దూరముననున్న ఒక బిందువునుండి గోపురపు ఊర్ధ్వకోణము 58°. గోపురము ఎత్తు, అరగజమునకు సరిగ కనిపెట్టుము. (ప్రమాణము 1" = 10 గజములు.)

మరా: — (1) ఏదైన వస్తువును చూచుటకు ప్రేక్షకుడు కన్నెత్తవలసివచ్చినప్పుడు ఆ దృష్టిరేఖకును, దాని నిలువు ఛేదిలోనే కంటిమీదుగానుండు మట్టపురేఖకును మధ్యకోణము ఆ వస్తువుయొక్క ఊర్ధ్వకోణమనియు; అట్లే ఏదైన వస్తువును చూచుటకు ప్రేక్షకుడు కన్నుడింపవలసివచ్చినప్పుడు ఆ దృష్టిరేఖకును దాని నిలువు ఛేదిలోనే కంటిమీదుగానుండు మట్టపురేఖకును మధ్యకోణము ఆ వస్తువుయొక్క నిమ్నకోణమనియు అనబడును.

(*b*) 200 అడుగుల ఎత్తున్న ఒక దీపస్తంభముమీదనుండి ఒక మనుష్యుడు 64° నిమ్నకోణములో ఒక నావను చూచెను. నావకును దీపస్తంభమునకును ఎడము కనిపెట్టుము. (ప్రమాణము 1" = 50 అడుగులు.)

6. ఒకడు ఒక రోడ్డుమీద ఒక ఊరునుండి 5 మైళ్ళు నడచి, అక్కడ ఆ రోడ్డుతో 75° చేయు మరియొక రోడ్డులోనికి మళ్ళి, దాని వెంట 8 మైళ్ళు నడవగా మరియొక ఊరుచేరెను. రెండు ఊళ్ళకును సరాసరి రోడ్డు ఉండినచో, అతడు ఎంత నడవవలసి ఉండెడిది?

7. $AB=6$ సెం.మీ., $BC=7$ సెం.మీ., మరి $CA=8$ సెం.మీ. అని తెలిసి ABC అను త్రిభుజము రచింపుము; అట్లే, $A'B'=6$ సెం.మీ., $B'C'=7$ సెం.మీ., మరి $C'A'=8$ సెం.మీటర్లతో $A'B'C'$ అను మరియొకటి రచింపుము. వాటిని కత్తిరించి, వాటికి పరస్పరముగ సంపూర్ణ ఆచ్ఛాదన కలదని నిరూపింపుము. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:— **రెండు త్రిభుజములలో, ఒకదాని మూడు భుజములును రెండవదాని మూడింటికిని, ఒకటికొకటి సమమైనచో; అవి రెండును సాక్షాత్తు సమానములు, (లేక సంపూర్ణ సమానములు లేక సర్వధా సమానములు.)**

8. $AB=6$ సెం.మీ., $BC=7$ సెం.మీ., మరి $\angle B=38^\circ$ అని తెలిసి ABC అను త్రిభుజమును రచింపుము; అట్లే, $A'B'=6$ సెం.మీ., $B'C'=7$ సెం.మీ., మరి $\angle B'=38^\circ$ అని తెలిసి $A'B'C'$ అను మరియొకటి రచింపుము. వాటిని కత్తిరించి, వాటికి పరస్పరముగ సంపూర్ణ ఆచ్ఛాదన కలదని నిరూపింపుము. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:— **రెండు త్రిభుజములలో, ఒకదాని ఏవో రెండు భుజములు రెండవదాని రెండు భుజములకు ఒకటికొకటి సమమై; దత్తభుజముల మధ్యగత కోణములుకూడ రెండిటిలోను సమమైనచో; అవి రెండును సాక్షాత్తు సమానములు.**

9. (*a*) $\angle A=43^\circ$, $\angle B=64^\circ$, మరి $AB=2''$ అని తెలిసి ABC అను త్రిభుజమును రచింపుము; అట్లే, $\angle A'=43^\circ$, $\angle B'=64^\circ$, మరి $A'B'=2''$ గల $A'B'C'$ అను మరియొకటి రచింపుము. వాటిని కత్తిరించి వాటికి సంపూర్ణ ఆచ్ఛాదన పరస్పరముగ కలదని నిరూపింపుము.

(*b*) $\angle A=36^\circ$, $\angle B=84^\circ$, మరి $AC=2{\cdot}5''$ గల ABC అను త్రిభుజము రచింపుము; అట్లే, $\angle A'=36^\circ$, $\angle B'=84^\circ$, మరి $A'C'=2{\cdot}5''$ గల $A'B'C'$ అను మరియొకటి రచింపుము. రెంటిని కత్తిరించి వాటికి సంపూర్ణ ఆచ్ఛాదన పరస్పరముగ కలదని నిరూపింపుము.

(*a*), (*b*) లద్వారా ఇది గ్రహింపుము:— **రెండు త్రిభుజములలో, ఒకదాని ఏవో రెండు కోణములు రెండవదాని రెండు కోణములకు, ఒకటికొకటి సమమై; మొదటిదాని ఒక భుజము రెండవదాని సాజాత్య భుజమునకు సమమైనచో; అవి రెండును సాక్షాత్తు సమానములు.**

10. $\angle A=90^\circ$, $BA=4$ సెం.మీ. మరి $CB=5$ సెం.మీ. గల ABC అను త్రిభుజము రచింపుము; అట్లే, $\angle A'=90^\circ$, $B'A'=4$ సెం.మీ., మరి $C'B'=5$ సెం.మీ. గల $A'B'C'$ అను మరియొకటి రచింపుము. వాటిని కత్తిరించి, వాటికి సంపూర్ణ ఆచ్ఛాదన పరస్పరముగ కలదని నిరూపింపుము. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:— **రెండు సమకోణాత్మక త్రిభుజములలో, కర్ణములు సమమై, మొదటిదాని ఒక భుజము రెండవదాని సాజాత్య భుజమునకు సమమైనచో, అవి రెండును సాక్షాత్తు సమానములు.**

11. ఈ క్రింది సందర్భములు తెలిసి, ABC అను త్రిభుజము రచింపుము:—

(*a*) $AB=4{\cdot}5$ సెం.మీ., $\angle B=32^\circ$, $AC=3$ సెం.మీ.
(*b*) $AB=4{\cdot}2$ సెం.మీ., $\angle B=110^\circ$, $AB=5{\cdot}3$ సెం.మీ.
(*c*) $AB=4{\cdot}1$ సెం.మీ., $\angle B=30^\circ$, $AC=1{\cdot}5$ సెం.మీ.

మొదటి సందర్భములో, ప్రశ్నలోని షరతులకు బద్ధమై, ఆకార వైశాల్యములలో భేదించు త్రిభుజములు రెండు ఉండగలవని గమనింపుము.

12. $\angle A=68^\circ$, $\angle B=32^\circ$, $\angle C=?$ ($\angle C$ ఎంత ఉండి తీరవలె?) గల ఒక త్రిభుజమును రచింపుము. అట్లే, $\angle A'=68^\circ$, $\angle B'=32^\circ$, $\angle C'=?$ గల $A'B'C'$ అను మరియొకటి కూడ రచింపుము. వాటిని కత్తిరించి, ఆచ్ఛాదన పద్ధతిని అవి సమమేమో పరీక్షింపుము. నీవేమి గమనింతువు? తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:— **రెండు త్రిభుజములలో, ఒకటికొకటి చొప్పున కోణసామ్యము ఉన్నచో, అవి సాక్షాత్తు సమానములు కావలసిన అవసరము లేదు.**

13. ప్రతి భుజమును 3·5 సెం.మీ. గల ABC అను త్రిభుజమును రచింపుము. A, B, C కోణములను కొలువుము. మరల, ప్రతి భుజమును 4 సెం.మీ. గల $A'B'C'$ అను మరియొకటి రచింపుము. దీని కోణములను కొలువుము. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—**ఒక సమత్రిభుజము తాలూకు**

ప్రతి కోణమును 60°. పైగా, ఒక త్రిభుజమునకుగల భుజములు సమానములైనచో, కోణములును అంతే.

14. ప్రతి కోణమును 60° గల ఒక త్రిభుజమును రచింపుము; అట్టిదే మరియొకటి రచింపుము. ప్రతిదాని మూడు భుజములును కొలువుము. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము: — **ఒక త్రిభుజమునకు కోణసామ్యమున్నచో, భుజసామ్యమును ఉండును.**

15. $AB=AC=5$ సెం.మీ., $\angle A=84°$ నుగల ABC అను త్రిభుజమును రచింపుము. B, C కోణములు కొలువుము. $A'B'=A'C'=6$ సెం.మీ, $\angle A'=36°$ నుగల $A'\ B'\ C'$ అను మరియొకటికూడ రచించి B', C' కోణములు కొలువుము. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—**సమద్విబాహు త్రిభుజముయొక్క భూకోణములు సమానములు.**

16. $\angle A=\angle B=38°$, $AB=4$ అం. నుగల ABC అను త్రిభుజమును రచింపుము. BC, AC భుజములు కొలువుము. $\angle A'=\angle B'=46°$, $A'B'=5$ సెం.మీ., నుగల $A'\ B'\ C'$ అను మరియొకటి కూడ రచించి, $B'C'$, $A'C'$ లు కొలువుము. నీకేమి తెలిసినది? తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము: — **ఒక త్రిభుజము తాలూకు రెండు కోణములు సమమైనచో, వాటి ప్రతిముఖభుజములు సమానములు.**

17. $AB=5$ సెం.మీ., $BC = 4$ సెం.మీ., $CA = 3$ సెం.మీ., గల ABC అను త్రిభుజమును రచింపుము. $A'B'=4{\cdot}5$ సెం.మీ., $B'C'=3{\cdot}5$ సెం.మీ., $C'A'=2{\cdot}5$ సెం.మీ., గల $A'B'C'$ అను మరియొకటి రచింపుము. ఒకొక్క త్రిభుజమునకుగల కోణములు వాటిలో అవి సమములా, అసమములా? అసమములైనచో, ప్రతి త్రిభుజములోను మహత్తమభుజ మహత్తమకోణములను గురించియు, అధమభుజ అధమకోణములను గురించియు నీవేమి గమనింతువు? తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—**త్రిభుజములో మహత్తరభుజమునకు ప్రతి ముఖముగ మహత్తరకోణముండును.**

18. $\angle A=64°$, $\angle B=53°$, $AB=2''$ నుగల ABC అను త్రిభుజమును రచింపుము. BC, AC లు కొలువుము. $\angle A'=110°$, $\angle B'=30°$, $B'C=3{\cdot}5$ సెం.మీ. నుగల $A'B'C'$ అను మరియొకటి రచించి, $B'C'$, $A'C'$ లు కొలువుము. ఒకొక్కదానిలో భుజములు వాటిలో అవి సమములా, అసమములా? అసమములైనచో, ప్రతి భుజములోను మహత్తమకోణ

మహత్తమభుజములను గురించియు, అధమకోణ అధమభుజములను గురించియు నీవేమి గమనింతువు? తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—**త్రిభుజములో మహత్తరకోణమునకు ప్రతి ముఖముగ మహత్తరభుజముండును.**

19. ఒక (సమకోణాత్మక త్రిభుజము) త్ర్యస్రములో, కర్ణమే మహత్తమ భుజమని నిరూపింపుము.

20. అధిక కోణాత్మక త్రిభుజములో, మహత్తమభుజము ఏది?

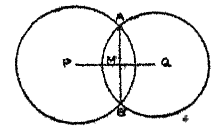
ప.రా:—త్రిభుజరచనగూర్చియు, ఉన్నతాంశ, దూరములనుగూర్చియు, ఇంకను ప్రశ్నలు కావలసినచో, పుస్తకము చివరనున్న రకరకాల ప్రశ్నలు చూడుము.

రేఖాగణితములోని లఘుకల్పనలు.

(i) రేఖలయొక్కయు; కోణములయొక్కయు సమద్విఖండనము; లంబనిర్మాణము.

23. P, Q లు కేంద్రములుగ, A, B లవద్ద ఖండించుకొను రెండు వృత్తములు చుట్టుము. PQ ను M వద్ద ఖండించునట్లు AB ని కలుపుము. ఈ బొమ్మ కత్తిరించి PQ వెంట మడువుము. ఒక భాగము రెండవదానిని పూర్ణాచ్ఛాదన చేయును, B, A పై పడును. $\therefore MA = MB$. పైగా, $\angle AMP=\angle BMP$; ఇంకను, $\triangle APQ=\triangle BPQ$ లు సకలవిధ సమానములు. అదిగాక, AMP, BMP లు సన్నిహితకోణములు అగుటవలన, వాటి మొత్తము రెండు సమకోణములు. $\therefore$ వాటిలో ఒకొటొకటి ఒక సమకోణము లేక మూలమట్టము విభాగిని—ఈ రెంటివల్లను, మనత AB ని లంబితముగ సమద్విఖండన చేయునని చెప్పవచ్చును.

ఈ ప్రక్కబొమ్మ, ఒక సరళరేఖయగు AB ని సమద్విఖండనచేయుటకును, ఒక కోణమగు APB ని సమద్విఖండనచేయుటకును, ఒక దత్త సరళరేఖయగు AB కి దానిమీద నున్న M అను బిందువునుండిగాని దానికి ఎడముగ నున్న P అను బిందువునుండిగాని లంబము గీయుటకును, రచనావిధానమును సూచించుచున్నది.



పటము 13.

24. ఒక దత్తసరళరేఖయగు AB ని సమద్విఖండనచేయు విధానము.

A, B లు కేంద్రములుగను, ఏదో వీలగుకొలత, AP అర్ధవ్యాసముగను P వద్ద ఖండించుకొను వృత్తచాపములను గీయుము. అదే ప్రకారము, అవే కేంద్రములతో, మరియొక వీలగు AQ అర్ధవ్యాసముతో Q వద్ద ఖండించుకొను వృత్తచాపములను గీయుము. AB ని M వద్ద ఖండించు PQ ను కలుపుము. AB సమద్విఖండితమగును. PQ, AB ని లంబితముగ ఖండించును.

25. ఒక దత్తసరళరేఖయగు AB కి ఒక లంబసరళరేఖ గీయు విధానము:—

(*a*) AB మీదనున్న M అను బిందువునుండి.

(*b*) AB కి ఎడముగనున్న P అను బిందువునుండి.

(*a*) M వద్దనుండి సమదూరమున చెరయొక వైపునను దత్తరేఖలలో ఉండు A, B అను రెండు బిందువులు నిర్ణయించుము. అప్పుడు MA=MB. A, B లు కేంద్రములుగను, ఏదో వీలగు కొలత, AP వ్యాసార్ధముగను P వద్ద ఖండించుకొను వృత్తచాపములను గీయుము. అదే ప్రకారము, అవే కేంద్రములతో, మరియొక వీలగు వ్యాసార్ధముతో Q వద్ద ఖండించుకొను వృత్తచాపములను గీయుము. PQ ను కలుపుము. AB కి PQ అను రేఖ M వద్ద లంబము.

(*b*) P కేంద్రముగ ఏదో వీలగు వ్యాసార్ధముతో A, B లవద్ద AB అను రేఖను ఖండించు వృత్తచాపములను గీయుము. A, B లు కేంద్రములుగ వీలగు వ్యాసార్ధము AQ తో Q వద్ద ఖండించుకొను వృత్తచాపములు గీయుము. PQ కలుపుము. అప్పుడు PQ, AB కి లంబము.

(*c*) దత్తసరళరేఖయగు AB ని ఒక అంచు సరాసరి ఆచ్ఛాదించునట్లు ఒక అడుగుబద్ద పెట్టుము. దానిని అట్లే అదిమి ఉంచి, ఒక మూలమట్టము తెచ్చి దాని సమకోణాశ్రిత భుజములలో ఒకటి అడుగుబద్దయొక్క ఆ అంచునే బరాబరుగా స్పృశించునట్లు పెట్టి, మూలమట్టమును ఇటునటు జారనిచ్చి, దాని సమకోణాశ్రిత భుజములలో తక్కినది (*a*) ప్రకారము M మీదికిగాని, (*b*) ప్రకారము P మీదికిగాని వచ్చినప్పుడు, దానిని ఆపి, అదిమి, ఆ స్థితిలో M మీదుగగాని, P మీదుగగాని ఆ భుజము వెంబడి ఒక సరళరేఖ గీయుము. అదియే కోరినరేఖ.

26. ఒక కోణమగు APB ని సమద్విఖండన చేయు విధానము.

P కేంద్రముగ, ఏదో వీలగు వ్యాసార్ధముతో కోణభుజములను A, B ల వద్ద ఖండించు వృత్తభాగమును చుట్టుము. A, B లు కేంద్రములుగ, ఏదో వీలగు వ్యాసార్ధమగు AQ తో Q వద్ద ఖండించుకొను వృత్తచాపములను గీయుము. PQ యే ∠ APB యొక్క సమద్విఖండన రేఖ. (ఎందుచేత?)

అభ్యాసము 7 (E)

1. ఏదో త్రిభుజము, ABC గీయుము. BC, CA, AB లను D, E, F లవద్ద సమద్విఖండన చేయుము. AD, BE, CF లు కలుపుము. వీటిని త్రిభుజముయొక్క **మధ్యగతములు** అందురు. ఇవి ఏకబిందుగతములని నిరూపింపుము. మధ్యగతముల సామాన్యఖండన బిందువును **"గురుత్వకేంద్రము"** అందురు.

2. ఏదో త్రిభుజము, ABC గీయుము. A, B, C కోణములను సమద్విఖండన చేసి, ఆ రేఖలు ఏకబిందుగతములని నిరూపింపుము. ఆ బిందువును **"అంతఃకేంద్రము"** అందురు.

3. ఒక త్రిభుజము, ABC గీయుము. భుజములకు లంబ-సమద్విఖండన రేఖలు గీయుము. ఇవి ఏకబిందుగతములని నిరూపింపుము. ఈ బిందువును **"పరికేంద్రము"** అందురు. ఈ ప్రశ్నలో 'ఒక త్రిభుజము' అని ఉన్నది గనుక, ఒక అధికకోణాత్మక త్రిభుజమునుగాని, ఒక సమకోణాత్మక త్రిభుజమునుగాని, ఒక న్యూనకోణాత్మక త్రిభుజమునుగాని తీసికొనవచ్చును. ఒకొక్క రకము త్రిభుజము తాలూకు పరికేంద్రము ఉండెడి స్థితినిగూర్చి నీవేమి గమనింతువు?

4. ఒక త్రిభుజము, ABC గీయుము. A, B, C లనుండి ప్రతిముఖ భుజములకు లంబములు గీయుము. ఇవి ఏకబిందుగతములని నిరూపింపుము. ఈ బిందువును **"లంబకేంద్రము"** అందురు. పై ప్రశ్నలోవలెనే, ఇచ్చటను మూడు రకముల త్రిభుజములను గీయవచ్చును. లంబకేంద్రముయొక్క స్థితిని గూర్చి నీవేమి గమనింతువు?

5. A, B అను రెండు స్థిరబిందువులు తీసికొనుము. AB ని M వద్ద ఖండించు, లంబ-సమద్విఖండన రేఖ గీయుము. ఆ లంబ-సమద్విఖండన రేఖమీద ఏదో బిందువు, P తీసికొనుము PA, PB లు కలుపుము. సమద్విఖండన రేఖ వెంట కాగితము మడచి, PA=PB అని నిరూపింపుము. అట్లే, లంబ-సమద్విఖండన రేఖమీద మరియొక ఏదో బిందువు, Q తీసికొని QA=QB అని

నిరూపింపుము. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—A, B అను బిందువులను కలిపెడి రేఖయొక్క లంబ-సమద్విఖండన రేఖలో ఏ బిందువైనను సరె, A, B లనుండి సమదూరము.

6. పై ప్రశ్నలో, P కేంద్రముగ PA వ్యాసార్థముగ వృత్తము చుట్టుము. అది B మీదుగా కూడ ఉండునని నిరూపింపుము. అట్లే, Q కేంద్రముగ QA వ్యాసార్థముగ మరియొక వృత్తము చుట్టుము. అది B మీదుగా కూడ ఉండునని నిరూపింపుము. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:— రెండు స్థిర బిందువుల మీదుగానుండెడి సకల వృత్తములయొక్కయు కేంద్రములు, ఆ బిందువులను కలిపెడి రేఖయొక్క లంబ-సమద్విఖండన రేఖలో ఉండి తీరును.

7. ఒక కోణము, BAC, గీయుము. ఈ BAC అను కోణమును సమద్విఖండనచేయు AD అను సరళరేఖ గీయుము. AD మీద ఏదో బిందువు, P, తీసికొనుము. P నుండి కోణభుజములకు లంబములుగ PD, PE లు గీయుము. AP వెంట కాగితము మడిచిగాని, అనురూపతలవల్లగాని, PD=PE అని నిరూపింపుము. అట్లే, AD మీద మరియొక ఏదో బిందువు, Q, తీసికొని, కోణభుజములకు QD′, QE′ అను లంబములు గీయుము. ఇది వరకువలె, QD′=QE′ అని నిరూపింపుము. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—ఒక కోణముయొక్క సమద్విఖండన రేఖలోని ఏ బిందువైనను సరె, ఆ కోణ భుజములనుండి సమదూరము.

8. ఒక త్రిభుజము, ABC గీయుము. D, E ల వరకు AB, AC లు పెంచుము. A అను కోణమును, బహిఃకోణములగు CBD, BCE లను, సమద్విఖండనచేయుము. ఈ మూడు సమద్విఖండనరేఖలును ఏకబిందుగతములని నిరూపింపుము.

9. P అనునది AB అను సరళరేఖకు ఎడముగనున్న బిందువు. P నుండి AB కి అనేక రేఖలు PA, PB, PR, PC, PD లు గీసి, PR అనునది AB కి లంబమగునట్లు చూడుము. వీటిలో హ్రస్వతమము ఏది? ఈ హ్రస్వతమ దూరమునే మామూలుగా 'దూరము' అనుచుందురు. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—ఒక బిందువునుండి ఒక నిర్దిష్టసరళ రేఖకు గీయ గల సరళ రేఖలన్నిటిలో, లంబమే హ్రస్వతమ దూరము.

10. ఒక సరళరేఖ, AB, 2·5 సెం.మీ. పొడుగున గీయుము. AB కి ఒకేప్రక్క AD, BC అను లంబరేఖలు ఒక్కొక్కటి 2·5 సెం.మీ. పొడుగున గీయుము. DC కలుపుము. AD, BC లకు DC లంబమని నిరూపింపుము.

11. ఒక సరళరేఖ, AB, 3 సెం.మీ. పొడుగున గీయుము. AB కి ఒకేప్రక్క AD, BC అను లంబరేఖలు ఒక్కొక్కటి 5·5 సెం.మీ. పొడుగున గీయుము. DC కలుపుము. AD, BC లకు DC లంబమని నిరూపింపుము.

12. ఒక రోడ్డుమీద A, B లు వరుస మైలురాళ్లు. T అను గుడి A నుండి 1540 గజములు, B నుండి 550 గజములు. రోడ్డునుండి గుడి యొక్క హ్రస్వతమ దూరము ఎంత?

13. A, B లు మూడు మైళ్లు ఎడమునన్న రెండు గ్రామములు. రెండు గ్రామముల పిల్లలును కూడ హాజరై చదువుకొనుటకు వీలుగ, రెండింటికిని సమదూరమున, C అను స్కూలు కట్టవలయును. పిల్లలు 2 మైళ్లకంటె ఎక్కువ ఏకబిగిని నడువలేరు. ఉచితప్రమాణముతో ఒక మాదిరి గీసి, C అను స్కూలు మహా అయితే ఎక్కడ ఉండవచ్చునో చూపుము.

14. 20 గజములు ఎడమునన్న H_1, H_2 అను రెండు ఇళ్లనుండి ఒక నుయ్యి సమదూరము. ఈ ఇళ్లసందున H_3 అను మరియొకటి ఉన్నది. అది H_1 కంటె H_2 కి 4 గజములు దగ్గర. నూతికి H_3 40 గజములు. H_1, H_2 లు నూతికి ఎంత దూరమో కట్టుము.

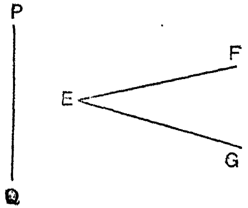
15. ఒక పచ్చిక పంపునకు రెండు వైపులకట్టిన తిన్నని కంచెలు 75° చేయును. రెండు కంచెలకును సమదూరముననను, కంచెలు కలుసుకొను మూలకు 100 గజముల దూరముననను ఒక కొయ్య పాతి ఉన్నది. ఆ కొయ్య ఒక్కొక్క కంచెకు ఎంత దూరము?

16. సమద్విభుజాత్మకమగు ABC అను ఒక త్రిభుజములో, AB=AC, BC=8·4 సెం.మీ., BC నుండి A 3·2 సెం.మీ. AB యొక్క పొడుగు కట్టుము.

17. సమద్విభుజాత్మకమగు ABC అను ఒక త్రిభుజములో AB=AC=5 సెం.మీ., ∠A=84°. D అను బిందువు AB, AC లకు సమదూరము. AD=6 సెం.మీ. కోణభుజములనుండి D యొక్క దూరము కట్టుము.

18. ఒక పచ్చిక బయలునకు ఒకవైపున ఎత్తుగ ముళ్లతీగెలు కంచెవేసి ఉన్నవి. ఆ బయలులో, తీగెలకు 6 అడుగుల దూరమున పాతి ఉన్న కొయ్యకు, 10 అడుగుల త్రాటితో ఒక గాడిద కట్టివేసి ఉన్నది. ఉచిత ప్రమాణముతో పటము గీసి గాడిదకు అందుబాటుగానుండు కంచెభాగమును చూపుము.

19. **DEF అను ఒక నిర్దిష్టకోణమునకు సమముగ, BAC అను కోణమును, AB అను రేఖలో A అను బిందువువద్ద చేయుట.** E కేంద్రముగ, ఏలగు వ్యాసార్ధముతో చాపము గీసి ED, EF లను D, F ల వద్ద ఖండించుము. A కేంద్రముగ, అదే వ్యాసార్ధముతో AB ని B వద్ద ఖండించు చాపము గీయుము. B కేంద్రముగ, DF వ్యాసార్ధముతో పై చాపమును C వద్ద ఖండించు చాపము గీయుము. అప్పుడు BAC అనునది కోరిన కోణము. త్రిభుజములను కత్తిరించి నాటికి సంపూర్ణాచ్ఛాదన కలుగుటవల్ల అవి సమములని నిరూపింపుము.

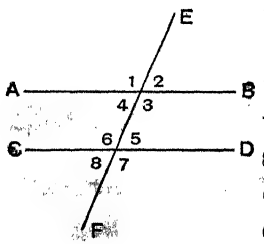


పటము 14.

20. PQ అను రేఖలో P వద్ద $\angle FEG$ కి సమమగు కోణమును (కోణమితి వాడకుండ) చేయుము.

సమానాంతరములు.

27. "సమానాంతర రేఖలు" అనగా, ఒకే సమభూమిని ఉండి, రెండు పెడలకును ఎంత పొడిగించినను ఖండించుకొననట్టివి. AB, CD లు రెండు సమానాంతర రేఖలు, EF వాటిని ఖండించుచున్నది. దాని పేరు "తిర్యక్ రేఖ." 2, 5 లు; 1, 6; 3, 7; 4, 8;—ఇవి **సంగతకోణ** యుగ్మములు. 4, 5; 3, 6,—ఇవి **ఏకాంతర కోణ** యుగ్మములు. 3, 5; 4, 6;—ఇవి **ఖండన రేఖకు ఒకేప్రక్కనుండు అంతఃకోణ** యుగ్మములు.



పటము 15.

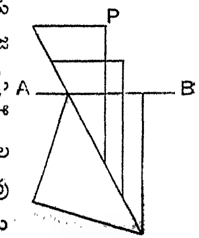
ఒక సరళరేఖ రెండు సమానాంతర రేఖలను ఖండించినచో, అప్పుడు (a) ఏకాంతరకోణములు సమములును, (b) సంగతకోణములు సమములును, (c) ఖండనరేఖకు ఒకేప్రక్కనుండు అంతః

కోణ యుగ్మముయొక్క మొత్తము రెండు సమకోణములును అగును. కోణములను కొలిచి పై విశేషగుణములు సరిచూచుకొనవచ్చును. పై సిద్ధాంతమునకు ప్రతిలోమము కూడ సత్యమే, అదికూడ కొలిచి సరిచూడవచ్చును. ఆ సిద్ధాంత ప్రతిజ్ఞ ఇది:—

ఒక సరళరేఖ రెండు ఇతర రేఖలను (a) ఏకాంతరకోణములు సమములగునట్లుగాని, (b) సంగతకోణములు సమములగునట్లుగాని, (c) ఖండనరేఖకు ఒకేప్రక్కనుండు అంతఃకోణ యుగ్మముయొక్క మొత్తము రెండు సమకోణము లగునట్లుగాని ఖండించినచో, అప్పుడు ఆ రెండు ఇతర రేఖలును సమానాంతరములు.

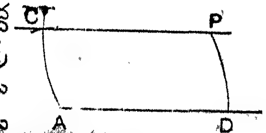
28. ఒక నిర్దిష్ట సరళరేఖయగు AB కి, దానికి ఎడమున నున్న P అను బిందువుమీదుగా, ఒక సమానాంతర సరళరేఖ గీయు విధానము.

1. మూలమట్టములలో ఒకటి P యొక్క చేరువను ఉంచుము. రెండవదాని సమకోణము ఆశ్రయించు భుజములలో నొకటి AB మీద పడునట్లు రెండవది పెట్టి, రెండిటి కర్ణములును స్పృశించునట్లు, మొదటిది (బొమ్మలో వలె వచ్చునట్లు) జరుపుము. అప్పుడు మొదటి మూలమట్టమును అదిమి ఉంచి, రెండవదానిని P అను బిందువు వచ్చువరకు జార్చుము. P అనుబిందువు మీదుగా, ఆ అంచు వెంట (AB కి లంబముగనుండునది కాక తక్కిన అంచు) ఒక రేఖ గీయుము. అదియే కోరిన ఏకాంతర సరళరేఖ.



పటము 16.

2. P కేంద్రముగ, PA వ్యాసార్ధముగ ఒక చాపమును AC గీయుము. A కేంద్రముగ, అదే వ్యాసార్ధముగ AB ని D వద్ద ఖండించు చాపమును PD గీయుము. A కేంద్రముగ, వ్యాసార్ధము PD యొక్క పొడవుగ చాపము గీసి, AC ని C వద్ద ఖండించుము. CP కలుపుము. అదియే AB కి సమానాంతరమగు రేఖ.



పటము 17.

$\triangle APC$, $\triangle APD$ లు సర్వదా సమానములు. కావున, $\angle CPA =$

∠PAB. అయితే, ఇవి ఏకాంతరకోణములు. అందువల్ల, AB కి CP సమానాంతరము.

అభ్యాసము 7 (F)

1. CD కి AB సమానాంతరము. EF కూడ CD కి సమానాంతరము. ఈ మూడు సరళరేఖలను ఖండించు ఒక తిర్యక్‌రేఖ గీసి, AB, CD లు సమానాంతరములని నిరూపింపుము.

2. ABC ఒక త్రిభుజము. D, E, F లు AB, AC, BC ల మధ్య బిందువులు. కొలవవలసిన కోణములను కొలిచి, DE BC కిని, EF AB కిని, DF AC కిని సమానాంతరమని నిరూపింపుము.

3. ABC ఒక త్రిభుజము. BC కి సమానాంతరముగ, A అను శీర్షక మీదుగ, DAE అను రేఖ గీయుము. ఇప్పుడు సమములగు ఏకాంతర కోణము లెవ్వి? తద్వారా, త్రిభుజముయొక్క మూడు కోణముల మొత్తమును రెండు సమకోణములని నిరూపింపుము.

4. ABC ఒక త్రిభుజము. AB ని D వరకు పెంచుము. AC కి సమానాంతరముగ BE గీయుము. ఇప్పుడు సమములగు ఏకాంతరకోణము లెవ్వి, సంగతకోణము లెవ్వి? తద్వారా, ఇది నిరూపింపుము:—**బహిఃకోణము = ప్రతి ముఖములగు అంతఃకోణముల మొత్తము. త్రిభుజముయొక్క మూడు కోణముల మొత్తమును రెండు సమకోణములు.**

5. రెండు సమానాంతరరేఖలు గీయుము. ఒకదానిమీద అనేక బిందువులు తీసికొని వాటినుండి రెండవదానికి లంబములు గీయుము. ఆ లంబములు కొలిచి, అవి సమములని నిరూపింపుము. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—**సమానాంతర రేఖల ఎడము సర్వత్ర సమము.**

6. రైలుపట్టాల "గేజి" అనగా ఎడము సర్వత్ర ఒకటే అగుట ఎందుచేత?

7. AB ఒక సరళరేఖ. $P_1, P_2, P_3 \ldots$ వగైరాలు AB కి పైన 2 అం. ఎడమున బిందువులు. $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ వగైరాలు AB కి క్రింద 2 అం. ఎడమున బిందువులు. $P_1, P_2, P_3 \ldots$ లను కలుపుము; $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ లను కలుపుము. ఒకొక్క బిందు సముదాయమునుగురించి నీవేమి గమనింతువు?

తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:— ఒక నిర్దిష్టసరళరేఖకు నిర్దిష్ట దూరమున బిందువులు ఉండవలెనన్న, అవన్నియు నిర్దిష్టరేఖకు అంతే దూరమున ఇరుప్రక్కలను ఉండు సమానాంతరరేఖలమీద ఉండి తీరవలయును.

8. OX, OY లు సమకోణముచేయు రెండు సరళరేఖలు. P అను ఒక బిందువు OX నుండి 3 అం., OY నుండి 2 అం. దాని స్థితి నిర్ధరింపుము.

9. ABCD అనునది ఒక పావుటావు కాగితము. P అను ఒక బిందువు AB అను అంచునుండి 4 అం., C అను మూలనుండి 5 అం. దాని స్థితి నిర్ధరింపుము.

10. (a) ట్రాముపట్టాలు రైలుపట్టాలను ఖండించుకొనునపుడును, రెండు ట్రాములపట్టాలుగాని రెండు రైళ్లపట్టాలుగాని (అవక్రముగ) ఖండించుకొనునపుడును, ఏర్పడు క్షేత్రము ఏది? ఆ క్షేత్రము ఒక **సమానాంతర చతుర్భుజము.**—అంటే, రెండు జతల ప్రతిముఖ భుజములును సమానాంతరములుగా గలది.

(b) PQRS ఒక సమానాంతర చతుర్భుజము. ∠P=72°, అయినప్పుడు, ∠Q విలువ ఎంత? ఏల?

11. PQRS అను సమానాంతర చతుర్భుజము రచింపుము:—

(a) PQ=3·2 సెం.మీ., PS=4·6 సెం.మీ., ∠P=50°. QR, SR లును, తక్కిన కోణములును కొలువుము.

(b) PQ=6·5 సెం.మీ., PS=7 సెం.మీ., ∠P=80°. QR, SR లును, తక్కిన కోణములును కొలువుము.

తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము: — **సమానాంతర చతుర్భుజముయొక్క ప్రతిముఖభుజములు సమములు. సమానాంతర చతుర్భుజముయొక్క ప్రతిముఖకోణములు సమములు.**

12. పై 11 (a), 11 (b) ప్రశ్నలలోని సమానాంతర చతుర్భుజములను కత్తిరించి, ఒకొక్కదానిని ఒక కర్ణమువెంట కత్తిరించి, ఒకొక్కదాని రెండు త్రిభుజములును సర్వదా సమానములని ఆచ్ఛాదనపద్ధతిని నిరూపింపుము తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—**ఒకొక్క కర్ణమే సమానాంతర చతుర్భుజమును సమద్విఖండన చేయును.**

13. 12-వ ప్రశ్నలోని సమానాంతర చతుర్భుజములయొక్క కర్ణములు గీసి వాటి ఖండనబిందువును గుర్తుపెట్టుము. ఐమూలలుగానుండు ఒక జత

కోణిక బిందువులనుండి దాని దూరములు కొలువుము. నీవేమి గమనింతువు? తద్వారా, ఇది ఊహింపుము:— **సమానాంతర చతుర్భుజముయొక్క కర్ణములు పరస్పర సమద్విఖండనములు.**

14. ఈ క్రింది సందర్భములలో PQRS అను సమానాంతర చతుర్భుజమును రచింపుము:—

(*a*) PQ=5 సెం.మీ., QR=6 సెం.మీ., PR=7 సెం.మీ.

(*b*) PQ=6 సెం.మీ., QS=8 సెం.మీ., $\angle$QPS=108°.

(*c*) PR=7 సెం.మీ., QS=9·5 సెం.మీ., PR, QS లు చేయు కోణము=45°.

(*d*) $\angle$SPR=42°, $\angle$PSR=75°, QR=6 సెం.మీ.

15. AB=2″, BC=2·5″, $\angle$B=90° గల ABCD అను సమానాంతర చతుర్భుజము రచింపుము. అన్ని కోణములును సమకోణములని నీవెట్లు నిర్ణయింపగలవు? కర్ణములను కొలిచి, వాటిని పోల్చుము. (ఆ క్షేత్రము **ఒక సమకోణ సమానాంతర చతుర్భుజము**. అనగా, **ఒక ఆయతము.**)

16. AB=5 సెం.మీ., BC=4 సెం.మీ. గల ABCD అను సమానాంతర చతుర్భుజము రచింపుము. $\angle$ABC ఒక సమకోణము కాదు, ఏదో కోణము. కర్ణముల పొడుగులు పోల్చుము. (కోణములు సమకోణములు కానట్టి సమానాంతర చతుర్భుజములు **దీర్ఘ** సమానాంతర చతుర్భుజములు.) తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—**ఆయత కర్ణములు సమానములు; దీర్ఘ సమానాంతర చతుర్భుజ కర్ణములు అసమములు.**

17. PQ=PS=6 సెం.మీ., $\angle$P=72° గల PQRS అను సమానాంతర చతుర్భుజము రచింపుము. (భుజములన్నియు సమములును, ఏదియు సమకోణముగాని కోణములునుగల క్షేత్రమును **"సమచతుర్భుజము"** అందురు). కర్ణములను గీసి వాటి మధ్యగత కోణమును కొలువుము. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—**సమచతుర్భుజ కర్ణములు సమకోణికముగ ఒకదానినొకటి సమద్విఖండన చేసికొనును.**

18. AB, CD లు ఒక్కొక్కటి 5 సెం.మీ. పొడుగుగల సమానాంతరములు. వాటి ఎడము 4 సెం.మీ., వాటి చివళ్లు రెంటిలోను ఒకేవైపువి కలువుము; అనగా, A, C లును, B, D లును. సాధనసాహాయ్యమున AC,

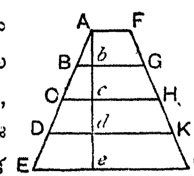
BD లు సమములనియు, సమానాంతరములనియు నిరూపింపుము. AB, CD ల పొడుగును ఎడమును పిరాయించి ఈ చర్య రెట్టింపుము. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—**సమములును సమానాంతరములును అగు రెండు సరళరేఖల చివళ్లు, రెంటిలోను ఒకేవైపువి, కలుపగా వచ్చు రెండు సరళరేఖలును కూడ మరల సమములు, సమానాంతరములు.**

19. ABCD ఒక సమానాంతర చతుర్భుజము. E, F లు AB, CD ల మధ్యబిందువులు. EF కలుపుము. ఇప్పుడు సమానాంతర చతుర్భుజము ఎన్ని క్షేత్రములైనది? ఒక్కొక్కటి సమానాంతర చతుర్భుజమని నిరూపింపుము.

20. 19-వ ప్రశ్నలో AF, CE లు కలుపుము. AECF అను క్షేత్రముగురించి నీకేమి తెలియును?

21. ఆరేసి సెం.మీ. ఎడమున 3 సమానాంతర సరళరేఖలు గీయుము. 4·5 సెం.మీ. చొప్పున ఎడములుగల 5 సమానాంతర సరళరేఖలు గీయుము.

22. AF, BG, CH, DK, EL లు, ఎడములు సమములుగాగల సమానాంతర సరళరేఖలు; అనగా, Ab, bc, cd, de లు సమములు. ఈ సమానాంతరరేఖలను, ఒక తిర్యక్ రేఖ A, B, C, D, E లవద్ద ఖండింపనిమ్ము. AB, BC, CD, DE లు కొలిచి, ఈ మధ్యగతములను పోల్చుము. ఈ సమానాంతరరేఖలనే, FGHKL అను మరియొక తిర్యక్ రేఖ F, G, H, K, L లవద్ద ఖండించునట్టిది. FG, GH, HK, KL ల సాటి పొడుగులను వేసికొనుము. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము:—



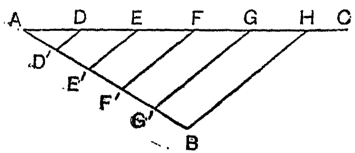
పటము 18.

(*a*) **ఎడములు సమములుగా కొన్ని సమానాంతర రేఖలున్నచో, వాటిని ఖండించు ప్రతి తిర్యక్ రేఖమీది మధ్యగతములును సమములు.**

(*b*) **ప్రతి లోమముగ:—కొన్ని సమానాంతర రేఖలను ఖండించు ఒక తిర్యక్ రేఖమీది మధ్యగతములు సమములగుచో, సమానాంతరముల ఎడములు సమములు.**

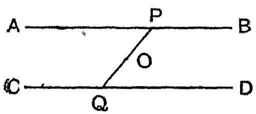
(c) కొన్ని సమానాంతర రేఖలను ఖండించు ఏదో తిర్యక్ రేఖమీది మధ్యగతములు సమములగుచో, వాటిని ఖండించు ప్రతి ఇతర తిర్యక్ రేఖమీది మధ్యగతములును సమములే.

23. AB అను నిర్దిష్టరేఖను 5 సమభాగములు చేయుము. AB తో ఏదో కోణముచేయు AC అను రేఖ గీయుము. విభాగిని ఏదో ప్రమాణముతో (1 సెం.మీ. కావచ్చు) పుచ్చుకొని, దానిచే AC మీద AD, DE, EF, FG, GH అను అడుగులు వేయింపుము. HB కలుపుము. D, E, F, G ల నుండి, BH కి సమానాంతరములు గీయుము. అవి AB ని D′, E′, F′, G′ లవద్ద ఖండింపనిమ్ము. AB 5 సమభాగములైనది. (ఎందుచేత?)



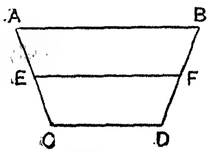
పటము 19.

24. AB, CD లు రెండు సమానాంతరరేఖలు. O అనునది వాటి రెంటికిని సరిగా మధ్యనుండు ఏదో బిందువు. అట్టి బిందువుల దారి ఏది? O మీదుగా, ఏదో స్థితిలో సమానాంతరములచే పరిమితమగు POQ గీయుము. O అనునది PQ యొక్క మధ్యబిందువని నిరూపింపుము.



పటము 20.

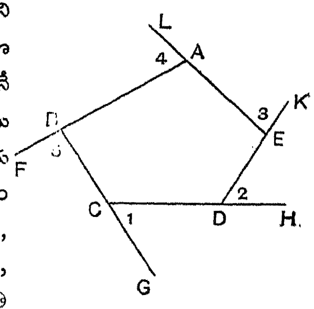
25. ABDC ఒక విషమ చతుర్భుజము. (ప్రతిముఖభుజముల జతలలో ఒకటిమాత్రమే సమానాంతరము.) E అనునది AC కి మధ్యబిందువు. AB కి (అనగా CD కి కూడ) సమానాంతరముగ గీసిన EF, DB ని F వద్ద ఖండించును. F అనునది BD యొక్క మధ్యబిందువని నిరూపింపుము.



పటము 21.

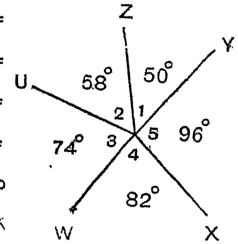
29. ఉన్నతోదర బహుభుజముయొక్క భుజములను క్రమముగ పెంచునపుడేర్పడు బహిఃకోణముల మొత్తము నాలుగు సమకోణములు.

ABCDE ఏదో బహుభుజము. దానియొక్క ఏ ఒక కోణమును రెండు సమకోణములను మించిలేదు. (అట్టి క్షేత్రమును **"ఉన్నతోదర"** క్షేత్రమందురు.) భుజములైన AB, BC, CD, DE, EA లను F, G, H, K, L ల వరకును క్రమముగ పెంచుము. FBC, GCD, HDE, KEA, LAB లు కొలిచి, వాటి మొత్తము 360°, అనగా 4 సమకోణములు అన్న సంగతి గ్రహింపనగును.



పటము 22.

OX అను రేఖ గీయుము. O వద్ద OX మీద ∠XOY = ∠FBC (5) అగునట్లు OY గీయుము. ∠YOZ = ∠GCD (1) అగునట్లు OZ గీయుము. ∠ZOU = ∠HDE (2) అగునట్లు OU గీయుము. ∠UOW = ∠KEA (3) అగునట్లు OW గీయుము. ∠WOM = ∠LAB (4) అగునట్లు OM గీయుము. అప్పుడు (23-వ పటములోవలె) OM, OX ను పూర్ణముగ ఆచ్ఛాదించుట చూడనగును.

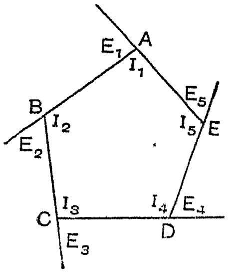


పటము 23.

∴ సకల బహిఃకోణముల మొత్తము
= O వద్దనున్న సకల కోణములయొక్కయు మొత్తము
= 4 సమకోణములు
= 360°.

30. n భుజములుగల ఉన్నతోదర బహుభుజముయొక్క సకల అంతఃకోణములయొక్కయు మొత్తము = $2n$ సమకోణములు − 4 సమకోణములు.

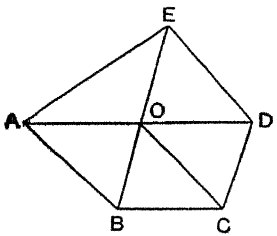
దాని అంతఃకోణములు క్రమముగ I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 లు అనియు, వాటి సాజాత్య బహిఃకోణములు క్రమముగ E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 లు అనియు పెట్టుకొనుము.



పటము 24.

$I_1+E_1=2$ సమకోణములు $I_2+E_2=2$,, $I_3+E_3=2$,, $I_4+E_4=2$,, $I_5+E_5=2$,,	$\therefore (I_1+I_2+I_3+\ldots\ldots I_5)+(E_1+E_2+\ldots\ldots E_5) = 2$ సమకోణములు $\times n$. $\therefore (I_1+I_2+\ldots\ldots\ldots I_5)+4$ సమకోణములు $=2n$ సమకోణములు. $\therefore (I_1+I_2+\ldots\ldots I_5)=2n$ సమకోణములు -4 సమకోణములు.

లేక, ఇట్లు: ABCDE అను క్షేత్రగర్భమున ఏదో O అను బిందువు తీసికొనుము. OA, OB, OC, OD, OE లు గీయుము. OAB, OBC, OCD, ODE, OEA అను త్రిభుజములలో ప్రతిదాని కోణములను విచారణచేయుము.



పటము 25.

$\angle OAB+\angle OBA+$	$\angle AOB=2$ సమకోణములు.
$\angle OBC+\angle OCB+$	$\angle BOC=2$,,
$\angle OCD+\angle ODC+$	$\angle DOC=2$,,
$\angle OED+\angle ODE+$	$\angle EOD=2$,,
$\angle OEA+\angle OAE+$	$\angle EOA=2$,,

$$\therefore \left.\begin{array}{l}\angle OAB+\angle OBA\\ +\angle OBC+\angle OCB\\ +\angle OCD+\angle ODC\\ +\angle OED+\angle ODE\\ +\angle OEA+\angle OAE\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\angle AOB+\\ \angle BOC+\\ \angle DOC+\\ \angle EOD+\\ \angle EOA.\end{array}\right\} = 2n \text{ సమకోణములు.}$$

∴ బహుభుజముయొక్క సకలకోణములు + O వద్దనున్న సకలకోణములు $=2n$ సమకోణములు. అనగా, బహుభుజముయొక్క సకల కోణములు $+4$ సమకోణములు $=2n$ సమకోణములు.

∴ అంతఃకోణముల అన్నింటి మొత్తము $=2n$ సమకోణములు -4 సమకోణములు. $=(2n-4)$ సమకోణములు.

మాదిరి ప్రశ్న.—(1) సమానాత్మక పంచభుజముయొక్క ప్రతి కోణముయొక్కయు విలువ కట్టుము.

ఉత్తరా: — భుజసామ్యమును కోణసామ్యమునుకూడగల క్షేత్రము సమానాత్మకము లేక క్రమక్షేత్రము.

సమానాత్మక పంచభుజములో కోణసామ్యమున్నది.

∴ సమములగు 5 బహిఃకోణముల మొత్తమును $=4$ సమకోణములు, లేక 360°.

$$\therefore 1 \text{ బహిఃకోణము} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ.$$

కాని, అంతర్బహిఃకోణములయొక్క ఒక జేత మొత్తము $=2$ సమకోణములు, లేక 180°.

∴ 1 అంతఃకోణము $=180^\circ-72^\circ=108^\circ$.

మాదిరి ప్రశ్న.—(2) n భుజములుగల ఒక సమానాత్మక బహుభుజముయొక్క అంతఃకోణము 150°. n, (అనగా భుజసంఖ్యను) కట్టుము.

అంతఃకోణము $=150^\circ$.

∴ బహిఃకోణము $=180^\circ-150^\circ=30^\circ$.

అయితే, సకల బహిఃకోణములయొక్కయు మొత్తము $=4$ సమకోణములు, లేక 360°.

$$\therefore \text{ బహిఃకోణముల సంఖ్య} = \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12.$$

∴ భుజసంఖ్య $=12$.

అభ్యాసము 7 (G)

1. క్రమముగ 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15 చొప్పున భుజములుగల సమానాత్మక బహుభుజములయొక్క అంతఃకోణపు విలువలను కట్టుము.

2. కొన్ని సమానాత్మక బహుభుజముల అంతఃకోణములు క్రమముగ 120°, $128\frac{1}{7}^\circ$, 135°, 140°, 144°, 150°, 156°. ప్రతిదానియొక్కయు భుజసంఖ్య కట్టుము.

3. ఏ సమానాత్మక బహుభుజమునకైనను బహిఃకోణపు విలువ 25°, 27°, 32° ఉండగలదా?

4. 4 సెం.మీ. పొడుగుగల భూమిమీద, ఒక సమానాత్మక పంచభుజమును, షట్‌భుజమును, అష్టభుజమును రచింపుము.

5. 2 అం. పొడుగుగల భూమిమీద, ఒక సమానాత్మక పంచభుజమును, షట్‌భుజమును, అష్టభుజమును రచింపుము.

6. 4, 5 ప్రశ్నలలోని ప్రతి క్షేత్రములోను ప్రతి భుజమునకును ఇటునటునుండు భుజములు ఖండించుకొను వరకును పెంచి ఒక నక్షత్రాకారమువంటిది నిర్మించి, దాని అగ్రకోణముల మొత్తమును కట్టుము.

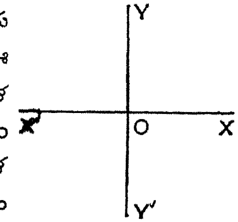
7. ABCDE ఒక సమానాత్మక పంచభుజము. AC, AD లు గీయుము. BAC, CAD, DAE అను కోణముల విలువలు కట్టుము. BE గీయుము. CD కి BE సమానాంతరమని నిరూపింపుము.

8. ABCDEF ఒక సమానాత్మక షడ్భుజము. AC, DF లు గీయుము. BAC, BCA, EFD, EDF అను కోణముల విలువలు కట్టుము. AC, DF లు సమానాంతరములని నిరూపింపుము. BE గీయుము. AF, CD లు BE కి సమానాంతరములని నిరూపింపుము. AD, BE, CF లు గీసి, అవి ఏకబిందుగతములని నిరూపింపుము. వాటి ఖండనబిందువు O అయినప్పుడు, భుజములు కొలిచియో, కోణములు కొలిచియో, మరెట్లో, OAB, OBC, OCD, ODE, OEF, OAF అను త్రిభుజములలో ప్రతిదియు సమత్రిభుజమని నిరూపింపుము.

అధ్యాయము VIII.

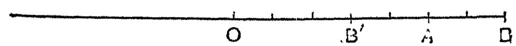
ధన ఋణరాసులు; అంకరాసుల ఆదేశము, ఫలనిర్ణయము. ధన ఋణసంఖ్యలు. బీజగణితసమాసముల కూడిక తీసివేతలు. ధనఋణరాసులకు అనువర్తించు ప్రథమ కర్మచతుష్టయము. కుండలముల ప్రవృత్తినివృత్తులు. ఘాతాంకసూత్రములు.

31. ఒక మనుష్యుడు O వద్ద బయలుదేరి X ను చేరుటకు OX లేక X′OX అనే దిక్కునకు నడచును. X′ ను చేరుటకు OX′ లేక XOX′ అనే దిక్కునకు నడచును. ఈ రెండు దిక్కులును విరుద్ధములు. X′OXను "**ధన**" దిశ అనియు, XOX′ ను "**ఋణ**" దిశ అనియు పిలుచుట గణితజ్ఞుల మతము. అట్లే, Y′OY ని "**ధన**" దిశ అనియు, YOY′ ని "**ఋణ**" దిశ అనియు వాడుటకు వారు సమ్మతించిరి.



పటము 26.

32. ఒక మనుష్యుడు O వద్ద బయలుదేరి A వరకు నడచుటలో 5 అంగలు కుడివైపునకు వేయును. అతడు మరి రెండు కుడివైపునకు వేసి B చేరును. ఇప్పుడు అతడు మొత్తము 5+2 అంగలు వేసినవాడగును. అట్లు కాక, A వరకు నడచి అక్కడనుండి వెన్కకు 2 అంగలు వేసినచో అతడు B′ వద్ద, అనగా అళంగునుండి 5—2 అంగలు (3 అంగలు) ఎడమున నుండును. కాబట్టి "—" అనునది ఒక్క తీసివేత మాత్రమేకాక "**దిశావైరుధ్యము**" కూడ సూచించును. ఋణరాసియొక్క ఈ ప్రత్యేక ప్రాముఖ్యము అనేక విధములనుదాహరింపవచ్చును: ఉదా.



పటము 27.

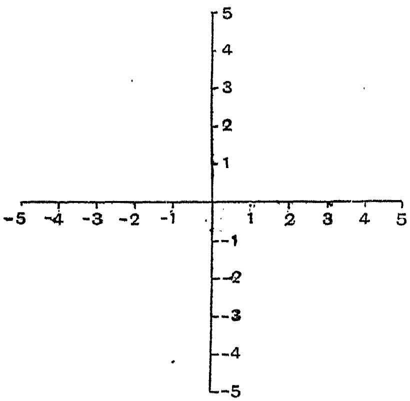
1. + 32 అనుదానికి ఉష్ణమితిలో శీతలాంకమునకు 32° పైన అని అర్థమైనచో, —32 అనుదానికి 32° క్రింద అని అర్థమగును.

2. + 800 అనుదానికి సముద్రపు మట్టమునకు 800 అడుగులు పైన అని అర్థమైనచో, —800 అనుదానికి 800 అడుగులు క్రింద అని అర్థమగును.

3. + 60 అనుదానికి క్రీస్తు తరువాత 60 సంవత్సరములు అని అర్థమైనచో, —60 అనుదానికి క్రీస్తు పూర్వము 60 సంవత్సరములు అని అర్థమగును.

4. + 5 అనుదానికి 5 రూపాయలు లాభము అనిగాని ఆస్తి అనిగాని అర్థమైనచో, −5 అనుదానికి 5 రూపాయలు నష్టము అనిగాని అప్పు అనిగాని అర్థమగును.

33. ప్రతి ధనాంకమునకును, సంఖ్యకును ఒక సాజాత్య ఋణాంకమును, సంఖ్యయు నుండునని ఈ ప్రక్క బొమ్మనుబట్టి విశదము. ఏదో కొంత ధనమున్నవాడు ఏ ఋణస్థునికంటెనైనను సరె నయమే అయినట్లు: ప్రతి ధన సంఖ్యయు ఏ ఋణసంఖ్యకంటెనైనను సరె, సమస్త ఋణసంఖ్యల మొత్తముకంటెనైనను సరె, ఎక్కువదే. అప్పు ఆస్తుల రెంటిలో ఏ ఒకటియుకూడ లేక సర్వశూన్యుడైనవాడుకూడ ఋణస్థునికంటె నయము అయినట్లు: "0" కూడ ఏ ఋణసంఖ్యకంటెనైనను సరె, ఎక్కువదే.



పటము 28.

34. ధన ఋణరాసుల కూడిక.



పటము 29.

ఒక మనుష్యుడు O నుండి 5 అంగలు కుడివైపునకు వేసి A నొద్దకు నడచి, అక్కడనుండి 3 అంగలు మరల కుడివైపునకు వేసినచో, అతడు B నొద్ద, అనగా O నుండి 8 అంగలు కుడివైపున నుండును.

$\therefore OA+AB=OB$ అనగా, $+5+3=+8$ .... (1)

అట్లే, $OA+AE=OE$ అనగా, $+5-3=+2$ .... (2)

[AE ఋణదిశ గావున, అది −3].

అట్లే, $OA'+A'E'=OE'$ అనగా, $-5+3=-2$ .... (3)

[OA', OE' లు ఋణదిశ, A'E' ధనదిశ].

అట్లే, $OA'+A'B'=OB'$ అనగా, $-5-3=-8$ .... (4)

[అన్ని అంగలును ఋణదిశయే].

35. $-6-8+9=9-8-6=-8+9-6$ అని నిరూపింపవచ్చును.

$-6-8=-14$ కాబట్టి, $-6-8+9=-14+9=-5$ [ఎడమవైపునుండి కుడివైపునకు కలిపినచో].

$9-8-6=1-6=-5.$

$-8+9-6=1-6=-5.$

అందువల్ల, రాసులను మన చిత్తమువచ్చిన క్రమములో కూడి వాటి బీజఫలము కట్టవచ్చును.

ఉదా. 1. $4a-3a+2a-6a-8a+9a$:—సూక్ష్మము చేయుము.

$4a-3a+2a-6a-8a+9a=(4a+2a+9a)-3a-6a-8a.$

$=15a-17a.$

$=-2a.$

ఏ క్రమములోనైనను సరె వీటిని కలుపవచ్చును గావున ధనరాసులన్నియు ఒకమాటును ఋణరాసులన్నియు ఒకమాటును కలిపి చేయవచ్చును.

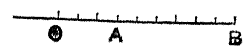
సూత్రము:—కలిపెడి రాసులన్నియు ధనాత్మకమైనప్పుడు, వాటి మొత్తముకూడ ధనాత్మకము. అట్లే, కలిపెడి రాసులన్నియు ఋణాత్మకమైనప్పుడు, వాటి మొత్తముకూడ ఋణాత్మకము. కాని, కొన్ని ధనరాసులును, కొన్ని ఋణరాసులను కలుపునప్పుడు, ధనసంఖ్యల అంకఫలమే పెద్దదియైనచో మొత్తము ధనాత్మకము; ఋణసంఖ్యల అంకఫలమే పెద్దదియైనచో మొత్తము ఋణాత్మకము! అనగా, మొత్తముయొక్క ధన ఋణాత్మకత్వము వాటి గుణకముల ఆధిక్యతనుబట్టి యుండును.

36. ధన ఋణరాసుల తీసివేత.

సందర్భము 1. 9 నుండి 3 తీసివేయుము. అనగా, 3 నకు ఎంత కలిపిన 9?

6 అని విశదము. $\therefore 9-3=6.$

లేక, బొమ్మనుబట్టి, $OA+AB=OB.$



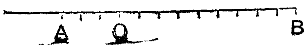
పటము 30.

ఈ లెక్కలో $OA=3$, $AB=6$, $OB=9$.

అనగా, $3+6=9.$

$\therefore 9-3=6.$

సందర్భము 2. 9 నుండి -3 తీసివేయుము. అనగా, -3 నకు ఎంత కలిపిన 9?



పటము 31.

12 అని విశదము. $-3+12=9$.

$\therefore 9-(-3)=12$.

లేక, బొమ్మనుబట్టి, $OA+AB=OB$.

ఇక్కడ, $OA=-3$, $AB=12$, $OB=9$.

$\therefore -3+12=9$.

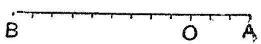
$\therefore 9-(-3)=12$.

దీనినిబట్టి, -3 తీసివేయుట అన్న 3 కలుపుటయే.

సందర్భము 3. -9 నుండి 3 తీసివేయుము. అనగా, 3 నకు ఎంత కలిపిన -9?

-12 అని విశదము. $\therefore 3-12=-9$.

$\therefore -9-(3)=-12$.



పటము 32.

లేక, బొమ్మనుబట్టి, $OA+AB=OB$.

ఇప్పుడు, $OA=3$, $AB=-12$, $OB=-9$.

$\therefore 3-12=-9$.

$\therefore -9-3=-12$.

సందర్భము 4. -9 నుండి -3 తీసివేయుము. అనగా, -3 నకు ఎంత కలిపిన -9?



పటము 33.

-6 అని విశదము. $\therefore -3-6=-9$.

$\therefore -9-(-3)=-6$.

లేక, బొమ్మనుబట్టి, $OA+AB=OB$.

ఇక్కడ, $OA=-3$, $AB=-6$, $OB=-9$.

$\therefore -3-6=-9$.

$\therefore -9-(-3)=-6$.

దీనినిబట్టి, -3 తీసివేయుట అన్న 3 కలుపుటయే.

అంకగణితములో "రెండు సంఖ్యల మొత్తము" అని అనిపించుకొనుదానిని, బీజగణితములో రెండు సంఖ్యల తేడాగా చెప్పవచ్చు. ఉదా., $7+8=15$ (అంకగణితము), $7+8=15$ (బీజగణితము), $7-(-8)=15$ (బీజగణితము). అంకగణితములో "రెండు సంఖ్యల తేడా" అని అనిపించుకొనుదానిని బీజగణితములో రెండు సంఖ్యల మొత్తముగా చెప్ప-

వచ్చు. ఉదా., $8-7=1$ (అంకగణితము), $8-7=1$ (బీజగణితము), $8+(-7)=1$ (బీజగణితము). కాబట్టి, $+$చేగాని $-$చేగాని బంధితమైన రెండు రాసులను, బీజగణితములో, ఒక మొత్తముగాని ఒక తేడాగాగాని, మన ఇష్టమువచ్చినట్లు చెప్పుటకు వీలు. ఉదా. $a+b$ అనునది a, b ల మొత్తము, అదే $a, -b$ ల తేడా; అట్లే, $a-b$ అనునది a, b ల తేడా, అదే $a, -b$ ల మొత్తము.

అందువల్ల, ఇవి లభ్యములు:—$a+(+b)=a+b$.

$a-(-b)=a+b$.

$a-(+b)=a-b$.

$a+(-b)=a-b$.

37. + చిహ్నముగాని − చిహ్నముగాని పూర్వమందుగల కుండలముల నివృత్తి.

$(+9)+(+6)$ ను, $(-9)-(-6)$ ను, విచారణచేయుము. రెండు జతల కుండలములకును లోపలనున్న $+-$చిహ్నములు రాసుల స్వభావమును సూచించును. కాని, కుండలముల మధ్యగతములగు $+-$చిహ్నములు కూడిక తీసివేతలను సూచించును. కుండలములు వాడుట ఎందుకనగా:—వాటిలోపల నున్నదంతయు ఏకరాశిగా గణింపవలెననియు, వాటిలోపల జరగవలసిన పరికర్మలు ప్రప్రథమముననే జరుపవలెననియు సూచించుటకు.

38. సందర్భము 1. $12+(8+3)=12+8+3$ అని నిరూపించుట.

$12+(8+3)=12+11=23$ [ముందు 3 ను 8-కి కలిపి, వచ్చిన మొత్తమగు 11 ను 12 నకు కలుపగా], $12+8+3=20+3=23$. [12 నకు 8 కలిపి, వచ్చినదానికి 3 కలుపగా];

అందువల్ల $12+(8+3)=12+8+3$.

సందర్భము 2. $12+(8-3)=12+8-3$ అని నిరూపించుట.

$12+(8-3)=12+5=17$.

$12+8-3=20-3=17$.

$\therefore 12+(8-3)=12+8-3$.

సందర్భము 3. $12-(8+3)=12-8-3$ అని నిరూపించుట.

$12-(8+3)=12-11=1$.

$12-8-3=4-3=1$.

$\therefore 12-(8+3)=12-8-3$.

సందర్భము 4. $12-(8-3)=12-8+3$ అని నిరూపించుట.

$$12-(8-3)=12-5=7.$$
$$12-8+3=4+3=7.$$
$$\therefore\ 12-(8-3)=12-8+5.$$

పై నాలుగు సందర్భములనుబట్టి మనము సర్వసామాన్యముగ ఇట్లననవచ్చును.

$$\left.\begin{aligned} a+(b+c)&=a+b+c\\ a+(b-c)&=a+b-c\\ a-(b+c)&=a-b-c\\ a-(b-c)&=a-b+c \end{aligned}\right\}$$

a, b, c లకు ధనఋణ వివక్షతలేని ఏ విలువలకైనను సరే ఈ సంబంధములు సత్యములు గనుక.

ఇవి కుండలములను తెచ్చిపెట్టునపుడును, నివారించునపుడును, ఉపచరించును. ఈ క్రింది సూత్రములకు ఆధారమగును:—

(1) కుండలముల పూర్వము + చిహ్నమున్నచో, ఆ కుండలముల లోపలి పదముల చిహ్నములు ఎప్పటియట్లనే యుంచి కుండలముల నివృత్తిచేయవచ్చును. అట్లే, కొన్ని పదముల చిహ్నములు ఎప్పటియట్లనేయుంచి, వాటికి కుండలములు వేసి, ఆ కుండలముల పూర్వము + చిహ్నము ఉంచవచ్చును.

(2) కుండలముల పూర్వము − చిహ్నమున్నచో, ఆ కుండలముల లోపలి ప్రతి పదముయొక్క చిహ్నమునుమార్చి, కుండలముల నివృత్తి చేయవచ్చును. అట్లే, కొన్ని పదములలో ప్రతిదాని చిహ్నమును మార్చి, వాటికి కుండలములువేసి, ఆ కుండలముల పూర్వము − చిహ్నము ఉంచవచ్చును.

ఉదా. 2. $2a+3b+4c$, $2a-3b-4c$, $2a-3b+4c$, $2a-b-c+5d$ ఇవి కలుపుము.

మొత్తము $=(2a+3b+4c)+(2a-3b-4c)+(2a-3b+4c)+(2a-b-c+5d)$

$=2a+3b+4c+2a-3b-4c+2a-3b+4c+2a-b-c+5d.$

$=2a+2a+2a+2a+3b-3b-3b-b+4c-4c+4c-c+5d.$

$=8a-4b+3c+5d.$

లేక, ఇట్లు:

$$\begin{array}{l} 2a+3b+4c\\ 2a-3b-4c\\ 2a-3b+4c\\ \underline{2a-\ b-\ c+5d}\\ 8a-4b+3c+5d \end{array}$$

ఉదా. 3. $-6a+9b-4c$ నుండి $3a-4b+5c$ తీసివేయుము.

$(-6a+9b-4c)-(3a-4b+5c).$

$=-6a+9b-4c-3a+4b-5c.$

$=-6a-3a+9b+4b-4c-5c.$

$=-9a+13b-9c.$

లేక, ఇట్లు:

$$\begin{array}{r} -6a+9b-4c\\ \underline{3a-4b+5c}\\ -9a+13b-9c. \end{array}$$

ఇందులో, $3a$ అను పదము $-3a$ అనియు $-4b$ అనునది $4b$ అనియు, $5c$ అనునది $-5c$ అనియు అనుకొని పై పదములకు కలుపుము. ఎందువల్లననగా, $3a-4b+5c$ తీసివేయుట అనగా $-3a+4b-5c$ కలుపుటయే గనుక.

అభ్యాసము 8 (A)

1. ఇవి సూక్ష్మముచేసి లేఖ్యరూపమున సరిచూపుము:—

(a) $8-2+5$; (b) $-8+2+6$; (c) $10+12-18-20$; (d) $-20+8-6-10$.

2. ఒక ఏజెంటునకు రావలసిన బాకీలలో 8 రూ. ఒకటి, 9 రూ. ఒకటి; తన యజమానునికి అతడు ఇవ్వవలసిన బాకీ 13 రూ. అతనివద్దనున్న రొక్కము 4 రూ. ఈ వ్యాపారము ఏయే మోస్తర్లుగ పైసలుచేయవచ్చునో అనగా ఈ వ్యవహారములన్నియు ఏయే క్రమముల చక్కబెట్టవచ్చునో, బీజగణితఫలములను వ్రాసిచూపుము.

3. ఈ క్రిందివాటి కుండలముల నివారించి, వాటిని సూక్ష్మము చేయుము:—

(a) $(1+2+3)-(1+2-3)-(1+3-2)$.
(b) $(3+4+5)-(3+4-5)-(4+5-3)$.
(c) $(6+8-9)-(9-8+6)-(6+8-9)$.
(d) $(a+b-c)-(b+c-a)+(c+a-b)$.

4. బి. సి. 323 లో అలెగ్జాండరు ఇండియాను దండెత్తెను. ఇండియాపై మొదటి మహమ్మదీయ దండయాత్ర ఎ. డి. 1034 లో జరిగెను. ఈ రెండు సంభవములకును నడిమికాలమెంత? అశోకుడు బి. సి. 200 లో సింహాసన మెక్కెను. అలెగ్జాండరు దండయాత్రకు ఎన్ని సంవత్సరముల తరువాత అశోకుడు రాజ్యమునకు వచ్చెను?

5. ఋగ్వేదకాలము హిందూశాస్త్రజ్ఞులచే బి. సి. 5000 అని నిర్ధరింపబడినది. అది సత్యమే యనుకొనినచో, ఇప్పటికి ఎన్ని శతాబ్దములు?

6. A 10 మైళ్లు ఉత్తరముగ వెళ్లి, వెన్కకు తిరిగి 25 మైళ్లు దక్షిణముగ నడచెను. అతడు మూలస్థానమునకు ఉత్తరమున ఎంతలో నున్నాడు? అతడు మూలస్థానమునకు దక్షిణమున ఎంతలో నున్నాడు?

7. ఒక గొప్పవాడు 20·8 మైళ్లు కేవలము తూర్పుగ నడచి, వెన్కకు తిరిగి 15·2 మైళ్లు పడమరగ వెళ్లెను. అతడు మూలస్థానమునకు పడమట ఎంతలో నున్నాడు? అతడు మూలస్థానమునకు తూర్పున ఎంతలో నున్నాడు?

8. ఒక ప్రచురణసంఘముయొక్క లాభనష్టముల పట్టీలో ఈ దిగువ సంగతులు ఉన్నవి:—

రాబడి			ఖర్చు	
తెలుగు భూగోళము—				
పుస్తకము	అమ్మిన ప్రతుల సంఖ్య	రూ. అ. పై.		రూ. అ. పై.
I	1361	382—12—6	అచ్చు, కాగితము, బైండు	7,586–1–0
II	1114	426—10—0		
III	464	435— 0—0		
తమిళ భూగోళము—			ప్రకటన ఖర్చు టింపు	30–0–0
I	898	252— 9—0		
II	904	381— 6—0		
III	722	676—14—0		

నిలువయొక్క స్వభావమును తేల్చి, నీ అభిప్రాయమిమ్ము.

9. A అను స్టేషను B అనుదానికి 250 అడుగులు ఎత్తు. B అనునది C అనుదానికి 400 అ. క్రిందు. C కి ఎంత ఎత్తున A ఉన్నది? C కి ఎంత క్రిందున A ఉన్నది?

10. A మొదలు E వరకు ఉన్న ఒక రోడ్డు B, C, D ల మీదుగా నున్నది. A కి x అ. ఎత్తున B, B కి y అ. క్రిందున C, C కి z అ. ఎత్తున D, D కి m అ. క్రిందున E, ఉన్నవి. A తో పోల్చునపుడు E ఎంత ఎత్తు? $x=60$, $y=72$, $z=48$, $m=90$ అయినప్పుడు నీ ఫలితమును సమన్వయించుము.

11. ఒక యాత్రికుడు పెద్ద తిరుపతికొండ 30 మెట్లు ఎక్కగా, ఒక ఇత్తడిబిందె అతని చెయ్యి జారి 20 మెట్లు క్రిందికి దొర్లి ఆగినది. అది తీసికొని అతడు పైకి 25 మెట్లు వెళ్లగానే తాను దేవునికివ్వదలచిన ఒక వెండి వస్తువు మరచివచ్చినట్లు అతడు గ్రహించి, కొండ మొదటికి దిగి, అది పుచ్చుకొని 100 మెట్లు ఎక్కి తన వారిని జేరెను. ఈ ఆరోహణ అవరోహణములు లేఖ్యరూపమున చూపుము.

12. ఒక నూలువర్తకుడు మొదటిరోజున x రూ. లాభమును, రెండవరోజున y రూ. నష్టమును, మూడవరోజున $3x$ రూ. లాభమును, నాల్గవరోజున $\frac{1}{2}x$ రూ. లాభమును, అయిదవరోజున $\frac{3}{4}y$ రూ. నష్టమును పొందెను. మొత్తముమీద అతడు పొందినది నష్టమే అని తెలిసి, ఆ నష్టమునకు ఒక లఘుసమాసము కట్టుము. మొత్తముమీద అతడు పొందినది లాభమే అని తెలిసి, ఆ లాభమునకు ఒక సమాసము కట్టుము. $x=60$, $y=80$ అయినప్పుడు పై వ్యవహారముల ఫలితమును నీవెట్లు సమన్వయింతువు?

13. x నకు ఏ విలువలున్నచో ఈ క్రింది సంబంధములు కుదురును:—

(a) $x+8=2$, (b) $x-20=-30$, (c) $x+70=20$, (d) $x+100=56$.

14. 0° సెంటిగ్రేడునకు 32° ఫారన్హీట్టు తుల్యము. $1°F=\frac{5}{9}°C$ అని తెలిసి, 0° ఫారన్హీట్టునకు సెంటిగ్రేడు మానములో తుల్యమైన లెక్క కట్టుము.

15. $x°$ సెంటిగ్రేడునకు 32° ఫారన్హీట్టు తుల్యమైనచో, $\frac{x}{100}=\frac{F-32}{180}$ అగును. $x=-20$ అయినప్పుడు y విలువ కట్టుము.

16. B దగ్గరకంటె A దగ్గర 5,000 రూ. తక్కువ ఉన్నది. B కి ఉన్నదంతా 2,570 రూ. A యొక్క ఆర్థికస్థితి ఎట్లున్నట్లు?

17. A ఒక గుఱ్ఱమును B కి, 50 రూ. లాభమునకు అమ్మగా, అతడు దానిని C కి, 75 రూ. నష్టమునకు ఇచ్చివేసెను. అప్పుడు C దానిని D కి 20 రూ. లాభమునకు అమ్మెను. A కొనుబడితో పోల్చినచో D కొనుబడి ఎట్లున్నది? ఋణసంజ్ఞనాడి సమాధానము చెప్పుము.

18. ఒక ద్రావణమును 65 C వరకు కాచి చల్లార్పగా దాని ఉష్ణపరిమాణము —20°C వద్దకు దిగినది. ఉష్ణపరిమాణము ఎన్ని డిగ్రీలపాటు తగ్గిపోయినది?

19. —10°C వద్దనున్న ఒక ద్రావకమును 25°C వద్దకు కాచినారు. దానిని ఎన్ని డిగ్రీలుపాటు కాచినట్టు?

20. —15°C వద్దనున్న ఒక ద్రావకమును X°C వద్దకు కాచినారు. దానిని ఎన్ని డిగ్రీలుపాటు కాచినట్టు?

21. ఒక ద్రావకము —10°C వద్ద ఘనీభవించి, 80°C వద్ద ఉడుకును. ఉడికెడు స్థితినుండి దానిని ఎన్ని డిగ్రీలు చల్లార్చినచో అది గడ్డకట్టును?

22. ఒక ద్రావకము X°C వద్ద ఘనీభవించి, Y°C వద్ద ఉడుకును. గడ్డకట్టు స్థితినుండి ఉడికెడి స్థితికి తెచ్చుటకు దానిని ఎన్ని డిగ్రీలపాటు వేడి చేయవలెను?

23. అమ్ము ధర=కొను ధర+లాభము. అమ్ము ధర=60 రూ., కొను ధర=80 రూ. ను అయినప్పుడు లాభముయొక్క విలువ కట్టుము. దానిని నీవు ఎట్లు సమన్వయింతువు?

24. $v=u+gt$ అను దానిలో u అనగా ఆది వేగము, v అనగా t సెకనులపాటు చలించిన ఒక స్వరూపముయొక్క అంత్యవేగము, g అనగా స్వరూపము పడుటను లేచుటనుబట్టి సెకనునకు 32 అ. చొప్పున ప్రతి సెకనును దాని వేగమునకుండు వృద్ధియో క్షయమో అయినప్పుడును:—పైకి విసరిన ఒక స్వరూపమునకు $u=$ సెకనునకు 60 అ. అయినప్పుడు, 4 సెకనులతరువాత దానివేగము కట్టుము. $u=0$ కాగా, దానిని కొంత ఎత్తునుండి పడనిచ్చినప్పుడు, 5 సెకనులతరువాత దానివేగము కట్టుము.

25. ఎ. డి. 622 సంవత్సరములో మహమ్మదు మదీనాకు పలాయనమయ్యెను. నాటితో (హెజీరా అను) ఒక శకము ప్రారంభమయ్యెను. ఈ క్రింది సంభవములను ఆ శకానుసారము చెప్పుము:—

(*a*) అలెగ్జాండరుయొక్క ఇండియా దండయాత్ర, బి. సి. 323.
(*b*) బుద్ధుని జననము, బి. సి. 527.
(*c*) క్రీస్తు జననము, 0.
(*d*) శంకరాచార్యుని జననము, ఎ. డి. 800.
(*e*) పానిపట్ మొదటి యుద్ధము, ఎ. డి. 1526.

26. ఆఫ్రికాయొక్క ప్రకృతి పటములో, సముద్రపు మట్టమునకు పైయెత్తును సూచించుటకు ఈ క్రింది రంగులు వాడి, వాటికి ఎదురుగ ఎత్తులను ఇచ్చినారు:—

ముదురు ఎరుపు	12000	అ.
మంట ఎరుపు	6000	,,
లేత ఎరుపు	3000	,,
తెలుపు	1500	,,
లేత ఆకుపచ్చ	600	,,
ఆకుపచ్చ	0	,,

ప్రదేశముల ఔన్నత్యమును కట్టుటకు, సముద్రపు మట్టమును మానివేసి సముద్రపు మట్టమునకుపైన 5000 అ. ఉన్న ప్రదేశమును ఆధారముగ చేసికొనినచో, ఇచ్చిన రంగులకు ఎదురుగనున్న లెక్కలను నీవు ఎట్లు మార్తువు?

27. ఈ క్రింద కొన్నిస్థలముల రేఖాంశములు ఇచ్చి ఉన్నవి:—

గ్రీనిచ్ 0°	న్యూయార్క్ 72° W.
ఉజ్జయిని 76° E.	టోకియో 140° E.
రోమ్ 10° E.	పెకింగ్ 120° E.
ట్రినిడాడ్ 60° W.	కాన్‌స్టాంటినోపిల్ 30° E.

(A) వీటి రేఖాంశముల తేడా కట్టుము: (1) న్యూయార్క్ రోములు, (2) న్యూయార్క్ ఉజ్జయినులు, (3) న్యూయార్క్ టోకియోలు, (*a*) తూర్పునకు లెక్కచూచి ఒకమాదిరిగను, (*b*) పడమటకు లెక్కచూచి ఒక మాదిరిగను.

(B) తూర్పు రేఖాంశమును 180° దాక +గా చెప్పి, పడమర రేఖాంశమును 180° దాక —గా చెప్పుము. అప్పుడు పై పట్టీలో ఇచ్చిన స్థలముల రేఖాంశములు ఏమి?

(C) పురాతన హిందూ జ్యోతిషసిద్ధాంతులు స్థలముల రేఖాంశములను కట్టుటకు ఉజ్జయిని ఆదిగా తీసికొనిరి. (B) లో చెప్పిన కట్టుబాటు ప్రకారము వారు పైని ఇచ్చిన స్థలముల రేఖాంశములను వారు ఎంతెంత అని కట్టి ఉందురు?

(D) క్రమమున, అమెరికనులు న్యూయార్క్‌ను, జపానీయులు టోకియోను రేఖాంశగణనకు మూలబిందువులుగా తీసికొందురు అనుకో. (B) లోని కట్టుబాటుప్రకారము వారివారికి పై స్థలముల రేఖాంశములు ఎట్లు మారును?

28. ఈ క్రింద కొన్ని స్థలముల అక్షాంశములు ఇచ్చి ఉన్నవి:—

కేప్‌టౌన్ 32° S.	సెంట్. పీటర్స్‌బర్గ్ 60° N.
ఫాక్లండ్ 50° S.	హైదరాబాద్ (సింధ్) 25° N.
పెకింగ్ 40° N.	లండన్ 51° N.

వీటి అక్షాంశభేదములను కట్టుము:—(*a*) కేప్‌టౌన్ లండనులు, (*b*) ఫాక్లండ్ సెంట్. పీటర్స్‌బర్గులు, (*c*) ఫాక్లండ్ లండనులు (ఉత్తర అక్షాంశమును + గను; దక్షిణ అక్షాంశమును — గను చెప్పుము.) హైదరాబాద్ మీదుగానుండు అక్షాంశరేఖ శూన్యము అగుచో పై స్థలముల అక్షాంశములుగా ఏ సంఖ్యలుండును?

29. ఈ క్రింది పట్టీలో ఇండియానుండి యునైటెడ్ కింగ్‌డమ్‌కు 5 వరుస సంవత్సరములలో దిగుమతి అయిన తేయాకువిలువలు ఇచ్చి ఉన్నవి:—

	పౌ.		పౌ.
1912	7,033,488	1915	10,365,062
1913	7,839,223	1916	10,095,978
1914	7,861,425		

(A) 1914 సంవత్సరపు ఎగుమతీలతో 1912, 1913, 1915, 1916 లవి పోల్చి, తేడాలను, పెచ్చుగానున్నవి + గను తరుగుగానున్నవి — గను చెప్పుము. (B) ఆ పెరుగు తరుగుల నుపయోగించి 5 సంవత్సరములమీదను మొత్తము ఎగుమతి కట్టుము.

30. 1912—1916 లలో, యునైటెడ్ కింగ్‌డమ్‌లో, త్రవ్వితీసిన బొగ్గు మొత్తము ఈ క్రిందిపట్టీలో ఇచ్చి ఉన్నది:—

1912—260,416,338 టన్నులు.	1915—253,206,081 టన్నులు.
1913—287,430,473 ,,	1916—256,348,351 ,,
1914—265,664,303 ,,	

ప్రతి యేడును సప్లయిచేయ నెంచినది 300,000,000 టన్నుల బొగ్గు అనుకొని, ఏఏటను ఎంతెంత లోటువచ్చినదో అది ఋణరాశిగా చెప్పి, ఆ రాసులవల్ల, మొత్తము అయిదు ఏళ్లలోను అసలు ఎంత బొగ్గు త్రవ్వరో కట్టుము.

31. ఒక బాలభట సంఘములోని రెండు దళములగు పాటీల్లును జాగిలములను P అను ఒక చోటునుండి బయలుదేరి, క్రమమున x గజములును y గజములును విరుద్ధదిశలలో నడచి, పాటీల్లు ఉత్తరముగనున్న Q ను జాగిల

ములు దక్షిణముగనున్న R ను జేరుకొనిరి. అప్పుడు ఒక జాగిలము ఉత్తరముగ M గజములు పరుగెత్తి ఒక పాటీలు నిమిత్తము ఒక ఉత్తరమును దాచిపోగా, ఆ పాటీలు Q నుండి దక్షిణముగ Z గజములు పరుగెత్తి దానిని వెల్లగించెను. z ను x, y, m ల పదములలో చెప్పుము. $x=300$, $y=400$, $m=30$ అయినప్పుడు, నీ ఫలితమును మూలబిందు ప్రమేయకముగ గమనించి, ఋణసంజ్ఞవాడి సమన్వయింపుము.

32. నీటితో పోల్చునప్పటి ఒక స్వరూపముయొక్క సాంద్రత ఈ క్రింద సంకేతసూత్రములో నిర్దిష్టము:—

తా. సాం. (తారతమ్య సాంద్రత) $=$ $\dfrac{\text{గాలిలో స్వరూపముయొక్క భారము.}}{\text{గాలిలో దాని భారము—నీటిలో దాని భారము.}}$

(*a*) గాలిలోని భారము 57 గ్రాములును నీటిలోని భారము 54 గ్రాములునుగల ఒక బంగారపు ముక్కయొక్కయు, (*b*) గాలిలోని భారము 12 గ్రాములును నీటిలోని భారము—4 గ్రాములును గల ఒక బెండుముక్కయొక్కయు తారతమ్యసాంద్రతలను కట్టుము.

33. ఈ క్రిందివాటిలో బీజఫలములను కట్టుము:—

(*a*) $3a-6a+9a-10a+12a-7a-5a.$
(*b*) $4b-3b+8b-12b-16b+2b.$
(*c*) $-1+8+2-3-9+10-15+16.$
(*d*) $2x-3x+4x-5x+6x-7x-8x.$

34. ఇవి సూక్ష్మము చేయుము:—

(*a*) $8+9+20-(30-45)+30.$
(*b*) $2x-[3x-\{4x-(6x-8x-9x)\}].$
(*c*) $4y-(8y-\overline{10y-9y})-[2y-\{3y-8y\}].$
(*d*) $184-[296-\{300-(400-75-80)\}].$

35. ఇవి కలుపుము:—

(*a*) $2a+3b-4c,\ 6a-9b+10c,\ 7a-9b+3c.$
(*b*) $2a-b-c+3d,\ 4a-b-c+2d,\ 8a-6b+9c+3d.$
(*c*) $x+y+z+u,\ x+y-3z-u,\ 3x+2y+4z-6u,\ 3x+6y-z-u.$
(*d*) $5l+3m-6n,\ 3l-4m+2n,\ 4n-l-m,\ 10l+9m-8n.$
(*e*) $2p-3q-4r,\ -6r-8a-9b,\ -9c+3p-2q.$
(*f*) $a+b+c,\ b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c.$

36. (a) $a+3b+c$ ని $2a-3b+4c$ నుండి,
(b) $2p-3q+5r$ ను $4p-6q+9r$ నుండి,
(c) $2l+3m-4n$ ను $6m-8n+5a+3b$ నుండి,
(d) $6x+9y-3z$ ను $10x-6y+4z+3u$ నుండి,
(e) $3x+4y+10z-u$ ను $3x+6y-8z$ నుండియు తీసివేయుము.

37. $5+(2+3)=5+2+3$ అనునది, ఈ ప్రక్కను కొలప్రకారము గీసి ఉన్న గీతలవల్ల నిరూపింపవచ్చును:—

5
2
3.
(2+3)
5+ (2+3).
5
2
5 + 2
3
5+2+3

అట్లే, గీతలుగీసి,

$8+(4-3)=8+4-3$ అనియు,
$8-(4+3)=8-4-3$,,
$8-(4-3)=8-4+3$,,

నిరూపింపుము.

38. ఈ క్రింది కుండలములలో ఏ పదములు వ్రాయవలెను?—
(a) $p-q-r+s=p-q-(\quad)$.
(b) $a-2b+3c+4d=a-(\quad)$.
(c) $7x+8y-3z+4u=7x-\{-8y-(\quad)\}$.
(d) $5-6+3-4+8=5-[6-\{3-(\quad)\}]$.

39. ఈ క్రింది దశాంశములను కోరిన రూపమున చెప్పుము:—
(a) $-\cdot 2345678=-1+$ ఒక దశాంశము.
(b) $-2\cdot 3847697=-3+$,,
(c) $-6\cdot 8975698=-7+$,,
(d) $-9\cdot 0008376=-10+$,,

39. ధన ఋణరాసుల గుణకార భాగహారములు.

(a) (i) 5×3 యొక్కయు, (ii) $(-5)\times 3$ యొక్కయు, (iii) $5\times(-3)$ యొక్కయు, (iv) $(-5)\times(-3)$ యొక్కయు అర్థములను, ఫలితములను నిర్ణయింపవలెను.

సందర్భము 1. $(+5)\times 3$ అంటే అర్థము, $(+5)$ ని 3 చే గుణింపవలయునని. గుణకారము, కూడికయొక్క హ్రస్వరూపము. $\therefore (+5)\times 3$ అనగా, $(+5)$ లను మూడింటిని వ్రాసి వాటిని కలుపవలెను.

$$\therefore +5\times 3=(+5)+(+5)+(+5)=5+5+5=15.$$

సందర్భము 2. -5×3 అనగా, (-5) లను మూడింటిని వ్రాసి వాటిని కలుపవలెను.

$$\therefore -5\times 3=(-5)+(-5)+(-5)=-5-5-5=-15.$$

సందర్భము 3. 5×-3 అనగా, 5 లను మూడింటిని వ్రాసి ప్రతిదానిని తీసివేయవలెను.

$$\therefore 5\times -3=-(+5)-(+5)-(+5)=-5-5-5=-15.$$

సందర్భము 4. -5×-3 అనగా, -5 లను మూడింటిని వ్రాసి ప్రతిదానిని తీసివేయవలెను.

$$\therefore -5\times -3=-(-5)-(-5)-(-5)=+5+5+5=15.$$

సర్వసామాన్యముగ వచ్చునది: $(+a)\times(+b)=+ab$......(1).
$(-a)\times(+b)=-ab$......(2).
$(+a)\times(-b)=-ab$......(3).
$(-a)\times(-b)=+ab$......(4).

(1), (4) లనుబట్టి సమసంజ్ఞలుగల రాసుల లబ్ధము +; విషమ సంజ్ఞల రాసుల లబ్ధము − అని, (2), (3) వల్ల విశదము.

కాబట్టి, $\frac{+ab}{+a}=+b$ లేక $\frac{-ab}{-a}=+b$. (5)

మరియు, $\frac{-ab}{+a}=-b$ లేక $\frac{+ab}{-a}=-b$. (6)

ఈ (5) ని బట్టి, భాజ్యభాజకములు ఒకేసంజ్ఞగలవియైనచో, భాజితము ధనాత్మకము.

ఈ (6) ని బట్టి, భాజ్యభాజకములు భిన్నసంజ్ఞలుగలవియైనచో, భాజితము ఋణాత్మకము.

(b) ధన ఋణరాసుల ఘాతములు.

$a\times a$ ని a^2 అని వ్రాయుదురు; $a\times a\times a$ ని a^3 అని వ్రాయుదురు; $a\times a\times a\times a$ ని a^4 అని వ్రాయుదురు; $a\times a\times a\times a\times a$ ని a^5 అని వ్రాయుదురు; ఇట్లే, తక్కినవియు. కొన్ని అవయవముల లబ్ధము వ్రాయవలసివచ్చి, వాటిలో ప్రతినియు a అగునప్పుడు, a^2, a^3, a^4, a^5 వంటివి ఆ లబ్ధముల సంగ్రహరూపములని గమనింపుము. అవి, క్రమమున a^1 యొక్క రెండవ, మూడవ, నాల్గవ, అయిదవ ఘాతములందురు. a^2 ని a వర్గ అనియు, a^3 ని a ఘనము అనియు, a^4 ని a నాలుగువకు అనియు, a^5 ని

a అయిదునకు అనియు చదువుదురు. a ని "ఆధారము" అనియు, 2, 3, 4, 5 లలో ప్రతిదానిని "ఘాతాంకము" అనియు వాడుదురు.

$(-a)^2=(-a)\times(-a)=+a^2.$
$(-a)^3=(-a)\times(-a)\times(-a)=-a^3.$
$(-a)^4=(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a)=+a^4.$
$(-a)^5=(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a)=-a^5.$

అందువల్ల, ఒక ఋణరాశిని రెండవ ఘాతమునకుగాని, నాలుగవ ఘాతమునకుగాని మరి ఏ ఇతర సరిఘాతమునకుగాని పెంచినచో లబ్ధము ధనాత్మకము; కాని, దానిని మూడవ ఘాతమునకుగాని, అయిదవ ఘాతమునకుగాని, మరి ఏ ఇతర బేసి ఘాతమునకుగాని పెంచినచో లబ్ధము ఋణాత్మకము.

40. ఘాతాంక సూత్రములు.

సందర్భము 1. $a^m=a\times a\times a......a$, a ని m సార్లు వ్రాయవలెను. (అనగా ప్రతిదియు a అగు m అవయవములుండును.)

$a^n=a\times a\times a.........a$, a ని n సార్లు వ్రాయవలెను. (అనగా ప్రతిదియు a అగు n అవయవములుండును.)

∴ $a^m\times a^n=a\times a\times a.........$అని a ని m సార్లు వ్రాసి గుణించి దానిని $a\times a\times a.........$అని a ని n సార్లు వ్రాయగా వచ్చుదానిచే గుణించవలయును.

$=a\times a\times a\times a.........$అని $(m+n)$ సార్లు వ్రాసి గుణించిన సరి. (అనగా ప్రతిదియు a అగు అవయవములు $m+n$ ఉండును.)
$=a^{m+n}.$

దీని చొప్పున, $a^5\times a^3=a^{5+3}=a^8$. అట్లే, $a^{10}\times a^8=a^{10+8}=a^{18}$.

ఇది గమనింపుము: $a^0\times a^3=a^{0+3}=a^3$. ∴ $a^0=\frac{a^3}{a^3}=1.$

ఏదైన సంఖ్యనుగాని రాశినిగాని శూన్యఘాతమునకు పెంచినచో, ఆ ఘాతముయొక్క విలువ 1.

సందర్భము 2. (a) $\frac{a^{12}}{a^8}$

$$=\frac{a\times a\times a\times a......\text{అనుచు } a \text{ ని 12 సార్లు వ్రాయవలెను}}{a\times a\times a\times a......\text{అనుచు } a \text{ ని 8 సార్లు వ్రాయవలెను}}$$

$=a\times a\times......\times a$ అని a ని 12−8 సార్లు వ్రాసి గుణింపగా వచ్చునది. భాగహారముచే 8 a లు తొలగిపోవును.

కాబట్టి, సర్వసామాన్యముగా, $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$. ($m>n$ అగునప్పుడు).

(b) $\frac{a^3}{a^6}=\frac{a\times a\times a}{a\times a\times a\times a\times a\times a}=\frac{1}{a^3}$......(1).

$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ అను సూత్రమును m, n లకు ఉండగల సకలమైన విలువలకును సత్యమే అనుకొనినచో, (అనగా $m<n$ అగునప్పుడు కూడ) వచ్చునది ఏమనగా,

$\frac{a^3}{a^6}=a^{3-6}$ లేక a^{-3}......(2).

అందువల్ల, $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$; ఇట్లే సర్వసామాన్యముగ $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

సందర్భము 3. $(a^3)^5$ ని విచారణచేయుము.

$(a^3)^5=a^3\times a^3\times a^3\times a^3\times a^3$ { ∴ అది, ప్రతిదియు a^3 అగు 5 అవయవముల లబ్ధము కావున }.

$=a^{3+3+3+3+3}$ (1-వ సందర్భమునుబట్టి)
$=a^{3\times5}$ (ఘాతాంకములో 3, అయిదుసార్లు ఉన్నది కాబట్టి)
$=a^{15}.$

సర్వసామాన్యముగ, $(a^m)^n=a^{mn}$.

సందర్భము 4. $(ab)^m=ab\times ab\times ab\times ab\times......ab$ (అని m సార్లు వ్రాయగా).

$=a\times a\times a\times a......a$ అనుచు m సార్లు వ్రాసి గుణించి, దానిని $b\times b\times b\times b......b$ అనుచు m సార్లు వ్రాయగా వచ్చుదానిచే గుణించిన సరి.

$=a^m\times b^m.$
$=a^m b^m.$

ఇట్లే, $(x^2y)^5=(x^2)^5\times(y^1)^5=x^{10}y^5$......(3-వ సందర్భము.)

మూలములు.—a ని a^2 యొక్క వర్గమూలము అందురు.

a ని a^3 యొక్క ఘనమూలము అందురు.

$\sqrt{a}$ అనగా a యొక్క వర్గమూలము అనియు $\sqrt[3]{a}$ అనగా a యొక్క ఘనమూలము అనియు అర్థము.

ఇవన్నియు మనకు తెలియును: $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$, $(-2)^2=4$, $(-3)^2=9$, $(-4)^2=16$, $(-5)^2=25$, $(-6)^2=36$, $(-7)^2=49$, $(-8)^2=64$, $(-9)^2=81$.

వర్గమూలముయొక్క సంజ్ఞను ($\sqrt{\ }$) వాడి పై విషయములను ఇట్లు వ్రాయవచ్చును:—

$\sqrt{4}=\pm2$, $\sqrt{9}=\pm3$, $\sqrt{16}=\pm4$, $\sqrt{25}=\pm5$, $\sqrt{36}=\pm6$, $\sqrt{49}=\pm7$, $\sqrt{64}=\pm8$, $\sqrt{81}=\pm9$.

ఉదా. 4. దీని అంకఫలమును కట్టుము:—

$\sqrt{b^4x^2a^3}+\frac{ax}{by}$ $b=2$, $x=5$, $a=4$, $y=7$ అగునప్పుడు.

$$\sqrt{b^4x^2a^3}+\frac{ax}{by}=\sqrt{2^45^24^3}+\frac{4.5}{2.7}=\sqrt{16.25.64}+\frac{4.5}{2.7}.$$
$$=\sqrt{16}.\ \sqrt{25}.\ \sqrt{64}+\tfrac{10}{7}.$$
$$=4.5.8+\tfrac{10}{7}.$$
$$=160+\tfrac{10}{7}.$$
$$=161\tfrac{3}{7}.$$

ఉదా. 5. $a=2$, $b=-3$ అగునప్పుడు, a^3+b^3 యొక్క విలువ కట్టుము:—

$a^3+b^3=2^3+(-3)^3=2\times2\times2+(-3)\ (-3)\ (-3)=8-27=-19$.

ఉదా. 6. ఇది సూక్ష్మము చేయుము:—$(a^2b)^2\times(b^2c)^3\div(c^2a)^2$.

$$\text{ఇచ్చినది}=\frac{(a^2b)^2\times(b^2c)^3}{(c^2a)^2}=\frac{a^4b^2\times b^6c^3}{c^4a^2}=a^{4-2}.\ b^{2+6}.\ c^{3-4}=a^2b^8c^{-1}=\frac{a^2b^8}{c}.$$

లేక, $\frac{a^4b^2\times b^6c^3}{c^4a^2}=\frac{a^2b^2\times b^6}{c}=\frac{a^2b^8}{c}$.

అభ్యాసము 8 (B)

1. ఈ క్రిందివాటి విలువలు కట్టుము:—

(a) $6x^2-3x+2$, $x=-4, -5, -6, -2, -1, 0, 1\frac{1}{2}, 2, 5$ అగునప్పుడు.

(b) $2x^2+3x+1$, ,, ,, ,,

(c) $1-x+x^2$, ,, ,, ,,

(d) x^4+5x^2+4, $x=-4, -5, -6, -2, -1, 0, 1\frac{1}{2}, 2, 5$ అగునప్పుడు.

(e) $\frac{3x-5}{4x-2}$, ,, ,, ,,

(f) $(2x^2+x+1)\ (x-6)$,, ,, ,,

(g) $\frac{2x^2+x-3}{6x^2+8x-1}$,, ,, ,,

2. $a=0$, $b=-2$, $c=-3$, $d=4$ అగునప్పుడు, వీటి విలువలు కట్టుము:—

(a) $a^2+b^2+c^2$.

(b) $a^2b+b^2c-c^2d$.

(c) $a^2+b^2-ac+c^2+ad$.

(d) $3a^2+5ab-6c^2$.

(e) $a^4-2a^3b+2a^2c^2-b^2c^2$.

(f) $\frac{2b}{c}+\frac{2c}{d}-\frac{2d}{b}$.

(g) $\frac{bc}{d}+\frac{cd}{b}-\frac{bd}{c}+\frac{ac}{8}$.

3. $x=4$, $y=5$, $z=8$, $a=2$, $b=-1$ అయినప్పుడు, వీటి విలువలు కట్టుము:—

(a) $x^3-x^2y-xy^2+y^3$.

(b) $2x^2y+2y^2z-2x^2z$.

(c) $a^y+z^y-x^a$.

(d) $(xy)^a+(yz)^a+b^x$.

(e) $3\ (a+x)+4\ (y+z)-5\ (x+z)$.

(f) $3\ (2a+x)-6\ (7b+y)+8\ (7y-b)$.

(g) $(x+y)^2+(y-z)^2-(x+y)\ (a+b)$.

4. x క్రమముగ 0, 1, 2, 3, 4, 5 లు అయినప్పుడు, y విలువలు కట్టుము:—

(a) $y=4x-3$.

(b) $y=3x+5$.

(c) $y=8x-2$.

(d) $y=6x-1$.

(e) $y=\frac{x+3}{8}$.

(f) $y=\frac{4x-3}{7}$.

(g) $y=\frac{4x-7}{6}$.

(h) $y=\frac{8x-3}{9}$.

(i) $y=6x^2+8x+4$.

(j) $y=7x^2-8x-1$.

(k) $y=4x^2-9x+13$.

(l) $y=10x^2+8x+9$.

(m) $y=3x^2+4x-5$.

(n) $y=8x^2-9x-10$.

ఈ క్రిందివాటి వర్గులను కట్టుము:—

xy, x^2y^2, x^3y^3z, a^2bc, $\frac{1}{2}a^2x$, $\frac{1}{3}b^2y$, $\frac{2}{3}x^2yz$, $\frac{7}{8}abc^4$, $\cdot6a^3bc$, $a^2b^3c^5$, $\cdot7x^4a^3bc$, $-5ab$, $-3a^2c^2b$.

6. ఈ క్రిందివాటి ఘనములను కట్టుము:—

$2a$, $3b$, $9c$, $3ab$, $4ac$, $-3a^2bc$, $-4a^3by$, $-3k^2lm^3$, $-5a^2bc^3$, $\frac{3}{8}k^4m^5$, $\frac{7}{12}k^3x^6y^8$.

7. ఈ క్రిందివాటి వర్గమూలములు కట్టుము:—

a^2b^2, x^2y^2, $x^2y^2z^2$, $a^4b^2c^2$, $a^6b^8c^4$, $64x^8y^{12}z^6$, $121a^8b^{10}c^2$, $25x^6y^{10}z^{14}$, $\frac{\cdot 36}{49}x^6y^8$.

8. ఈ క్రిందివాటి ఘనమూలములు కట్టుము:—

x^3, y^3, z^3, x^3y^3, x^3z^3, $8y^3z^3$, $27x^6y^3z^3$, $64a^6b^3c^3$, $125a^9b^6c^3$, $\frac{1}{8}x^6y^3z^6$, $\frac{1}{27}x^{12}y^9z^6$.

9. $x=121$, $y=256$, $z=9$, $a=5$, $b=3$, $c=0$ అగునప్పుడు, వీటి విలువలు కట్టుము:—

$\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$, $\sqrt{a^2+\sqrt{x}}$, $\sqrt{c^2+\sqrt{y}}$, $\sqrt{2a+b+\sqrt{z}}$.

10. $a=4$, $b=5$, $c=3$, $e=2$, $f=7$ అయినప్పుడు, వీటి విలువలు కట్టుము:—

(a) $\sqrt{\frac{ab^2}{3c}}$. (b) $\sqrt{\frac{5c^2b}{2ef^2}}$. (c) $\sqrt{\frac{125b}{24ace}}$.

(d) $\frac{5a+\sqrt{4abc+8e}}{4e+f}$. (e) $\sqrt{\frac{4ef-ab-3c+2\frac{1}{4}a}{2ab}}$.

(f) $\sqrt{\frac{abc}{e}+\frac{ac}{2}}$. (g) $\sqrt[3]{\frac{a^2c^3}{2ae}}$. (h) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$. $\frac{a^3b^3c^3}{(f+2)c}$.

(i) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$. $\frac{a^2b^2c^2(8f+4)}{e^3}$. (j) $\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2+2e}{c^2+b^2-2(f+c)}}$.

11. ఈ క్రిందివాటిని కలుపుము:—

(a) $6x^2+3x+2$, $8x^2-9x+1$, $7x^2+10x-2$, $5x^2-20x+3$.

(b) $x^2+y^2+z^2$, $x^2+y^2-z^2$, $x^2-y^2+z^2$, $x^2+z^2-y^2$.

(c) $a^3+b^3+c^3-3abc$, $b^3+c^3-a^3+3abc$, $c^3+a^3-b^3+3abc$, $a^3+b^3-c^3+3abc$.

(d) $a^3+b^3+3a^2b-3ab^2$, $b^3-a^3+2a^2b-3ab^2$, $2a^3-2b^3+4a^2b-4ab^2$.

(e) $x^2+y^2+z^2+2xy-3xz-5yz$, $6x^2+2y^2-3z^2+8xy-9xz+3yz$, $8x^2-3y^2+9z^2+12xy-12xz+24yz$.

(f) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$, $a^2+b^2+c^2-2ac-2bc+2ab$, $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$.

(g) $2(x-3y)$ ను $3(x+2y)$ ను.

(h) $8(2x-3y)$ ను $9(-3x+2y)$ ను.

(i) $7(3a+4b-5c)$ ను $8(-4a+5b-6c)$ ను.

(j) $4(2c-3d)$, $8(-3c+4d)$ ను $9(4d-3c)$ ను.

(k) $3-2q$, $7(2p+q)$ ను $8(-3p-2q)$ ను.

(l) $x^4-2x^3-3x^2$, $3x^3+8x^2-7x-3$, $6x^2-7x+8$, $5x^2-3x-2$.

(m) $3x^3-9x^2+8x-3$, $-9x+12x^3-4x^2+8$, $-6x+3x^3+12x^2-9$.

(n) $6xy-8xz+9yz$, $-3xy+10yz-12xz$, $-15yz+16xy-19xz$.

(o) $-c^3-d^3+3c^2d-3cd^2$, $-5c^3-4d^3-7c^2d+8cd^2$, $-12c^2d+12cd^2-18c^3+20d^3$.

(p) $3a^2+2b^2-4c^2+6d^2$, $-4a^2+3b^2-6c^2-8d^2$, $-9d^2+10c^2-5a^2-3b^2$, $-10a^2+15b^2-3c^2-d^2$.

12. (a) a^2+b^2-2ab ని a^2+b^2+2ab నుండి,

(b) $9x^2+4y^2-12xy$ ని $9x^2+4y^2+12xy$ నుండి,

(c) $x^2+4y^2+5z^2+2xy+2xz+2yz$ ను $3x^2+2y^2+3z^2-2xy+6xz-5yz$ నుండి,

(d) $a^2+2ab+b^2$ ను $2a^2+2b^2$ నుండి,

(e) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ను $2a^3+6ab^2$ నుండి,

(f) $a^3+b^3+c^3-3abc$ ని $b^3+2a^3+c^3-9abc$ నుండి,

(g) $2(x-y)+3(x+y)$ ని $4(2x-3y)-5(6x-y)$ నుండి,

(h) $3(c-d)+4(a-b)$ ని $8(2c-d)+9(3d-4c)$ నుండి,

(i) $9p+2q-r$ ను $-5q+3p-4r$ నుండి,

(j) $7ab-3ac+4bc$ ని $8ab-23bc-5ac$ నుండి,

(k) $8lm+3ln-2mn$ ను $7lm-5mn+6ln$ నుండియు తీసివేయుము.

13. ఈ క్రిందివి కట్టుము:—

(a) $13k^2-9l^2+8n^2$ కంటె $12k^2+3l^2+m^2$ యొక్క హెచ్చు.

(b) $10p-3q+4r$ కంటె $2p-3q-4r$, యొక్క హెచ్చు.

14. (a) $7a^2+3b^2-5ab$ లో నుండి ఏమి తీసివేసిన $8b^2-6ab+9a^2$ ను,

(b) $2x^2+3y^2+4z^2-6xy$ లో నుండి ఏమి తీసివేసిన $8x^2+4y^2-10z^2-8xy$ ను జనించును?

15. $2a^3+3b^2-4xy$ లో నుండి ఎంత తీసివేసిన $8a^3+3b^2-2xy$ మిగులును?

16. $3a-4b+6c$, $-6b+4a-9c$, $13a-12b+3c$ ల మొత్తమునుండి $3a+4b-3c$ తీసివేయుము.

17. $3x^2+3y^2-2xy$, $9x^2+6z^2-12xz$ ల మొత్తమునుండి $8x^2+9y^2-12xy$, $13xy-8x^2-9y^2$ ల మొత్తమును తీసివేయుము.

18. $13l^2+15m^2-28lm$, $2l^2+15n^2-27ln$ ల మొత్తమునుండి, $20a^2+3ab-9c^2$ కంటె $15a^2-9ab+3c^2$ యొక్క హెచ్చును తీసివేయుము.

19. a^3-b^3, b^3-c^3, $2c^3-3a^3$ ల మొత్తమునుండి, $-3c^3+4a^3-2b^3+5abc$ కంటె $2a^3+3b^3-4c^3+5abc$ యొక్క హెచ్చును తీసివేయుము.

20. సున్ననుండి $6x+8y-1+xy$ ని తీసివేయుము.

21. 1 నుండి $x-y$, $y-z$, $2(x-z)$ ల మొత్తమును తీసివేయుము.

22. ఈ క్రిందివాటి లబ్ధములు కట్టుము:—

(a) x^2y, xy^2 లు, (b) x^2z, y^2z లు, (c) $6ab$, $7ac$ లు, (d) $-3ab$, $-4ac$ లు, (e) $-ab$, $-ac$, $-bc$, $-abc$ లు, (f) $(-a)^2$, $(-a)^3$, $-a^3$ లు, (g) $(-mn)^2$, $(-p^2)^4$, $(-a^2)^5$ లు, (h) $(1-3)$, $(1-5)$ లు, (i) $(2-3)$, $(2-4)$, $(2-5)$ లు, (j) $(-x)^3$, $(-y)^3$, $(-z)^3$, $x^2y^2z^2$ లు, (k) $8p^2q^2$, $9r^2a^{-2}$, b^2c^3 లు, (l) $(3-4)^3$, $(3-4)^4$ లు.

23. ఈ క్రిందివాటిలో భాజితములు కట్టుము:—

(a) $3ab\div a$, (b) $7a^2b\div 2b$, (c) $5a^2bc\div 3ab$, (d) $9abcd\div 4a^2$, (e) $3ab\times 3ac\div 4bc$, (f) $(ab)^4\div a^2b^2$, (g) $a^4b^3c\div(abc)^2$, (h) $(-a)^7\div(+a)^3$, (i) $72a^2x^4y\div -4(-a)^2\times 3(-x)^3\times 2(y)^4$, (j) $(abc)^3\times(xyz)^2\div a^3x^2yb$.

24. ఈ క్రిందివి సూక్ష్మముచేయుము:—

(a) $\frac{a^3}{b^3}\times\frac{b^3}{c^3}\times\frac{c^3}{a^3}\times xyz$, (b) $\frac{a^2}{bc}\cdot\frac{b^2}{ca}\cdot\frac{c^2}{ab}$, (c) $\frac{xz}{y^2}\cdot\frac{yz}{x^2}\cdot\frac{xy}{z^2}$, (d) $\frac{a}{b}\times\frac{a^2}{b^2}\times\frac{b^3}{a^3}$, (e) $1\div\frac{b}{a}$, (f) $1\div\frac{a^2}{bc}$, (g) $\frac{l}{m}\times\frac{m^2}{n^3}\times\frac{n^4}{l^5}$, (h) $1\div\left(-\frac{b}{a}\right)^2$, (i) $1\div\left(-\frac{b}{a}\right)^3$.

25. ఈ క్రిందిసంఖ్యలు 10 యొక్క ఏ వరుసఘాతముల సందుననున్నవో కట్టుము:—

(a) 253, (b) 3456, (c) 78931, (d) 895463, (e) 893768, (f) ·01, (g) ·0023, (h) ·4567, (i) ·0008976.

26. ఇవి సూక్ష్మముచేయుము:—

(a) $8{\cdot}3\times10^7$, (b) $4{\cdot}3986\times10^6$, (c) $6{\cdot}59387\times10^8$, (d) 8356×10^{-3}, (e) 78937×10^{-5}, (f) $8{\cdot}3987\times10^{-6}$.

27. $362=3\times100+6\times10+2=3\times10^2+6\times10+2$. ఇట్లే, 10 యొక్క సక్రమఘాతములు గలిగియుండు రూపము సిద్ధించునట్లు, ఈ క్రింది సంఖ్యలను పెంపకముచేయుము:—

8765, 10584, 638295, 10956487.

28. ఈ క్రింది ప్రతి భాగహారపు లెక్కను గుణకారపు లెక్కగా మార్చివేయుము:—

(a) $1897{\cdot}5\div10^5$, (b) $6783\div10^3$, (c) $\cdot00845\div10^4$, (d) $8456{\cdot}384\div10^{-3}$.

29. ఈ క్రిందిసంఖ్యలలో ప్రతిదానిని రెండు కారణాంకముల లబ్ధముగా చెప్పవలయును. అందొకటి 10 యొక్క ఘాతమును, రెండవది నియమితాకారపు దశాంశమును కావలయును:—

(a) 789360000, (b) ·0038456, (c) 165839865, (d) ·000083295, (e) 19287·38.

30. ఈ క్రింది సంఖ్యలను, 10 యొక్క ఘాతములు వాడుచు, కోరిన సార్థకాంకములకు సరిగ చెప్పుము:—

(a) 1648397895 రెండు సార్థకాంకములకు సరిగ.
(b) 1893286 మూడు సార్థకాంకములకు సరిగ.
(c) ·0008938476 రెండు సార్థకాంకములకు సరిగ.
(d) 25·0000346 మూడు సార్థకాంకములకు సరిగ.

31. 30-వ ప్రశ్నలోని సంఖ్యలలో ప్రతిదానిని రెండు కారణాంకముల లబ్ధముగా చెప్పవలయును, అందొకటి 10 యొక్క ఘాతము కావలయును, రెండవది నియమితాకారపు దశాంశము కావలయును, పైగా ఆ రెండవదానిలో పైని సూచించినన్ని సార్థకాంకములును ఉండవలెను.

32. గణితవేత్తలు ప్రతి సంఖ్యను 10 యొక్క ఘాతముగ కట్టియున్నారు: ఎట్లన,

$2=10^{\cdot 3010}$, $3=10^{\cdot 4771}$. ఇప్పుడు, 6 ను 10 యొక్క ఘాతముగ చెప్పుము.

33. $100=10^2$, $5=10^{\cdot 6990}$. ఇప్పుడు, 20 ని 10 యొక్క ఘాతముగ చెప్పుము.

34. ఇవి సూక్ష్మముచేయుము:—

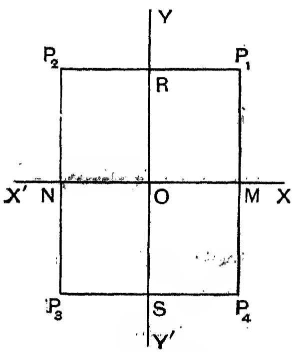
(a) $\dfrac{(84)^4\times(36)^3\times(22)^2}{(105)^4\times(72)^3\times(55)^2}$. (b) $\dfrac{(3\cdot5)^3\times(4\cdot2)^3\times(8\cdot0)^3}{(2\cdot8)^3\times(6\cdot3)^3\times(12\cdot8)^3}$.

(c) $\dfrac{88\times10^{-3}-11\times10^{-5}\times6}{8^{-2}\times2^{-5}}$. (d) $\dfrac{3^{-3}+5^{-3}+2^{-4}}{3^3+5^3+2^4}$.

అధ్యాయము IX.

గళ్ల కాగితముపై బిందువుల స్థాపన.

41. XOX′ YOY′ లు, లంబముగ ఖండించుకొను రెండు సరళరేఖలు. **XOX′ నుండి 1·5″ ను YOY′ నుండి 1·2″ ను ఎడమున నుండు ఒక బిందువును కనుగొనవలయును.** ఒక నిర్దిష్టసరళరేఖకు నిర్దిష్టదూరమున నుండు బిందువుయొక్క పథము నిర్దిష్టరేఖను చేరియొక పెడను ఉండు సమానాంతరరేఖల జేతయని నీకు ఇదివరకే తెలియును. XOX′ నుండి 1·5″ ఎడమున నున్న బిందువు, XOX′ నకు సమానాంతరముగ 1·5″ ఎడమున పైన నొకటియు క్రింద నొకటియు నుండు రేఖలలో ఒకదానిపై ఉండి తీరవలయును. అట్లే, YOY′ నకు 1·2″ ఎడమున నున్న బిందువు, YOY′ నకు సమానాంతరముగ 1·2″ ఎడమున కుడిగా నొకటియు ఎడమగా నొకటియు నుండు రేఖలలో ఒకదానిపై ఉండి



పటము 34.

తీరవలయును. కాబట్టి ఆ బిందువు ఈ రెండు షరతులను పాటించుచు ఉండవలయునన్న ఒకొక్క జేతలోని ఒకొక్క రేఖమీద చొప్పున రెండు సరళరేఖలమీద అది ఉండవలయును. అనగా, ఆ బిందువు అట్టి సరళరేఖలయొక్క ఖండనబిందువు కావలయును. రెండు జేతల సమానాంతరరేఖలును, నాలుగు బిందువులలో ఖండించుకొనగలవు గావున, షరతులను పాటించు బిందువులు నాలుగుండును.

42. పై క్షేత్రమునందు O అను బిందువును **'ఆదిబిందువు'** అనియు "మూలబిందువు" అనియు అందురు. O నుండి బయలుదేరి,

P_1 వద్దకు జేరుకొనుటకు, పెన్సలుయొక్క మొన, OM అను దూరమును గడచి దానికి (గళ్లకాగితముపై) లంబాత్మకముగనుండు MP_1 ను గడవవలయును:

P_2 వద్దకు జేరుకొనుటకు, పెన్సలుయొక్క మొన, ON అను దూరమును గడచి దానికి (గళ్లకాగితముపై) లంబాత్మకముగనుండు MP_2 ను గడవవలయును:

P_3 వద్దకు జేరుకొనుటకు, పెన్సలుయొక్క మొన, ON అను దూరమును గడచి దానికి (గళ్లకాగితముపై) లంబాత్మకముగనుండు MP_3 ని గడవవలయును:

P_4 వద్దకు జేరుకొనుటకు పెన్సలుయొక్క మొన, OM అను దూరమును గడచి దానికి (గళ్లకాగితముపై) లంబాత్మకముగనుండు MP_4 ను గడవవలయును.

OM ON అను దూరములలో ప్రతిదియు 1·2″ అగుటవలన అవి సమదూరములే అయినను, OM ను +1·2 అను సంజ్ఞతోను, ON ను −1·2 అను సంజ్ఞతోను చెప్పుదురు. XOX′ మీద YOY′ నకు కుడి ఎడమల, 'O' అను బిందువునకు చేరియొక పెడను MN లు ఉండుటయే దీనికి కారణము. (ఋణరాసుల అధ్యాయములో ఈ ఆచారము నీకు పరిచితమే.) అట్లే, MP_1 NP_2 లను ధనాత్మకములుగను (ఎందుకనగా XOX′ నుండి అవి పైకి ఏగునవి గనుక: అనగా, OR అను రేఖతో ఇవి ఏకముఖములుగనుండి, దానికి సమానాంతరములును సమములును గనుక) NP_3 MP_4 లను ఋణాత్మకములుగను (ఎందుకనగా OS అను రేఖతో ఇవి ఏకముఖముగనుండి, దానికి సమానాంతరములును సమములును గనుక) పరిగణింపబడును.

ఈ రీతిగ O నుండి నడకలు,

P_1 వద్దకు XOX′ వెంట +1·2″ అను సంజ్ఞచేతను తర్వాత YOY′ నకు ఒక సమానాంతరరేఖ వెంట +1·5″ అను సంజ్ఞచేతను, చెప్పబడును.

P_2 వద్దకు XOX′ వెంట −1·2″ అను సంజ్ఞచేతను తర్వాత YOY′ నకు ఒక సమానాంతరరేఖ వెంట +1·5″ అను సంజ్ఞచేతను చెప్పబడును.

P_3 వద్దకు XOX′ వెంట −1·2″ అను సంజ్ఞచేతను తర్వాత YOY′ నకు ఒక సమానాంతరరేఖ వెంట −1·5″ అను సంజ్ఞచేతను చెప్పబడును.

P_4 వద్దకు XOX′ వెంట +1·2″ అను సంజ్ఞచేతను తర్వాత YOY′ నకు ఒక సమానాంతరరేఖ వెంట −1·5″ అను సంజ్ఞచేతను చెప్పబడును.

మూలము మీదుగానుండు రెండు సరళరేఖలను, అనగా, XOX′ YOY′ లను "**ప్రధాన అక్షములు**" అందురు. XOX′ ను ప్రత్యేకముగ "**X—అక్షము**" అనియు, YOY′ ను "**Y—అక్షము**" అనియు వాడుదురు. ఒక బిందువును నిర్ణయించుటకు అవసరమగు కొలతలను "**స్థితి నిరూపకములు**" అందురు. X — అక్షము వెంటనుండెడి OM ON ల వంటి కొలతలుగాని (లేక దానికి సమానాంతరముగనుండు RP_1, RP_2, SP_3, SP_4 ల వంటి కొలతలుగాని) "**X—నిరూపకములు**" అనియు "**మట్టపుభుజములు**" అనియు అనబడును. Y—అక్షము వెంటనుండెడి OR OS ల వంటి కొలతలుగాని (లేక దానికి సమానాంతరముగనుండు MP_1, NP_2, NP_3, MP_4 ల వంటి కొలతలుగాని) "**Y—నిరూపకములు**" అనియు "**నిలువుభుజములు**" అనియు అనబడును.

రెండు అక్షముల ఖండనవలనను ఏర్పడు సమభూమియొక్క నాలుగు భాగములను "**పాదములు**" అందురు. స్థితినిరూపకములను మధ్య ఒక కామాతో, సాధారణముగ కుండలములలో వ్రాయుదురు. అందు ప్రథమమున X—నిరూపకమే ఎప్పుడును వ్రాయబడుచుండును. ఆ రీతిగ, P_1 యొక్క నిరూపకములు (1·2, 1·5), P_2 వి (−1·2, 1·5), P_3 వి (−1·2, −1·5), P_4 వి (1·2, −1·5). ఈ క్రింది బిందువుల నిరూపకములలో ప్రత్యేక విశేషమున్నందున వాటిని గమనింపనగును:—

మూలముయొక్క నిరూపకములు (0, 0); M వి (1·2, 0); N వి (−1·2, 0) R వి (0, 1·5); S వి (0, −1·5).

అభ్యాసము 9.

1. గళ్లకాగితముపై ఈ క్రింది బిందువులు స్థాపింపుము:—

(a) (6, 4); (−6, 4); (−6, −4); (6, −4).
(b) (8, 0), (0, 8); (−8, 0); (0, −8).
(c) (12, 5); (5, 12); (−12, 5); (−5, 12).
(d) (4, 25); (−6, 18); (25, −16); (30, 45); (−23, −48); (5, 16); (−16, 30); (30, −22); (−18, 18).

2. (a) ఏ పాదమున రెండు నిరూపకములును ధనాత్మకములు?

(b) ఏ పాదమున రెండు నిరూపకములును ఋణాత్మకములు?

(c) ఏ పాదమున X—నిరూపక Y—నిరూపకములు వరుసగ ధన ఋణాత్మకములు?

(d) ఏ పాదమున X—నిరూపక Y—నిరూపకములు వరుసగ ఋణ ధనాత్మకములు?

3. (a) ప్రతి పాదమునను నాలుగేసి బిందువులను తీసికొని వాటి నిరూపకములను చూచి చెప్పుము.

(b) ప్రతి అక్షముమీదను మూలమునకు ఇరుప్రక్కలను నాలుగేసి బిందువులను తీసికొని వాటి నిరూపకములేవో చూచి చెప్పుము.

4. ఈ క్రింది బిందువులను స్థాపించి, కొలబద్ద సాయమున, ప్రతి ప్రశ్నభాగములోని బిందువులును ఏకరైఖికములని నిరూపింపుము:—

(a) (9, 7), (0, 0), (−9, −7).
(b) (−9, 7), (0, 0), (9, −7).
(c) (1, 7), (10, 34), (4, 16).
(d) (1, 4), (5, 24), (10, 49).

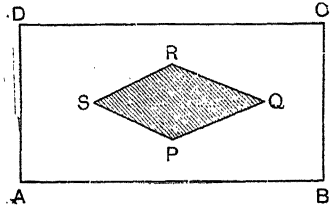
5. ఈ క్రింది బిందుయుగ్మములను స్థాపించి, వాటిని కలిపెడి సరళరేఖల మధ్యబిందువుల నిరూపకములను కట్టుము:—

(a) (4, 3), (12, 7). (b) (5, 4), (15, 16).
(c) (8, 12), (−20, −30). (d) (4, −9), (−24, 31).
(e) (0, 0), (8, 10). (f) (8, 0), (0, 10).
(g) (0, 0), (−8, 10). (h) (−8, 0), (0, −10).

6. ఈ క్రింది బిందు సముదాయములను స్థాపింపుము:—

(a) (5, 0), (5, −2), (5, 5), (5, −1), (5, −4).
(b) (−4, 8), (−1, 8), (0, 8), (3, 8), (6, 8).
(c) (−1, 3), (−1, −4), (−1, 8), (−1, 10), (−1, 20).
(d) (−3, −4), (−12, −4), (8, −4), (15, −4), (−20, −4).

1-వ 3-వ సముదాయములు Y-అక్షమునకు సమానాంతరముగనుండు రేఖపైనుండుననియు 2-వ 4-వ సముదాయములు X అక్షమునకు సమానాంతరముగనుండు రేఖపైవి అనియు నిరూపింపుము.



పటము 35.

7. ABCD అను పటము 200 గజములకును అంగుళము ప్రమాణముగ గీసి ఉన్న ఒక ఆయతాకారపు తోట: PQRS అనెడిది దానిలో నొక చెరువు. ఈ పటముయొక్క నకలు తీయుటకు, AB, AD లనుబట్టి P, Q, R, S అను బిందువుల స్థితిని నిర్ణయించుటకు నీవు ఏయే కొలతలు తీసికొందువు?

8. పై ప్రశ్నలో PQRS అనెడిది ఒక సమచతుర్భుజము అని తెలిసినచో, P, Q, R, S ల స్థితి నిర్ణయించుటకు నీవు అధమము ఎన్ని కొలతలు తీసికొనవలెను?

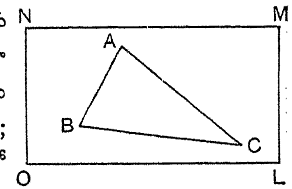
9. ఈ క్రింద ఇచ్చిన సూచనలతో, నీ చిత్తమువచ్చిన ప్రమాణముతో, AFEBDC అను సరళరేఖాత్మక విషమక్షేత్రమును గీయుము. ప్రమాణమును పేర్కొనుము.

AB కి లంబాత్మకముగ ఉత్తరదిశగ దూరములు.	B అను స్థానమును చేరుకొనుము.	AB కి లంబాత్మకముగ దక్షిణదిశగ దూరములు.
RE=150 గజములు. PF= 75 గజములు.	AB=900 గజములు. AS=800 ,, AR=700 ,, AQ=350 ,, AP= 50 ,, A నుండి బయలుదేరి తూర్పుగ సాగుము.	SD=200 గజములు. QC=350 గజములు.

10. (18, 10), (18, −14), (−22, 10) అనునవి ఒక ఆయతముయొక్క మూడు కోణబిందువులు. నాల్గవ కోణబిందువుయొక్క స్థితి నిరూపకములను కట్టుము. క్షేత్రమును గీసి భూఫలము కట్టుము.

11. X అక్షమును, Y అక్షమును లంబాత్మకముగ ఖండించుకొనవలసిన అవసరములేదు. $\angle XOY = 50^\circ$. P అను ఒక బిందువు $\angle XOY$ యొక్క ద్విసమఖండరేఖపై, మూలమునుండి 3″ ఎడమనున్నది. దాని స్థితి నిరూపకములను కట్టుము. (P మీదుగా అక్షములకు సమానాంతరములను గీసి స్థితి నిరూపకములను కొలువుము.)

12. ABC అనునది OLMN అను తావుపై గీసిన ఒక త్రిభుజము. దాని నమూనా ఒకటి తీయుటకు ఈ క్రింది కొలతలు చాలును:— $\angle LOB$, OB; $\angle LOC$, OC; $\angle LOA$, OA. అట్టిదే నీవెట్లు గీతువో చూపుము.



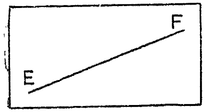
పటము 36.

13. పై ప్రశ్నలోనిది సమ త్రిబాహు త్రిభుజమైనచో, నమూనా తయారుచేయుటకు ఇవే చాలును: — $\angle LOB$, OB; $\angle LOC$, OC. వీటి సాయమున అట్టిదే నిర్మింపుము.

14. ఈ ప్రక్క పట్టీలోని సంఖ్యను దేనినైన తలచుకొమ్మని నీ స్నేహితునితో చెప్పితివనుకో. ఆ సంఖ్య అతడు నీతో చెప్పివేయనప్పుడు, ఏ రెండు ప్రశ్నలను అడిగి అతడు తలచుకొనినది నీవు చెప్ప గలవు?

19	15	16	17	18
20	21	23	46	97
4	8	14	18	19
10	5	9	29	104

15. ABCD అనునది ఇటు 20 అడుగులును అటు 16 అడుగులును (AB=20) ఉన్న ఒక ఖాళీస్థలము. P అను ఒక కొళాయి స్థితిని నిర్ణయించుటకు (1) రెండు ఖండనరేఖలనుండి దాని దూరములను చూచుకొనెడి పద్ధతిని, (2) ఒక బిందువునుండి ఒక నిర్దిష్టదిశలో దాని దూరమును చూచుకొనెడి పద్ధతిని, (3) రెండు నిర్దిష్టబిందువులనుండి దాని దూరములను చూచుకొనెడి పద్ధతిని, నీవు ఏయే కొలతలు తీసికొందువు? A ను కొళాయితో కలిపెడి రేఖ AB తో 60° చేయును, AP 15 అడుగులున్నది. (1), (3) పద్ధతుల చొప్పున P యొక్క కొలతలను కట్టుము.



పటము 37.

16. నొక్కి వ్రాతయు కత్తిరింపునులేకుండ ఈ ప్రక్కపటముయొక్క నకలు తీయుము.

17. ప్రపంచముయొక్క మానపటములలో దేనిలోనైన ఈ క్రింది అక్షాంశ, రేఖాంశములు ఏయే స్థలములకుగలవో చూచి చెప్పుము:—

13° N. అక్షాం.	35° N. అక్షాం.	35° S. అక్షాం.	50° N. అక్షాం.
86° E. రేఖాం.	140° E. రేఖాం.	20° E. రేఖాం.	20° W. రేఖాం.

18. ఒక ప్రపంచ మానపటమున ఈ క్రింది స్థలముల అక్షాంశ రేఖాంశములనుచూచి చెప్పుము:—

(1) ఢిల్లీ, (2) ఏడెన్, (3) కాన్‌స్టాంటినోపిల్, (4) పారిస్, (5) న్యూయార్క్.

19. ఈ క్రింది బిందువులను స్థాపించి, మూలమునుండి వాటి దూరములను కట్టుము:—

(*a*) (15, 8). (*b*) (−15, −8).
(*c*) (2·4, 7). (*d*) (−7, 2·4).

20. ఈ క్రింది బిందుయుగ్మములను స్థాపించి, ప్రతి యుగ్మమునకును మధ్య దూరము కట్టుము:—

(*a*) (4, 0), (0, 3). (*b*) (9, 8), (5, 5).
(*c*) (15, 0), (0, 8). (*d*) (10, 4), (−5, 12).
(*e*) (20, 12), (−15, 0). (*f*) (20, 9), (−15, −3).

21. ఈ క్రింది బిందువులను స్థాపించి కలుపుము:—

(−3, 2), (3, 10), (7, 2). ఆ త్రిభుజముయొక్క బాహువులు కొలిచి, అది సమద్విబాహు త్రిభుజమని నిరూపింపుము.

22. ఈ క్రింది బిందువులను స్థాపింపుము:—

(0, 5), (3, 4), (5, 0), (4, −3), (−5, 0), (0, −5), (−4, 3), (−4, −3). మూలమే కేంద్రముగాగల ఒక వృత్తపు పరిధి మీద ఈ బిందువులున్నవని నిరూపింపుము. పై X నిరూపక Y నిరూపకములు $x^2+y^2=25$ అను సామ్యమును నిలబెట్టునని నిరూపింపుము.

23. (4, 0), (12,8), (12, −8) లను స్థాపించి కలుపుము. ఏర్పడిది సమద్విబాహు త్రిభుజమనియు, దాని భూమి X అక్షముచే సమద్విఖండితమనియు నిరూపింపుము.

24. (14, 0), (14, 10), (0, 10). అనునవి మూడును ఒక ఆయతముయొక్క మూడు కోణబిందువులు. నాల్గవదానియొక్కయు కర్ణఖండన బిందువుయొక్కయు స్థితి నిరూపకములను కట్టుము.

25. ఈ క్రింది బిందుగణములను స్థాపింపుము. వాటిని కలుపుము. వచ్చెడి క్షేత్రములు ఆయతములని నిరూపించి, వాటి భూఫలములు కట్టుము:—

(*a*) (4, 3), (17, 3), (17, 12), (4, 12).
(*b*) (3, 2), (3, 15,) (−6, 15), (−6, 2).
(*c*) (5, 1), (−8, 1), (−8, −8), (5, −8).
(*d*) (10, 20), (10, −20), (−20, 20), (−20, −20).

26. ఈ క్రిందివి స్థాపించి క్రమేణ కలుపుము:—(1, 0), (0, 1), (−1, 0), (0, −1). వచ్చెడిది ఏ తరహా చతుర్భుజము? దాని భూఫలము కట్టుము.

27. ఈ క్రింది బిందువులు ఒక సమానాంతర చతుర్భుజపు కోణబిందువులని నిరూపించి, చదరముల లెక్కవల్ల దాని భూఫలము కట్టుము:—

(*a*) (0, 0), (10, 0), (14, 10), (4, 10).
(*b*) (−5, 0), (7, 5), (19, 0), (7, −5).

28. x_1, y_1 లును x_2, y_2 లును రెండు బిందువుల స్థితి నిరూపకములగునప్పుడు, వాటిని కలిపెడి రేఖ పొడవు $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. ఈ సంకేతసూత్రముతో, 20-వ ప్రశ్నలోని బిందుయుగ్మముల మధ్యదూరములను కట్టుము.

29. (20, 10), (−15, 20) అను బిందువులను స్థాపింపుము. వీటిని కలిపెడి రేఖకు సమానాంతరముగ (5, 6) అను బిందువుమీదుగా నొక రేఖ గీయుము. ఆ రేఖయొక్కయు అక్షములయొక్కయు ఖండనబిందువుల స్థితి నిరూపకములను కట్టుము. ఇట్లే, మొదటి రెండు బిందువులను కలిపెడి రేఖకు (5, 6) అను బిందువునుండి లంబము గీయుము. ఈ లంబముయొక్కయు అక్షములయొక్కయు ఖండనబిందువుల స్థితి నిరూపకములను కట్టుము.

30. ఈ క్రింది బిందువులు స్థాపింపుము:—(4, 8), (10, 20), (20, 40), (−15, −30,) (8, 16). వాటిని యథాక్రమముగ కలుపుము. నీవేమి గమనింతువు?

31. ఈ క్రింది బిందువులు స్థాపింపుము:—(500, 650), (300, 450), (275, 325), (100, 425). [కిటుకు:—ఈ నిరూపకములు పెద్ద పెద్దవి గాపున,

ఉచితప్రమాణము పుచ్చుకొనవచ్చును. 250 అనగా ఒక 1 అంగుళము కానిమ్ము. అంటే, 10 చిన్నగళ్లు.]

32. ఈ క్రింది బిందువులు స్థాపింపుము: — (100, 24), (150, 20), (200, 16), (400, 32). [కిటుకు:—X అక్షముమీద 100=1 అంగుళము అనునది ప్రమాణముగను, Y అక్షముమీద 8=1 అంగుళము అనునది ప్రమాణముగను తీసికొనుము.]

33. ఈ క్రింది బిందువులు స్థాపింపుము:—$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{6})$, $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$, $(\frac{1}{8}, \frac{1}{10})$. [ఈ సంఖ్యలు మరీ చిన్నవి. గళ్లకాగితముమీద 120 చిన్నగళ్లు, 1 అని పుచ్చుకో.]

34. ఈ క్రింది బిందువులు స్థాపింపుము:—$(500, \frac{1}{4})$, $(450, \frac{1}{3})$,$(600, \frac{1}{2})$, $(250, \frac{1}{8})$. [ఇక్కడ, X నిరూపకములు మరీ పెద్దవి, Y నిరూపకములు మరీ చిన్నవి. కాబట్టి వివిధప్రమాణములు స్వీకరింపవలెను. X అక్షము వెంబడి, 100=·2 అంగుళమనియు, Y అక్షము వెంబడి $\frac{1}{24}$=·1 అంగుళము అనగా, 24 చిన్నగళ్లు=1 అనియు ప్రమాణములను తీసికొనుము.]

35. ఈ క్రింది సోపాధికరాసులకు చిహ్నములుగ బిందువులను స్థాపింపుము:—(100 పెన్నీలు, 2 డాలర్లు), (200 పెన్నీలు, 4 డాలర్లు), (800 పెన్నీలు, 16 డాలర్లు), నీవు తీసికొనుప్రమాణము పేర్కొనుము. ఈ బిందువులను కలుపుము. నీవేమి గమనింతువు?

36. ఈ క్రింది సోపాధికరాసులకు చిహ్నములుగ బిందువులను స్థాపింపుము:—(0 రూ. 0 గుఱ్ఱములు), (400 రూ. 2 గుఱ్ఱములు), (800 రూ. 4 గుఱ్ఱములు), (1,600 రూ. 8 గుఱ్ఱములు), (2,000 రూ. 10 గుఱ్ఱములు). నీవు తీసికొన్న ప్రమాణమును పేర్కొనుము. యథాక్రమముగ బిందువులను కలుపుము. నీవేమి గమనింతువు?

37. ఈ క్రింది సోపాధికరాసులకు చిహ్నములుగ బిందువులను స్థాపింపుము:—(0 రూ. 0 ఇళ్లు), (4,000 రూ. 2 ఇళ్లు), (8,500 రూ. 4 ఇళ్లు), (11,500 రూ. 5 ఇళ్లు), (9,000 రూ. 3 ఇళ్లు). నీవు తీసికొన్న ప్రమాణమును పేర్కొనుము. యథాక్రమముగ బిందువులను కలుపుము. నీవేమి గమనింతువు? ఇందులోని విశేషమునకును 35, 36-వ ప్రశ్నలలో గమనించినదానికిని తేడా ఏది?

38. ఈ క్రింది సోపాధికరాసులకు చిహ్నములుగ బిందువులను స్థాపింపుము: — (0 అడుగులు, 0 సెకన్లు), (64 అ. 2 సె.), (144 అ. 3 సె.),

(256 అ. 4 సె.), (400 అ. 5 సె.) నీవు తీసికొన్న ప్రమాణమును పేర్కొనుము. యథాక్రమమున బిందువులను కలుపుము. నీవేమి గమనింతువు? ఇందులోని విశేషమునకును 35, 36-వ ప్రశ్నలలో గమనించినదానికిని తేడా ఏది?

39. 35, 36 వ ప్రశ్నలలో ఏకరేఖయు, 37, 38-వ ప్రశ్నలలో విడివిడి రేఖలును ఉన్నవేల? ఇందునకు ఏదైన కారణమున్నదా? ముందు 35, 36-వ ప్రశ్నలలోని బిందువులస్థితిని రూపకయుగ్మములను, తర్వాత 37, 38-వ ప్రశ్నలలోని బిందువులస్థితిని రూపకయుగ్మములను కొంచెము పరీక్షగా చూడుము.

40. లేఖ్యము ఎప్పుడు సరళరేఖయగునో, లేక ఎప్పుడు మూలముమీదుగ నుండు వక్రరేఖ (విడివిడి రేఖలతోడి రేఖ) యగునో, కొన్ని బిందువులు స్థాపించి, యథాక్రమమున వాటిని కలిపి సూత్రమేదైన పేర్కొనుము. (ఇది, తర్వాతనున్న "నిష్పత్తియుగ్మము"నకు ఉపోద్ఘాతము.)

అధ్యాయము X.

నిష్పత్తి, అనుపాతము.

43. ఒకేతరహా రాసులను రెండిటిని పోల్చి, ఒక రాశికి తక్కినది ఇన్ని రెట్లనిగాని, ఒక రాశిలో తక్కినది ఫలానా వంతనిగాని చెప్పునపుడు ఆ సంబంధమును "నిష్పత్తి" అందురు.

వ్యా: — అట్లుచూడ నిష్పత్తియనునది ఒక నిరుపాధిక అంకము. A యొక్క శిస్తు 10,000 రూ. ను, B యొక్క శిస్తు 15,000 రూ. ను అగునపుడు, A యొక్క శిస్తునకును, B యొక్క శిస్తునకును నిష్పత్తి=$\frac{2}{3}$; B యొక్క శిస్తునకును, A యొక్క శిస్తునకును నిష్పత్తి=$\frac{3}{2}$.

ఉదా. 1. PM, MQ ల నిష్పత్తి కట్టుము.



పటము 38.

PM అనునది కొలతకు 4 సెం.మీ. ఉన్నది; MQ 3 సెం.మీ. ఉన్నది. ∴ PM, MQ ల నిష్పత్తి (అది PM : MQ అని వ్రాయుదురు)=$\frac{4}{3}$ (అనగా, రెట్లు). $\frac{PM}{MQ}$ అను భిన్నముకూడ $\frac{4}{3}$ అని మనకు తెలియును.

అందువల్ల, PM : MQ అను నిష్పత్తి $\frac{PM}{MQ}$ అను భిన్నమే.

ఒక నిష్పత్తిలోని మొదటిపదమును "**పూర్వగామి**" అనియు, రెండవపదమును "**పరగామి**" అనియు అందురు. కాని, భిన్నములోని మొదటిపదమును "లవము" అనియు, రెండవపదమును "హారము" అనియు అందురు. కాబట్టి, భిన్నములకు వర్తించు సూత్రములన్నియు నిష్పత్తులకును వర్తించును.

ఉదా. 2. 16 : 20 అను నిష్పత్తిని సూక్ష్మతమము చేయుము.

$16 : 20 = 4 \times 4 : 4 \times 5 = 4 : 5$ (రెండు పదములను 4 చే భాగింపగా.)

ఉదా. 3. 2 : 3 అను నిష్పత్తిలో పూర్వగామిని 16 గా మార్చవలెను. మార్చగా వచ్చిన నిష్పత్తి యేది?

2 : 3 అను నిష్పత్తిలో, 2 ను 8 చే గుణించినచో 16 వచ్చును.

$\therefore 2 : 3 = 2 \times 8 : 3 \times 8 = 16 : 24.$

ఉదా. 4. $8\frac{1}{2} : 13\frac{5}{6}$ అను నిష్పత్తిని సూక్ష్మతమము చేయుము.

$8\frac{1}{2} : 13\frac{5}{6} = \frac{17}{2} : \frac{83}{6} = \frac{17}{2} \times 6 : \frac{83}{6} \times 6$ (6 ఎక్కుడిదియన, అది లవముల క. సా. గు.) $= 51 : 83.$

ఉదా. 5. 5 : 6, 7 : 8 అను నిష్పత్తులలో ఏది పెద్దది?

ద్వితీయ పదముల, అనగా హారముల క. సా. గు. = 24.

$$5 : 6 = 5 \times 4 : 6 \times 4 = 20 : 24.$$
$$7 : 8 = 7 \times 3 : 8 \times 3 = 21 : 24.$$

కాబట్టి, రెండవది పెద్దది.

44. రెండు నిష్పత్తులకు సామ్యము చెప్పెడు సందర్భమును "యుగ్మనిష్పత్తి" అనియు "**అనుపాతము**" అనియు అందురు. ఆ నాలుగు పదములును, అదేవరుసలో గ్రహించునపుడు, "**అనుపాతబంధములు**" అగును. ఉదా. $16 : 20 = 4 : 5.$ దీనిని సాధారణముగా $16 : 20 :: 4 : 5$ అని వ్రాయుదురు, "16 నకు 20 ఎట్లో అట్లే, 4 నకు 5" అని చదువుదురు. మొదటి నాల్గవ పదములకు "**పరమములు**" అనియు, రెండవ మూడవ పదములకు "**మధ్యమములు**" అనియు పేర్లు.

ఒక నిష్పత్తిలోని రెండు పదములును ఒకే తరహావియు, ఒకే మానమువియు అగుట అవసరము. 2 గుఱ్ఱములకును, 3 ఆవులకును నిష్పత్తి ఉండదు. అట్లే, 2 రూ. లకును 4 అణాలకును ఉండదుకాని వాటిని ఏకమానములోనికి మార్చినపుడు ఉండును. ఎట్లన, 32 అణాలు, 4 అణాలు. ఒక అనుపాతమందలి నాలుగు పదములును ఏకమానమువి కాకపోవచ్చును. ఒక నిష్పత్తిలోని రెండు పదములును ఒకే తరహావికాని ఒకే మానమువికాని అయి,

తక్కిన నిష్పత్తిలోని రెండు పదములును మరొక తరహావికాని మానమువికాని అయినను, బంధిలేదు. ఉదా.

(*a*) 10 గుఱ్ఱములు : 18 గుఱ్ఱములు : : 5 గుఱ్ఱములు : 9 గుఱ్ఱములు.

లేక (*b*) 10 ,, : 18 ,, : : 100 రూ. : 180 రూ.

ఒక అనుపాతమున పరమముల లబ్ధము = మధ్యమముల లబ్ధము. దీని విలోమమును సత్యమే.

$a : b = c : d$ అయినప్పుడు, $ad = bc$. [ఏలయన, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ లోని రెండు వైపులను bd చే గుణింపుము. $\frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd. \therefore ad = bc.$]

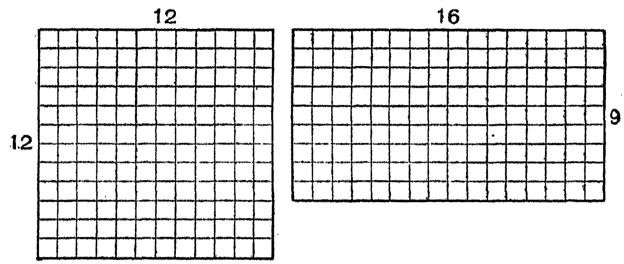
అట్లే, విలోమముగ $ad = bc$ అయినప్పుడు, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. [ఏలయన, $ad = bc$ లోని రెండు వైపులను bd చే భాగించుము. $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, అనగా, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.]

ఉదా. 6. 3 పౌ. : 3 పౌ. 2 ఔ. : : 96 రూ. : x. x కట్టుము.

3 పౌ. : 3 పౌ. 2 ఔ. = 48 ఔ. : 50 ఔ. = 24 : 25.

$\therefore$ 96 రూ. : x : : 24 : 25.

$\therefore x \times 24 = 25 \times 96$ రూ. $\therefore x = \frac{25 \times 96}{24}$ రూ. = 100 రూ.



పటము 39.

రేఖ్యాత్మక ఉదా. 16 : 12 : : 12 : 9. ఇప్పుడు, ఒక ఆయతమును 16, 9 భుజములతోను, 12, 12 భుజములుగల ఒక ఆయతమును—అనగా ఒక చతురస్రమును రచింపుము.

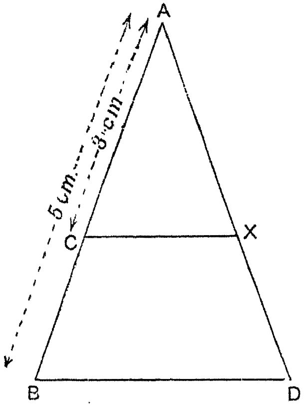
ఆయతమున 144 చిన్న చదరములున్నవి.

చతురస్రమున 144 చిన్న చదరములున్నవి.

$\therefore 16\times 9=12\times 12.$

దీనివల్ల, సర్వసామాన్యముగ, $a:b::b:c$ అయినప్పుడు, a c లు భుజములుగాగల ఆయతము $=b$ భుజముగాగల చతురస్రము. ఇట్టి సందర్భములో b అనునది a c లకు "అనుపాత మధ్యమము" అనబడును.

45. (*a*) అనుపాతముయొక్క లేఖ్యాత్మక ఉద్దీపకము.



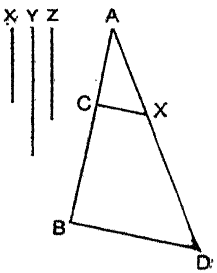
పటము 40.

AB అను రేఖ 5 సెం.మీ. పొడుగున గీసి AC=3 సెం.మీ. ఉండునట్లు దానిలో C అను బిందువు తీసికొనుము. అందువల్ల, CB=2 సెం.మీ. A వద్ద AB తో ఉచిత కోణము చేయు AD గీయుము. BD గీయుము. C మీదుగా BD సమానాంతరముగ CX గీయుము.

అప్పుడు, $\frac{AX}{XD}$ అనునది కొలతవల్ల $\frac{3}{2}$ అని తెలుసు.

$\therefore \frac{AC}{CB}=\frac{AX}{XD}$, అనగా AC, CB, AX, XD లు నాలుగును ఒక అనుపాతము యొక్క పదములు.

(*b*) X, Y, Z అను మూడు సరళరేఖలకు (అవి ఉదాహరణకొరకు, 3 సెం.మీ., 6 సెం.మీ., 2 సెం.మీ. అనుకో) అనుపాత చతుర్థమును లేఖ్యమూలముగ కట్టుట.

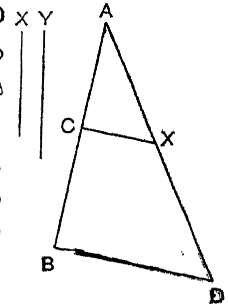


పటము 41.

AB అను సరళరేఖ గీయుము. దానిలో AC=X అగునట్లును, CB=Y అగునట్లును C, B అను బిందువులు తీసికొనుము. A వద్ద AB తో ఏదో కోణము చేయు AX ను Z కి సమానముగ గీయుము. CX గీయుము. B మీదుగా CX కి సమానాంతరముగ

AX యొక్క పెంపకమును D వద్ద ఖండించెడి BD గీయుము. అప్పుడు XD అనునది అనుపాత చతుర్థము అగును. (పటము యథావిధిగా గీసినచో అది కొలతకు 4 సెం.మీ. ఉండును.)

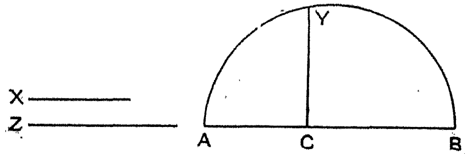
(*c*) రెండు నిర్దిష్ట సరళరేఖలగు X, Y లకు (అవి ఉదాహరణకొరకు, 2 అం. ను, 3 అం. ను అనుకో) అనుపాత తృతీయమును లేఖ్యమూలముగ కట్టుట.



పటము 42.

దీనికి అర్థమేమన, X : Y :: Y : కోరినరేఖ. వెనుకటివలెనే AB గీయుము. దానిలో X కు సమముగ AC ని Y కి సమముగ CB ని తీసికొనుము. A వద్ద AB తో ఏదో కోణముచేయు AX ను Y కి సమముగ గీయుము. CX గీయుము. CX కు సమానాంతరముగ, AX యొక్క పెంపకమును D వద్ద ఖండించు BD గీయుము. అప్పుడు XD అనుపాత తృతీయము అగును. (పటము యథావిధిగా గీసినచో అది కొలతకు 4½ అం. ఉండును.)

(*d*) రెండు నిర్దిష్ట సరళరేఖలగు X, Z లకు (అవి ఉదాహరణకొరకు, 4 సెం.మీ. ను, 9 సెం.మీ. ను అనుకో) అనుపాత మధ్యమమును లేఖ్యమూలముగ కట్టుము.



పటము 43.

దీనికి అర్థమేమన : X : కోరినరేఖ : : కోరినరేఖ : Z. AB అను ఒక రేఖ గీయుము. దానిలో X కు సమముగ AC ని Z కి సమముగ CB ని తీసికొనుము.

AB మీద అర్ధవృత్తమును చుట్టుము. C నుండి AB కి లంబాత్మకముగ, పరిధిని Y వద్ద ఖండించు CY గీయుము. ఆ CY యే అనుపాత మధ్యమము. (పటము యథావిధిగా గీసినచో అది కొలతకు 6 సెం.మీ. ఉండును.)

అభ్యాసము 10 (A)

1. ఒక సైకిల్‌చక్రపు పరిధి 7′ 4″. దాని వ్యాసము 28″. పరిధి వ్యాసముల నిష్పత్తి కట్టుము.

2. 4″ వ్యాసార్ధముతో ఒక వృత్తము చుట్టుము. విభాగినియొక్క ముల్లు $\frac{1}{2}$″ ఎడమున పట్టుకొని, పరిధి వెంబడి అంగలు వేసి, దాని పొడుగు కట్టుము. పరిధి వ్యాసముల నిష్పత్తి కట్టుము. అదియుగాక, వేరే పరిధిని ఒక సన్నని దారముచే కొలిచి, ఈ నిష్పత్తి కట్టుము. వివిధ వ్యాసార్ధములుగల వృత్తములు గీసి పై చర్య రెట్టింపుము. $\frac{\text{పరిధి}}{\text{వ్యాసము}}$ **అను నిష్పత్తి స్థిరమనియు అది రమారమి $3\frac{1}{7}$ నకు సమమనియు సరిచూపుము.**

3. ఒకడు తన 20-వ ఏట కొడుకును కనినాడు. ఆ తండ్రీ కొడుకుల వయస్సుల నిష్పత్తి (*a*) 12 ఏళ్ల తర్వాత, (*b*) 20 ఏళ్ల తర్వాత, (*c*) 36 ఏళ్ల తర్వాత, (*d*) 40 ఏళ్ల తర్వాతను కట్టుము.

4. ఒకడు తన 20-వ ఏట ఒక కూతురిని కనినాడు. కూతురు వయస్సునకును, తండ్రి వయస్సునకును నిష్పత్తి ఎప్పుడు (*a*) $\frac{1}{6}$, (*b*) $\frac{1}{5}$, (*c*) $\frac{1}{3}$, (*d*) $\frac{1}{2}$ అగునో కట్టుము. ప్రతి సందర్భమునను ఫలితమును ఇచ్చు అంకగణిత విధానమును, బీజగణిత విధానమును కూడ చూపుము.

5. 1911-వ సంవత్సరపు జనాభా లెక్కల ప్రకారము బ్రిటిషు హిందూదేశములో పురుషులు 160,419,288 మందియు, స్త్రీలు 152,997,793 మందియు ఉండిరి. మగజనాభాకును, ఆడజనాభాకును నిష్పత్తి కట్టుము. ఫలితమును $1 : n$ అనెడి రూపమున, n అనునది 3 దశాంశస్థానములుగల సంఖ్యగా చెప్పుము.

6. 1911 లో బ్రిటిషు కోస్తాలోను స్వదేశీయ హిందూరాష్ట్రములలోను కలిపి అవివాహిత స్త్రీ సంఖ్య 52·5 మిలియనులు, వివాహిత స్త్రీ సంఖ్య 73·7 మిలియనులు, విధవల సంఖ్య 26·6 మిలియనులు. ఒక్కొక్క రకపు స్త్రీ సంఖ్యకును మొత్తము స్త్రీ జనాభాకును నిష్పత్తులను $1 : n$ అను రూపమున (n అనునది రెండు దశాంశస్థానముల సంఖ్యగా) కట్టుము.

7. (*a*) 3 అం. భుజముతో ఒకటియు, 2 అం. భుజముతో ఒకటియు చతురస్రములను గీయుము. వాటి భూఫలములను, భుజములను పోల్చుము. నిష్పత్తులు సమములా?

(*b*) (1) a″ భుజముగలట్టియు, (2) b″ భుజముగలట్టియు, చతురస్రముల భూఫలములు ఎంతెంత? భుజముల నిష్పత్తి యెంత? భూఫలముల నిష్పత్తి ఎంత? అవి సమములా?

(*c*) (1) క్రమముగ a అం., b అం. ను భుజములుగల రెండు చతురస్రములును, (2) క్రమముగ a సెం.మీ., b సెం.మీ. ను భుజములుగల రెండు చతురస్రములును గీయుము. (1) లోని చతురస్రముల నిష్పత్తికి, (2) లోని చతురస్రముల నిష్పత్తి సమానమేనా?

8. (*a*) 3″ భుజముతో ఒక చతురస్రము గీయుము. కర్ణముయొక్క పొడుగు కొలువుము. కర్ణభుజముల నిష్పత్తి కట్టుము. వివిధ విస్తీర్ణములుగల సమచతురస్రములు గీసి ఈ చర్య రెట్టించి, **ఆ నిష్పత్తి స్థిరమనియు అది 1·414 : 1 అనుదానికి సమమనియు నిరూపింపుము.**

(*b*) 3″ కర్ణముతో ఒక చతురస్రము గీయుము. భుజముయొక్క పొడుగు కొలువుము. భుజకర్ణముల నిష్పత్తి కట్టుము. వివిధ విస్తీర్ణములుగల సమచతురస్రములు గీసి ఈ చర్య రెట్టించి, **ఆ నిష్పత్తి ·707 : 1 అని నిరూపింపుము.**

9. (*a*) 4″ భుజముతో సమత్రిభుజము గీయుము. ఒక శీర్షమునుండి ప్రతిముఖభుజముపై లంబము గీయుము. దాని పొడుగు కొలువుము. లంబభుజముల నిష్పత్తి కట్టుము. 3·5″, 7·8 సెం.మీ., 9·1 సెం.మీ. భుజములుగల సమత్రిభుజములు గీసి పై చర్య రెట్టింపుము. సమత్రిభుజములో **లంబభుజముల నిష్పత్తి స్థిరమనియు అది ·866 : 1 అనుదానికి సమమనియు నిరూపింపుము.**

(*b*) 4″ ఉన్నతాంశముతో ఒక సమత్రిభుజము గీయుము. దాని భుజము కొలువుము. భుజలంబముల నిష్పత్తి కట్టుము. 2 అం., 3 అం., 3·5 సెం.మీ., 4·5 సెం.మీ. ఉన్నతాంశములతో సమత్రిభుజములు గీసి పై చర్య రెట్టింపుము. **భుజలంబముల నిష్పత్తి 1·154 : 1 అని నిరూపింపుము.**

10. $\angle ABC = 50°$, $\angle ACB = 80°$ గల ABC అను త్రిభుజము గీయుము. అట్టి షరతులతోనే DEF అను మరియొక త్రిభుజము గీయుము. సంగతభుజముల (అనగా, సమానకోణములకు ప్రతిముఖముగనుండు భుజముల) నిష్పత్తులను కట్టుము. నీవేమి గమనింతువు? మారుకోణములుగల ఇతర త్రిభుజయుగ్మములు గీసి, పై చర్య రెట్టింపుము. **"సమరూప త్రిభుజములయొక్క సంగతభుజముల నిష్పత్తులు సమములు"** అని సరిచూపుము.

11. (*a*) ఒక వ్రాతబల్ల తాలూకు 45° గల మూలమట్టముయొక్క దీర్ఘతమభుజము పొడుగు 12 అం. దాని ఇతర భుజములలో నొకటి కట్టుము. (8-వ ప్రశ్నలోని ఫలితము వాడుము.)

(*b*) ఒక వ్రాతబల్ల తాలూకు 60°, 30° గల మూలమట్టముయొక్క దీర్ఘతమభుజము పొడుగు 14 అం. దాని ఇతర భుజములు కట్టుము. (9-వ ప్రశ్నలోని ఫలితము వాడుము.)

(*c*) సూర్యుని ఉన్నతాంశము 30° ఉన్నప్పుడు ఒక చెట్టుయొక్క నీడ 6 అ. 3 అం. ఆ చెట్టు ఎంత ఎత్తు? (9-వ ప్రశ్నలోని ఫలితము వాడుము.)

(*d*) 20 అం. పొడుగుగల ఒక నిచ్చెన ఒక గోడకు జేరపడి ఉండి దానితో 30° చేయుచున్నది. (*a*) నిచ్చెనయొక్క పైకొన ఎంత ఎత్తో, (*b*) క్రిందికొన గోడకు ఎంత దూరమో, కట్టుము.

(*e*) 11 (*a*) లో నిచ్చెన గోడతో 45° కోణముచేసినచో, ఫలితములు ఏమి?

12. (*a*) రెండు మూలమట్టములలో రెండును 60°, 30° గలవేగాని ఒకటి వ్రాతబల్ల తాలూకుది, ఒకటి కుర్రవానిది. వాటి దీర్ఘతమభుజములు, క్రమమున, 1 అ., 5·3 అం. రెండవదానిలో 30° కోణమునకు ప్రతిముఖభుజము 2·6 అం. ఉన్నది. వ్రాతబల్ల తాలూకు సాధనములో పై భుజముయొక్క సంగతభుజమును కట్టుము. (10-వ ప్రశ్నలోని ఫలితము వాడుము.)

(*b*) 143 అ. ఎత్తున్న ఒక గోపురముయొక్క నీడ 39 అ. ఉన్నది. అప్పుడే, ఒక కొబ్బరిచెట్టుయొక్క నీడ 5½ అ. ఉన్నది. చెట్టు ఎంత ఎత్తు? (10-వ ప్రశ్నలోని ఫలితము వాడుము.)

(*c*) ఒక బాలభటుడు 5 అ. 6 అం. ఉన్న తన "స్కౌట్" కర్రను ఒక చెట్టునకు 50 గజముల ఎడమున సమభూమిపై నిలబెట్టి, తాను వెనుకకు జరిగి జరిగి, ఒక చోట తల నేల బారుగా పెట్టి, అక్కడనుండి కర్రయొక్క పై మొనను చెట్టుయొక్క కొనను ఏకముగ చూడగలిగినాడు. అంగలువేసి చూడగా, ఆ చోటు కర్రకు 15 గజముల ఎడముననున్నది. అతడు ఎట్లు కట్టి ఉండునో అట్లే చెట్టుయొక్క ఎత్తు కట్టుము. (10-వ ప్రశ్నలోని ఫలితము వాడుము.)

(*d*) ఒక నది ఒడ్డుననున్న ఒక బాలభటుడు అవతల ఒడ్డున ఒక చెట్టునుచూచి, దానికి ఎట్ట ఎదురుగా తన ఒడ్డున ఒక బిందువును గుర్తు

పెట్టుకొని, అక్కడనుండి 50 గజములు ఒడ్డువెంబడి నదియొక్క అడ్డమునకు లంబాత్మకముగా అంగలువేసి, అక్కడ తన "స్కౌట్" కర్ర నిలబెట్టినాడు. తర్వాత, అతడు అదేదిశగా మరి 25 గజములు అంగలువేసి, ఆ చోటు గుర్తు పెట్టుకొని, లంబాత్మకముగ తిరిగి, ఒడ్డునువదలి 30 గజములు నడచి ఒక చోటుజేరి అక్కడనుండి ఇవతల ఒడ్డు "స్కౌట్ కర్రను" అవతల ఒడ్డు చెట్టును ఏకముగ చూడగలిగినాడు. నదిని దాటకుండ అతడు దాని వెడల్పు ఎట్లు కట్టి ఉండునో, అట్లే కట్టుము. (10-వ ప్రశ్నలోని ఫలితమును వాడుము.)

(*e*) నిట్టనిలువగు ఏక సమతలములోనుండెడి రీతిగ మూడు వెదురు కర్రలు నేలపై పాతి ఉన్నవి వాటి ఎత్తులు క్రమమున, 25 అ., 15 అ., 10 అ. వాటి పై కొనలమీద అని ఉన్న ఒక టేకువాసము వాటికి డొక్కనార తాటితో కట్టి ఉన్నది. ఒకటవ, రెండవ, వెదుళ్ల ఎడము 12 అ. రెండవ మూడవవాటి ఎడము కట్టుము. వాసము సరిగా మొదటి వెదురు లగాయతు మూడవదానివరకు ఉండెడి పొడుగుగలదియైనచో, రెండవ వెదురు దానిని ఏ నిష్పత్తిలో భాగముచేయును? వాటి ఎత్తులు, క్రమమున, X అ., Y అ., Z అ., అయి 1-వ 2-వ వాటి ఎడము *a* అ. అయినచో, 2-వ 3-వ వాటి ఎడము ఎంత?

(*f*) ఒక గుండ్రటి డాబా కిటికీ, 20 అ. ఎత్తుగలిగి ఒక జెండా కర్రను చేరియున్నది. దాని నీడ జెండాకర్ర మొదలునకు 15 అ. ఉన్నది, జెండాకర్రనీడ 30 అడుగులున్నది. జెండాకర్ర ఎత్తు కట్టుము.

(*g*) 16½ అ. ఎత్తుగమన్న ఒక లాంతరుస్తంభమునకు 10 అ. ఎడమున నిలబడిన ఒక మనుష్యునియొక్క నీడ 5 అ. మనుష్యుని ఎత్తు కట్టుము. ఆ మనుష్యుడు తన నీడ 8 అ. ఉండువరకు జరిగినాడు. ఎంత జరిగినాడు?

13. ఘనమూలీయములైన 5 ఇనుపముక్కల పదార్థములు, క్రమమున, 61·6, 106·445, 330·138, 1425·986, 3654·05 గ్రాములు. వాటి అంచులు, క్రమమున 2 సెం.మీ., 2·4 సెం.మీ., 3·5 సెం.మీ., 5·7 సెం.మీ., 7·8 సెం.మీ. ప్రతి సందర్భమునను పదార్థమునకును ఘనమునకును నిష్పత్తిని $n : 1$ రూపమున (n లో రెండు సార్థక అంకములుండవలయును) కట్టుము. ఈ నిష్పత్తినే వస్తువుయొక్క "సాంద్రత లేక ఘనత్వము" అందురని గ్రహింపుము.

14. సూర్యునిచుట్టు బుధుడు 88 రోజులలోను, అంగారకుడు 686 రోజులలోను పూర్తిగ తిరుగుదురు. బుధాంగారకుల సంవత్సరమునకును భూమి

యొక్క సంవత్సరమునకును నిష్పత్తులు $n : 1$ అనెడి రూపమున కట్టుము. (n లో మూడు సార్థకాంకములుండవలయును.) భూమి సూర్యుని చుట్టు 365·4 రోజులలో భ్రమించును.

15. A B ల రాబడుల నిష్పత్తి $\frac{4}{5}$, B C ల రాబడుల నిష్పత్తి $\frac{15}{16}$. A C ల రాబడుల నిష్పత్తి ఎంత? A యొక్క రాబడి [illegible] రూ. అయినప్పుడు B C ల రాబడులు ఎంతెంత?

16. A B ల వయస్సుల నిష్పత్తి 4 : 7; B C ల వాటి నిష్పత్తి 5 : 8; C D ల వాటి నిష్పత్తి 14 : 15. A యొక్క వయస్సు 20 ఏళ్లు. B, C, D ల వయస్సులు కట్టుము.

17. 27 ఘ. అం ఘనఫలముగల ఒక శేకుముక్క భారము $12\frac{1}{2}$ ఔన్సులు. ఒక ఘన అడుగు నీటిభారము 62·5 పౌ. అయినచో, సమాన ఘనఫలములుగల శేకుయొక్కయు, నీటియొక్కయు భారములు పోల్చుము.

18. 2·5 అం. వ్యాసార్ధముతో ఒక వృత్తము చుట్టుము. వృత్తాంతరముననున్న O అను బిందువుమీదుగా AB, CD అను రెండు జ్యాలు గీయుము. AO, BO, CO, DO లు కొలువుము. $\frac{AO}{CO}=\frac{DO}{BO}$ అని నిరూపింపుము.

19. 3·6 అం. వ్యాసార్ధముతో ఒక వృత్తము చుట్టుము. వృత్తబాహ్యముననున్న O అను బిందువునుండి వృత్తమును A, B, C, D ల వద్ద ఖండించెడి OAB, OCD అను సరళరేఖలు గీసి $\frac{OA}{OC}=\frac{OD}{OB}$ అని నిరూపింపుము.

20. 17 : 21 అను నిష్పత్తి తీసికొనుము. దాని రెండు పదములనుండియు 4 తీసివేయగా వచ్చెడి నిష్పత్తిని నిర్దిష్టనిష్పత్తితో పోల్చుము.

21. 17 : 21 అను నిష్పత్తి తీసికొనుము. దాని రెండు పదములకును 8 కలుపగా వచ్చెడి నిష్పత్తిని నిర్దిష్టనిష్పత్తితో పోల్చుము.

22. ABC అనునది AB, BC, CA లు క్రమమున 4 సెం.మీ., 5 సెం.మీ., 6 సెం.మీ. ను గల ఒక త్రిభుజము. ∠ABC, ∠ACB, ∠CAB లను క్రమమున, సమద్విఖండనచేయు BD, CE, AF లు ప్రతిముఖభుజములను D, E, F ల వద్ద ఖండింపనిమ్ము. $\frac{AD}{DC}=\frac{4}{5}$ అని, $\frac{AE}{BE}=\frac{6}{5}$ అని, $\frac{BF}{CF}=\frac{4}{6}$ అనియును కొలతవల్ల నిరూపింపుము.

23. AOB అను ఏదో కోణము గీయుము. OB లో C అను ఏదో బిందువు తీసికొని, OA కు లంబముగ OA ను D వద్ద ఖండించెడి CD గీయుము. OC, OD, CD లు కొలువుము. $\frac{OD}{OC}$, $\frac{DC}{OC}$, $\frac{CD}{OD}$ అను నిష్పత్తులు కట్టుము. C అను బిందువును OB లోనే వివిధ స్థలములలో తీసికొని పైచర్య రెట్టింపుము. ఈ మూడు నిష్పత్తులనుగురించియు నీవేమి గమనింతువు? మరల, C అను బిందువును OA లో వివిధస్థలములలో తీసికొని పైచర్య రెట్టింపుము. నీవేమి గమనింతువు? AOB అను మరియొక కోణము తీసికొని పై చర్య రెట్టింపుము.

సూ:—సమకోణ త్రిభుజమైనట్టి పై COD లో, DOC (లేక AOB) అను కోణమునకు సన్నిహితభుజమగు ODని "భూమి" అనియు, దానికి ప్రతిముఖభుజమగు DC ని "**లంబము**" అనియు అందురు.

లంబము / **కర్ణము** అను నిష్పత్తిని ఆ కోణముయొక్క "**జ్యా**" అందురు.

భూమి / కర్ణము అను నిష్పత్తిని ఆ కోణముయొక్క "కోటిజ్యా" అందురు.

లంబము / భూమి అను నిష్పత్తిని ఆ కోణముయొక్క "స్పర్శరేఖ" అందురు.

ఒక నిర్దిష్టకోణమునకు ఈ నిష్పత్తులన్నియు స్థిరములు.

24. 30° లకు, 60° లకు, 45° లకును జ్యా, కోటిజ్యా, స్పర్శరేఖలను కట్టుము.

25. 1′ 6″ లును, 6″ లును వ్యాసములుగాగల రెండు కప్పీలచుట్టును అంతములేని ఒక తోలుపట్టీ సెకను 1-కి 32·875 అ. వేగముతో తిరుగుచున్నది. కప్పీల వేగము సెకనునకు ఎన్ని భ్రమణములో కట్టి, వాటిని పోల్చుము. పట్టీయొక్క వివిధ వేగములకు కప్పీల వేగములయొక్క నిష్పత్తి అచంచలమని నిరూపింపుము. ఆ నిష్పత్తి ఎంతకు సమానము?

26. ఈ క్రిందివాటిలో x కట్టుము:—

(*a*) రూ. 3—4 : రూ. 4—14 : : 4 మణుగులు : x.

(*b*) రూ. 9—6 : రూ. 4 x : : 2 టన్నులు : 140 పౌనులు.

(*c*) పౌ. 10—6 : x : : 728 గాలనులు : 156 గాలనులు.

(*d*) x : 63 గినీలు : : 64 ఏళ్లు : 36 ఏళ్లు.

27. 8 : 9, 13 : 15 అను నిష్పత్తులలో ఏది పెద్దది? పై సంఖ్యలలో నాల్గవదానిని మార్చి నిష్పత్తులను సమముచేయుము.

28. 43 మ. 3 వీ. 19 ప. లో $\frac{3}{4}$ నకును 86 మ. 6 వీ. 38 ప. లో ·5 నకును నిష్పత్తి అతిసూక్ష్మముగ చెప్పుము.

29. $6\frac{8}{9}$ మైళ్లు $1\frac{4}{5}$ గంటలలో A నడచును, 1880 గజములు $16\frac{1}{2}$ నిమిషములలో B నడచును. వారి వేగముల నిష్పత్తి ఎంత?

30. ఒక మహాపురపాలక సంఘములో 7967 వోటర్లకును ప్రతినిధులుగా 13 సభ్యులున్నారు. ప్రాతినిధ్యమునకును వోటు హక్కుదార్లకును నిష్పత్తి, మొదటి పదము ఒకటి ఉండునట్లు కట్టుము.

31. A 4 రోజులలో 5 రూ. ను, A, B లు 15 రోజులలో [illegible] 37½ రూ. ను, B, C లు 35 రోజులలో [illegible] 70 రూ. ను ఆర్జింతురు. A, B, C ల కూలిరేట్లను పోల్చుము.

32. a రూ. b అణాలకును, p రూ. q అణాలకును నిష్పత్తి ఎంత?

33. a గినీలకును b పౌ c షిల్లింగులకును నిష్పత్తి ఎంత?

46. అనుపాతము "అనులోమము," "విలోమము" అని రెండు విధములు ఈ క్రింది ఉదాహరణలు వాటి తేడాను విశదముచేయును.

ఉదా. 7. 27 పడుల బియ్యపుబస్తా ఖరీదు (గోనీ సంచి ఖర్చు కాక) 9 రూ. అయినచో, 45 పడుల బస్తా (గోనీ సంచి ఖర్చు కాక) ఎంత?

పద్ధతి (1) **ఏకాంకపద్ధతి.**

27 పడుల ఖరీదు 9 రూ.

1 పడి ఖరీదు $\frac{9}{27}$ రూ.

$$\therefore 45 \text{ పడుల ఖరీదు } \frac{9}{27} \text{ రూ.} \times 45 = 15 \text{ రూ.}$$

పద్ధతి (2) **అనుపాతమును కనుపరచు చుక్కలపద్ధతి.**

		పడులు	రూపాయలలో ఖరీదు
ప్రమాణఫలములు	... ...	27	9
ఇచ్ఛ, ఇచ్ఛాఫలములు	... ...	45	? (లేక x)

$\therefore 27 : 45 :: 9 : x$ (ఇచ్ఛాఫలము రూపాయలలో నుండును.)

$\therefore 27x = 9 \times 45.$

$\therefore x = \frac{9 \times 45}{27} = 15.$ ∴ 15 రూ. ఫలితము.

పద్ధతి (3) **ఒక నిష్పత్తిచే గుణించెడి పద్ధతి.**

45 పడుల ఖరీదు 27 పడుల ఖరీదుకంటె ఎక్కువ గావున, ఇచ్చిన ఖరీదును $\frac{45}{27}$ అను నిష్పత్తిచే గుణించినచో కోరిన ఖరీదు వచ్చును. ∴ కోరిన ఫలము $= \frac{45}{27} \times 9 = 15$ రూ.

పైది, **అనులోమ అనుపాతమునకు** లేక అనులోమవికృతికి ఉదాహరణ. ఒక రాసి (పై ఉదాహరణలో బియ్యపు ఖరీదు) మరియొక రాసిపై (పడుల సంఖ్య) ఆధారపడి ఉండి, ఆ మరియొకటి ద్విగుణమైనను, త్రిగుణమైనను, సగమైనను, పెరిగినను, తరిగినను, అదికూడ, అదే నిష్పత్తిలో తధారీతిని ద్విగుణమగుచు, త్రిగుణమగుచు, సగమగుచు, పెరుగుచు, తరుగుచు నుండినచో, అది ఆ మరియొక రాసితో అనులోమముగ వికృతి చెందును. అప్పటి అనుపాతమును అనులోమ అనుపాతము అందురు.

ఉదా. 8. ఒక విద్యార్థివసతిలోని బియ్యపులాటును 36 గురు సభ్యులు 10 నెలలలో ఆఖరుచేసినారు. సభ్యులు 60 మంది ఉండినచో, అదే ఎంతకాలము వచ్చును?

పద్ధతి (1) **ఏకాంకపద్ధతి.**

ఆ బియ్యపులాటు 36 సభ్యులకు సరిపోయెడిది 10 నెలలు.

∴ ,, ,, 1 సభ్యునకు ,, 10×36 నెలలు.

∴ ,, ,, 60 సభ్యులకు ,, $\frac{10 \times 36}{60} = 6$ నెలలు.

పద్ధతి (2) **అనుపాతము, చుక్కలు.**

		సభ్యులు	నెలలు
ప్రమాణఫలములు	... ...	36	10
ఇచ్ఛ, ఇచ్ఛాఫలములు	... ...	60	x

$60 : 36 :: 10 : x$

$\therefore x \times 60 = 36 \times 10$

$\therefore x = \frac{36 \times 10}{60} = 6.$

∴ కోరినకాలము = 6 నెలలు.

పద్ధతి (3) **గుణించెడి నిష్పత్తి.**

సభ్యులు 60 మంది అగునపుడు ఆ బియ్యమే 36 మంది ఉన్నప్పటి కంటె తక్కువకాలము సరిపోవును. కాబట్టి, ఆ కాలమును $\frac{36}{60}$ లేక $\frac{3}{5}$ నిష్పత్తికి తగ్గించవలెను.

∴ కోరినకాలము $= 10 \times \frac{3}{5} = 6$ నెలలు.

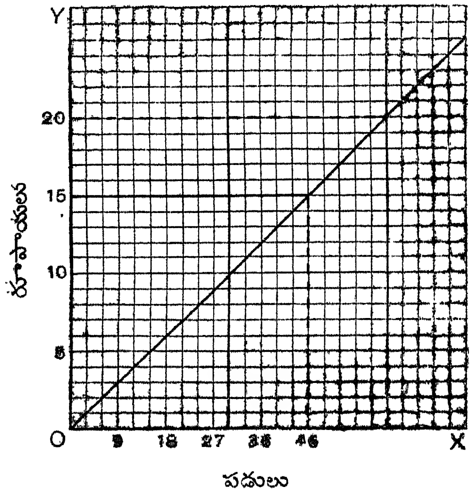
ఇది, విలోమ అనుపాతమునకు లేక విలోమవికృతికి ఉదాహరణ. ఒక రాసి (ఈ లెక్కలో, నిలువచేసిన సామగ్రి సరిపోయెడికాలము) మరియొక రాసిపై (వసతి గృహములోని సభ్యుల సంఖ్య) ఆధారపడి ఉండి, ఆ మరియొకటి ద్విగుణమైనను, త్రిగుణమైనను, సగమైనను, పెరిగినను, తరిగినను, అదిమాత్రము, అదే నిష్పత్తిలో తధారీతిని, సగమగుచు, మూడవవంతగుచు, ద్విగుణమగుచు, తరుగుచు, పెరుగుచు నుండినచో, అది ఆ మరియొక రాసితో **విలోమముగ** వికృతిచెందును.

47. (*a*) అనులోమ అనుపాతమునకు లేఖ్యాత్మక ఉద్దీపకము.

27 పడుల బియ్యము ఖరీదు 9 రూ. అయినచో, 45 పడుల ఖరీదు ఎంత?

పడులు	...	27,	45,	54,	0.
రూపాయలు	...	9,	x,	18,	0.

54 పడుల ఖరీదు 18 రూ. అనియు, 0 పడుల ఖరీదు 0 రూపాయల నియు ఎరుగుదుము. కాబట్టి, 9-వ అధ్యాయములోవలె, (27, 9), (54, 18), (0, 0) అను స్థితి నిరూపక యుగ్మములచే చిహ్నితములగు బిందువులను స్థాపించి, వాటిని కలుపగలము. అప్పుడు ఒక సరళరేఖయగు లేఖ్యము వచ్చును. ప్రక్కపటములో పడులు x అక్షము మీదుగను, రూపాయలు y అక్షము మీదుగను గుర్తింపబడినవి. x అక్షము మీద $\frac{1}{10}''=1$ పడి అనునది ప్రమాణము, y అక్షముమీద $\frac{1}{10}''=1$ రూపాయ అనునది ప్రమాణము,



పటము 44.

లేఖ్యమునుబట్టి, 45 పడులయొక్కయు ఖరీదు 15 రూ. అని విశదము.

దీనినిబట్టియే, 20 రూపాయలకు ఎన్ని పడులో చెప్పవచ్చును; ఫలితము, 60 పడులు.

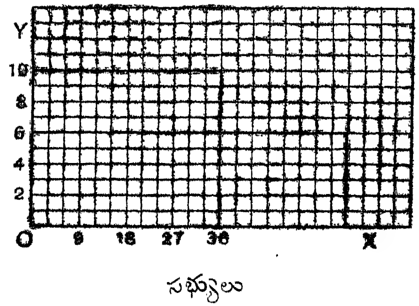
(*b*) విలోమ అనుపాతమునకు లేఖ్యాత్మక ఉద్దీపకము.

ఒక విద్యార్థి వసతిలోని బియ్యపులాటును 36 సభ్యులు 10 నెలలలో ఆఖరుచేసినారు. సభ్యులు 60 మంది ఉండినచో, అదే ఎంతకాలము వచ్చును?

పద్ధతి (1):—సభ్యులు	...	36	72	0	60.
నెలలు	...	10	5	0	x.

$$36 \times 10 = 360;\ 72 \times 5 = 360;\ \text{అట్లే}\ 60 \times x = 360.$$

పై జతల విలువలు భుజములుగాగల ఆయతములయొక్క భూఫలములు సమములు. కాబట్టి, (x అక్షము మీద 3 సభ్యులు$=\frac{1}{10}''$ తోను, y అక్షముమీద 1 నెల $=\frac{1}{10}''$ తోను) 36, 10 అను బిందువును స్థాపించి, (0, 0), (36, 0), (36, 10), (0, 10), అనునవి క్రమమున కోణబిందువులుగాగల ఆయతమును పూర్తిచేయుము.



పటము 45.

ఇదే భూఫలముగల (అనగా 120 చిన్న చదరములు) మరియొక ఆయతమునకు ఒక భుజము 60 ఏకములు అయినచో, తక్కిన భుజము, 44-వ పటములోవలె, 6 ఏకములు అయి తీరవలెను.

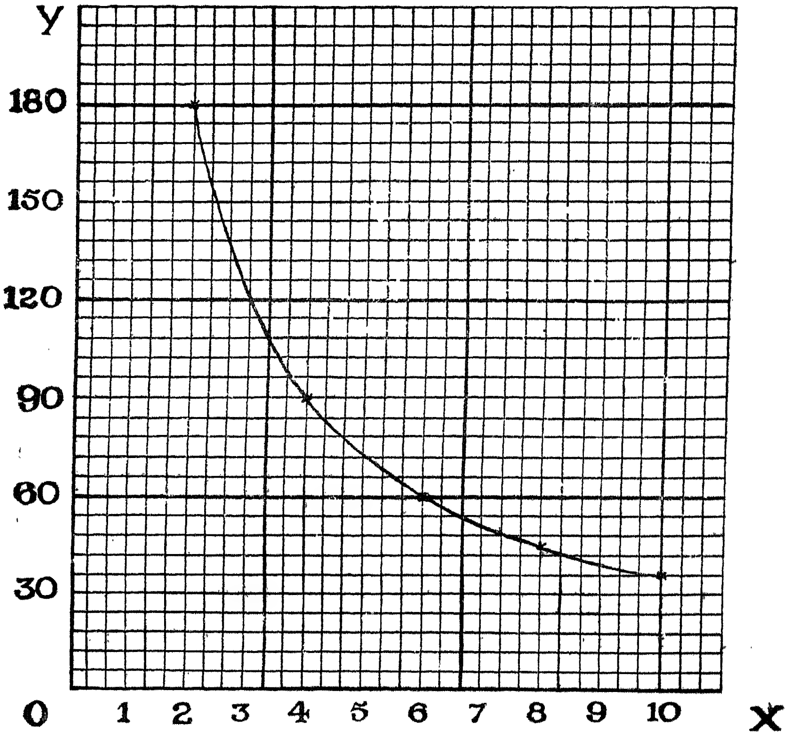
పద్ధతి (2):—విలోమ అనుపాతముయొక్క ప్రతి సందర్భమునను,

$x =$	2	4	6	8	10
$y =$	180	90	60	45	36

మన మిదివరలో గ్రహించినట్లు, చలరాసుల రెండిటి లబ్ధమును ఎప్పుడును అదే యగును. x అనునది సభ్యులసంఖ్యకు చిహ్నమును, y అనునది నెలల సంఖ్యకు చిహ్నమును అయినచో, $xy = 360$. $\therefore y = \frac{360}{x}$.

దీనినిబట్టి, (2, 180), (4, 90), (6, 60), (8, 45), (10, 36) అను బిందువులను స్థాపింపుము. (x అక్షముమీద ప్రమాణము: $\frac{3}{10}''=1$,

సభ్యుడు, y అక్షముమీద $\frac{1}{10}''=6$ నెలలు.) తర్వాత, వాటిని విరుపులేని



సభ్యులు

పటము 46.

రేఖచే సవ్వరిగ కలుపుము. లేఖ్యమునుబట్టి $y=60$ అయినప్పుడు, $x=6$.
$\therefore$ కోరినకాలము 6 నెలలు.

48. మిశ్రమ అనుపాతము. ఏకకాలమున బహు వికృతులు సంభవించునపుడు, ఆ వివిధ వికారములవల్ల ఏ ప్రత్యేకరాశికి ఘాతవచ్చునో మనము నిర్ణయించుకొనవలయును. ఈ క్రింది ఉదాహరణ మిశ్రమ అనుపాతమును ఉద్దీపించును.

ఉదా. 9. 600 అ. పొడుగు, 12 అ. ఎత్తు, $1\frac{1}{2}$ అ. మందమునుగల ఒక గోడకట్టుటకు ఒక కంట్రాక్టుదారు 100 మందినిపెట్టి, రోజునకు 8 గంటలచొప్పున చేయించి, పనిని 12 రోజులలో ముగించును. 1,200 అ. పొడుగు, 10 అ. ఎత్తు, 2 అ. 3 అం. మందమునుగల గోడను, రోజునకు 6 గంటలచొప్పున 10 రోజులలో ముగించుటకు ఎంతమంది కావలసి ఉందురు?

		పొడుగు	ఎత్తు	మందము	రోజులు	రోజు 1-కి గంటలు	మనుష్యులు
ప్రమాణము	...	600	12	$1\frac{1}{2}$	12	8	100
ఇచ్ఛ	...	1200	10	$2\frac{1}{4}$	10	6	x

(i) అనుపాతము; చుక్కల పద్ధతి—

మనము పొడుగు యొక్కయు, మనుష్యులయొక్కయు అన్యోన్య ఆధారతనువిచారణచేయునపుడు తక్కిన రాసులన్నియు స్థిరములనియే అనుకొని తీరవలయును. అట్లే, ప్రతి రెండు రాసులనుగురించి ఆలోచించునపుడును.

పొడుగు, మనుష్యులు (అనులోమ అనుపాతము)	600 : 1200	:: 100 : x.
వెడల్పు, మనుష్యులు (అనులోమ అనుపాతము)	12 : 10	
మందము, మనుష్యులు (అనులోమ అనుపాతము)	$1\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}$	
రోజులు, మనుష్యులు (విలోమ అనుపాతము)	10 : 12	
గంటలు, మనుష్యులు (విలోమ అనుపాతము)	6 : 8	

$\therefore\ x\times600\times12\times1\frac{1}{2}\times10\times6=100\times1200\times10\times2\frac{1}{4}\times12\times8$:

$$\therefore\ x=\frac{100\times1200\times10\times\frac{9}{4}\times12\times8\times2}{600\times12\times3\times10\times6}=400.$$

(ii) నిష్పత్తిచే గుణించెడి పద్ధతి—

(1) పొడుగు 1200 : 600 లేక 2 : 1 అను నిష్పత్తిలో హెచ్చినది కావున, మనుష్యులుకూడ ఆ నిష్పత్తిలోనే హెచ్చవలయును.

$\therefore$ మనుష్యుల సంఖ్య $=100\times\frac{2}{1}$.

11

(2) ఎత్తు తగ్గినది, మనుష్యులు తగ్గవలయును.

$\therefore$ మనుష్యుల సంఖ్య $=100\times\frac{2}{1}\times\frac{10}{12}$.

(3) మందము హెచ్చినది, మనుష్యులు హెచ్చవలయును.

$\therefore$ మనుష్యుల సంఖ్య $=100\times\frac{2}{1}\times\frac{10}{12}\times\frac{2\frac{1}{4}}{1\frac{1}{2}}$.

(4) రోజుల సంఖ్య తగ్గినది, మనుష్యుల సంఖ్య హెచ్చవలయును.

$\therefore$ మనుష్యుల సంఖ్య $=100\times\frac{2}{1}\times\frac{10}{12}\times\frac{2\frac{1}{4}}{1\frac{1}{2}}\times\frac{12}{10}$.

(5) అట్లే, గంటలకు,

$$\therefore \text{మనుష్యుల సంఖ్య} =100\times\frac{2}{1}\times\frac{10}{12}\times\frac{2\frac{1}{4}}{1\frac{1}{2}}\times\frac{12}{10}\times\frac{8}{6}.$$
$$=100\times\frac{2}{1}\times\frac{10}{12}\times\frac{9}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{12}{10}\times\frac{8}{6}.$$
$$=400.$$

అభ్యాసము 10 (B)

1. ఈ క్రింద, కొన్ని పుస్తకముల ప్రకటన రేట్లును, అమ్మకపు రేట్లును ఇచ్చి ఉన్నవి. ప్రకటన రేట్లకును, అమ్మకపు రేట్లకును అనుపాతము కలదేమో చూడుము:—

	రూ.	అ.	రూ.	అ.	రూ.	అ.	రూ.	అ.
ప్రకటన రేట్లు...	2	4	3	8	5	0	8	0
అమ్మకపు రేట్లు...	1	11	2	10	3	12	6	0

ఉన్నచో, ఒక లేఖ్యము గీసి దానినిబట్టి ప్రకటన రేటు రూ. 7—8—0 గల ఒక పుస్తకపు అమ్మకపు రేటును, అమ్మకపు రేటు రూ. 4—8—0 గల ఒక పుస్తకపు ప్రకటన రేటును కట్టుము.

2. ఈ క్రింద ఇచ్చిన నిక్కెల్ గడియారపు ఖరీదులకును, వెండి గడియారపు ఖరీదులకును అనుపాతము కలదేమో చూడుము:—

	నిక్కెల్ రూ.	వెండి రూ.	
దర్జాపురుషుల గడియారము...	20	45	(నాణ్యము సమానమే).
సర్దార్ గడియారము ...	15	25	(డిటో).
పి. ఆర్. అండ్ సన్సు గడియారము.	28	42	(డిటో).
ఒమిగా గడియారము ...	30	48	(డిటో).

3. ఈ క్రింద ఇచ్చిన కాతా రేట్లును రొక్కపు రేట్లును అనుపాతబద్ధములేమో చూడుము:—

	రూ.	రూ.	రూ.	రూ.	రూ.
కాతా రేటు ...	15	24	32	40	54
రొక్కపు రేటు...	13·5	21·6	28·8	36	48·6

అయినచో, ఒక లేఖ్యము గీసి, దానినిబట్టి కాతా రేటు 60 రూ. అగు ఒక పుస్తకముయొక్క రొక్కపు రేటును, రొక్కపు రేటు 36 రూ. అగు ఒక పుస్తకముయొక్క కాతా రేటును కట్టుము.

4. వివిధ దినభాగములలో మెడ్రాసు గ్రీనిచ్‌లలో కాలములు ఈ క్రింద ఇచ్చి ఉన్నవి:—

	మధ్య అహ్నము	అపర అహ్నము	అపర అహ్నము	అపర అహ్నము
మెడ్రాసు ...	12	3	6	8
	పూర్వ అహ్నము	పూర్వ అహ్నము	అపర అహ్నము	అపర అహ్నము
గ్రీనిచ్ ...	6-40	9-40	0-40	2-40

వీటికి అనుపాతము కలదేమో చూడుము. గ్రీనిచ్ కాలము 4 పూర్వ అహ్నము అయినప్పుడు మెడ్రాసు కాలము కట్టుము.

5. ఒక బాలుడు ఒక తీగెచివర ఒకటి తర్వాత ఒకటిచొప్పున బరువులు వ్రేలాడకట్టి, ప్రతి సందర్భమునను తీగె ఎంతెంత సాగినదో వ్రాసికొనినాడు.

కట్టిన బరువులు, (పౌనులలో).	28	35	42	49	56
పొడుగులోవచ్చిన పెచ్చు (సెం. మీ. లలో) ...	·018	·022	·027	·031	·036

భారములకును పొడుగులోవచ్చిన పెచ్చులకును అనుపాతము కలదేమో చూడుము. ఒక లేఖ్యము గీసి దానినిబట్టి పొడుగులో ·064 సెం.మీ. పెచ్చు రావలయునన్న భారమెంత ఉండవలయునో కట్టుము.

6. సమానమైన మందముగల ఒక లోహపు రేకునుండి, అదే భూమి కలిగియున్న అనేక ఆయతములను కత్తిరించినారు. ప్రతి ఆయతపు ఉన్నతాంశమును కొలిచినారు, ప్రతి ఆయతమును తూచినారు. ఆ ఫలితములు ఇవి:—

ఆయతముల ఉన్నతాంశములు ...	2·3	4·8	6·4	9·4
ఆయతముల భారములు ...	0·63	1·31	1·75	2·58

ఉన్నతాంశ భారములకు అనుపాతమున్నదని నిరూపించి, వీలగునంత వరకు వాటి చిహ్నిత బిందువులమీదుగా ఒక సరళరేఖ గీయుము.

7. చివరకు ఒక అర్ధణా అటు ఇటైనప్పుడు, ఈ క్రింది రైల్వే చార్జీలు దూరములకు అనుపాతముగ నున్నవేమో చూడుము:—

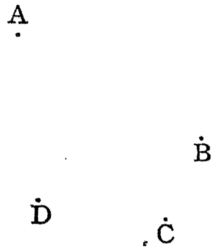
మెడ్రాసునుండి దూరము (మైళ్లలో)	స్టేషను	రైల్వే చార్జి		
		రూ.	అ.	పై.
26	తిరువళ్లూరు	0	7	6
65	వాలాజాపేట రోడ్	1	3	0
81	కాట్పాడీ	1	7	6
136	జోలార్‌పేట	2	6	0

ఒక లేఖ్యము గీసి, దానినిబట్టి మెడ్రాసునుండి 43 మైళ్లలోనున్న ఆర్కోణమునకు చార్జీ ఎంతో కట్టుము.

8. M. & S. M. రైల్వేమీద గడవబడిన దూరములును, అవి గడచుటకు పట్టిన కాలములును ఈ క్రిందిపట్టీలోనున్నవి:—

దూరము (మైళ్లలో)	0	72	104	144	183	254	283
ఆ దూరమును గడచునప్పటి సమయము	18–5	19–56	20–41	22–20	23-20	2–0	3–10

గడచిన దూరములకును, పట్టినకాలములకును అనుపాతమున్నదేమో లేఖ్యమూలమున చూచి చెప్పుము. (లేఖ్యములమీద ఇంకను ప్రశ్నలు 26-వ అధ్యాయములో ఉన్నవి చూడుము.)



9. AB అనునది 160 గజములకు చిహ్నము. AC, AD, BC, DC లు కట్టుము.

10. ఒక త్రిభుజముయొక్క భుజములు, క్రమమున, 10 సెం.మీ., 12 సెం.మీ., 14 సెం.మీ. ప్రతిముఖశీర్షములనుండి వాటిపై గీసిన లంబములు, క్రమమున, 7 సెం.మీ., $5\frac{5}{6}$ సెం.మీ., 5 సెం.మీ. భూములకును, లంబములకును అనుపాతమున్నదేమో చూడుము.

ఈ క్రింద 11 మొదలు 26 వరకు ప్రశ్నలలో, ఏవి అనుపాతాత్మకములో, సకారణముగ చెప్పుము:—

11. ఒకడు తన 30-వ ఏట 200 పౌనులు తూగెను. అతడు తన 60-వ ఏట ఎంత తూగును?

12. 20 ఏళ్ల ఈడప్పుడు ఒకడు 6 అడుగుల పొడుగు ఉండినచో, 40 ఏళ్ల ఈడప్పుడు అతడు ఎంత పొడుగు ఉండును?

13. 40 ఏళ్ల ఈడప్పుడు ఒకని ఆర్జన 50 రూ. 60 ఏళ్ల ఈడప్పుడు అతడెంత ఆర్జించును?

14. 6 నెలల ఈడుగల ఒక పిల్ల రోజు 1-కి 12 గంటలు నిద్రించును. ఆ పిల్ల 2 ఏళ్ల వయస్సులో ఎన్ని గంటలు నిద్రించును?

15. ఒకడు తనకు నెల 1-కి 150 రూ. జీతమప్పుడు నెల 1-కి 100 రూ. వెనకవేయును. అతడు తనకు నెల 1-కి 300 రూ. జీతమప్పుడు ఎంత వెనక వేయును?

16. 4 అంగుళముల చదరమైన ఒక అద్దమునకు కళాయి పెట్టించుటకు 4 అణాలు అగును. 12 అంగుళముల చదరమైన అద్దమునకు ఎంత అగును?

17. 6 అ. ఎత్తున్న చెట్టుయొక్క నీడ ప్రొద్దున్న 8 గంటలవేళ 10 అ. 3 అం. 18 అ. ఎత్తున్న చెట్టునకు నీడ అప్పుడే, ఎంత ఉండును?

18. 6 అ. ఎత్తున్న చెట్టుయొక్క నీడ ప్రొద్దున్న 8 గంటలవేళ 10 అ. 3 అం. మధ్యాహ్నము 12 గంటలకు దాని నీడ ఎంత?

19. ఒక రైలు ఎగ్మోర్ స్టేషనును 12-15 గంటలకు విడిచి వెళ్లినప్పుడు 15 నిమిషములు లేటు 30 నిమిషములు లేటయినప్పుడు అది ఎప్పుడు విడిచి వెళ్లి ఉండును?

20. ప్రవాహవేగము గంటకు 3 మైళ్లు అయినప్పుడు ఒక పడవ గంటకు 6 మైళ్లచొప్పున వాలుగా పోగలదు. ప్రవాహవేగము గంటకు 6 మైళ్లు అయినప్పుడు దానివాలు వేగము ఎంత?

21. ఒక చక్రపుపరిధి 5 అ. అయినప్పుడు, అది కొంతమేరలో 100 సార్లు భ్రమించును. $7\frac{1}{2}$ అ. పరిధిగల మరియొక చక్రము అదేమేరలో ఎన్నిసార్లు భ్రమించును?

22. నేను ఒకచోటకు మామూలుగా 5 గంటలలో నడచుచుండినచో, ముప్పాతిక వేగముతో, అక్కడికే, నేను ఎన్ని గంటలలో నడతును?

23. కొంతసొమ్ము నూటికి 5 చొప్పున 6 ఏళ్లకు వడ్డీకిచ్చినచో, 9 ఏళ్లకు ఇచ్చినప్పుడు వడ్డీరేటు ఎంత?

24. 12 యొక్క వర్గు 144. 36 యొక్క వర్గు ఎంత?

25. 100 యొక్క వర్గుమూలము 10. 50 యొక్క వర్గుమూలము ఎంత?

26. ఒక పనిని A 10 రోజులలోను, దానినే B 5 రోజులలోను చేయుదురు. A కి వారపు కూలి 4 రూ. అయినచో, B యొక్క కూలి ఎంత అగును?

అభ్యాసము 10 (C)

1. 8 గుర్రముల ఖరీదు 3,400 రూ. అయినప్పుడు, 15 గుఱ్ఱముల ఖరీదు కట్టుము.

2. 5 ఎకరముల భూమి ఖరీదు 6,275 రూ. అయినచో, 16 ఎకరముల 484 చ. గ. ఖరీదు కట్టుము.

3. $7\frac{1}{2}$ అ. పొడుగున్న ఒక ఉక్కు "గర్డరు" (దూలమువంటిది) రూ. 41—4—0 పెట్టినచో వచ్చును. 13 అ. $7\frac{1}{2}''$ పొడుగుది ఎంతకు వచ్చును?

4. ఒక హోటలు మేనేజరునకు, 245 మంది భోజనముచేసిన ఒకనాడు రూ. 313—14—6 వచ్చెను. (*a*) మరి 75 మంది ఎక్కువ వచ్చిననాడును, (*b*) 37 మంది తగ్గిపోయిననాడును, అతనికి రోజు రాబడి ఎంత?

5. సూర్యునినుండి భూమి వరుణులదూరములు, క్రమమున, 93,000,000 మైళ్లు, 1,754,000,000 మైళ్లును. సూర్యునినుండి వెలుగు భూమికి వచ్చుటకు $8' 20''$ పట్టినచో, వరుణునకు వెళ్లుటకు ఎంతసేపు పట్టును?

6. 2·5 మీటర్ల పొడుగుగల ఒక ఇత్తడి కడ్డీని కొన్ని డిగ్రీల ఉష్ణము పెరుగునట్లు కాచగా, అది చివరకు 2·533 మీటర్లున్నది. ఆ లోహపుదే,

$2' 7\frac{1}{2}''$ ఉన్న మరియొక కడ్డీని అన్ని డిగ్రీలపాటే కాచినపుడు, చివరకు అది ఎంత పొడుగుండును?

7. మెడ్రాసునుండి తన స్వగ్రామమునకు ఒకాయన $3\frac{1}{2}$ గంటలలో సైకిల్ తొక్కగలడు. ఒకనాడు అతడు మెడ్రాసులో బయలుదేరి, అక్కడ నుండి అసలు దూరములో $\frac{3}{4}$ దూరముననున్న ఒక బంగాళావద్దకు చేరుకొను నప్పటికి వెంటనే వెనుకకు రావలసినదని ఒక టెలిఫోను సమాచారము అంది, తక్షణము తన సైకిల్ వెనుకకు పట్టించి వెళ్లినచో, అతడు మెడ్రాసువదలిన ఎన్ని గంటలకు అక్కడకే చేరుకొనును?

8. ఒకడు 1,775 రూ. ఒక బ్యాంకులోవేసి ఒక సంవత్సరములో రూ. 97—10—0 వడ్డీ తీసినాడు. మరుసటి సంవత్సరము అతడు మరి 2,450 రూపాయలు వేసినచో, ఆ సంవత్సరము తాలూకు వడ్డీ అతనికి ఎంత వచ్చును?

9. 2 ఎకరముల 382 చ. గ. మేర 245 పశువులు మేసినచో, 363 పశువులకు ఎంతమేర కావలయును?

10. 360 పశువులు ఒక బీడును 45 రోజులలో మేసినచో, దానినే 540 పశువులు ఎన్నాళ్లలో మేయును?

11. 3 ఎక. 834 చ. గ. ఉన్న ఒక పచ్చికబయలును 180 పశువులు 14 రోజులలో మేసినచో, 6 ఎక. 2521 చ. గ. ఉన్న ఒక పచ్చికబయలును 259 పశువులు ఎన్నిరోజులలో మేయును?

12. పింఛను ఎప్పుడును, సర్వీసుకాలమునుబట్టి ఉండును. ఒకడు తన 25-వ యేట పనిలో ప్రవేశించి తన 53-వ యేట పని చాలించుకొని, 550 రూ. పింఛను పొందగలిగినచో, తన 23-వ యేట పనిలోజేరి 58-వ యేట నిష్క్రమించువాడు ఎంత పింఛను పొందును?

13. కావేరీ ప్రాంతముయొక్క మ్యాపు 1 అంగుళమునకు 16 మైళ్లు ప్రమాణముతో గీసి ఉన్నది. సత్యమంగళమునకును, ఈరోడ్‌నకును మ్యాపు మీద ఎడము 2·1875 అం. అయినచో, అసలు దూరము ఎంత?

14. "మ్యాజిక్ లాంతరు"లో పెట్టెడి చిత్రఫలకము $3'' \times 2\frac{1}{2}''$ ఉన్నది. ప్రతి రూపముయొక్క చిన్నభుజము పొడుగు $40''$ అయినచో, పెద్దభుజము పొడుగు ఎంత?

15. త్రిభుజాకారముననున్న ఒక పూలమడి భుజములు, క్రమమున, 26′, 56′, 36′ ను. ఒక ప్లానులో దీని దీర్ఘతమ భుజము 4·8 సెం.మీ. అయి కనబడినచో, ఇతర భుజములు ఎంతెంతయగును?

16. ఒక కాలువను 75′ పొడుగున త్రవ్వించుటకు 4,530 రూ. అవసర మైనచో, అంతే మధ్యచ్ఛేదముగల ఒక కాలువను 4 ఫ. 118 గ. 2 అ. పొడుగున త్రవ్వించుటకు ఏమగును?

17. 18 మంది ఒక పనిని 36 రోజులలో ముగింపగలిగినచో, (a) ఎంత మంది, (b) ఎంతమంది ఎక్కువవచ్చి, ఆ పనినే, 6 రోజులలో ముగింతురు?

18. 30′ × 30′ × 8′ ఉన్న ఒక చెరువులోని నీరు 540 మంది విద్యార్థులకు 28 గంటలపాటు సప్లయిచేయుటకు కటాకటీగా సరిపోవును. విద్యార్థులు 378 మంది మాత్రమే ఉన్నప్పుడు ఆ నీరే ఎన్నిగంటలపాటు సప్లయి అగును? ఈ ప్రశ్నలో ఏది అనవసరము? ఒకొక్క విద్యార్థికి నీరు ఏ రేటు చొప్పున సప్లయి కాబడుచున్నది? (గంటకు ఎన్ని ఘ. అ.?)

19. 25 మంది పనివాళ్లుగల ఒక ఓడ తండాకు 32 రోజులు వచ్చెడి తినుబండములు ఆ తండాలో $\frac{3}{5}$ జనముగల తండాకు ఎన్నిరోజులు వచ్చును?

20. ఉష్ణక్రమము యథాప్రకారముండినచో, ఒక వాయువు తాలూకు నిర్దిష్టపదార్థముయొక్క ఘనఫలమునకును అది కలిగించెడి పీడనకును విలోమ అనుపాతము ఉండును. ముఖ్య ఉష్ణక్రమమువద్ద, అనగా 0° వద్ద, 245 ఘ. అం. గాలిని 775 మి.మీ. పీడనకు లోనగునట్లు చేసినచో, అదియే ముఖ్యపీడనయగు 760 మి.మీ. వద్ద ఎంత అవకాశమును ఆవరించును?

21. పాదరసము నీటికి 13·6 అంతలు బరువు. పాదరసపు భారమితి, (a) 758 మి.మీ., (b) 760 మి.మీ. ను ఎత్తున నిలబడినపుడు నీటి భారమితి ఎంతెంత ఎత్తున నిలబడును? సమాన ఘనఫలములుగల పాదరసము గ్లిసరీనుల పదార్థములు 13·6 : 1·3 అను నిష్పత్తికలవియైనచో, గ్లిసరీన్ భారమితి ఎంత ఎత్తున నిలుచునో కూడ కట్టుము.

22. సముద్రపుమట్టమునుండి ఒక స్థలముయొక్క ఔన్నత్యము, స్థూలముగ చూచిన, అక్కడి వాయుపీడన ముఖ్య వాయుపీడనయగు 760 మి. మీటర్లకు ఎంత తరుగో ఆ తరుగుయొక్క అనుపాతాత్మకము. 8640 అ. ఔన్నత్యముగల దొడబెట్టా అను అత్యున్నత శిఖరమున భారమితి 447·5 మి. మీ. వద్ద నిలిచినచో, (a) సముద్రపు మట్టమునకు 3100 అ. పైన ఉన్న బెంగుళూరులోను, (b) సముద్రపు మట్టమునకు 186 అ. క్రిందనున్న ఒక గని లోను, భారమితి ఎంతెంత ఎత్తుగ నిలుచును? భారమితి 748 మి.మీ. వద్ద నిలబడెడి స్థలముయొక్క ఔన్నత్యమెంత?

23. రోజునకు 8 గంటలు పనిచేసెడి ఒకడు ఒక పనిని 18 రోజులలో ముగించును. ప్రతిదినమును పనికాలము 9 గంటలు అయినప్పుడు, ఆ పనినే, అతడు ఎంతకాలములో ముగించును?

24. $3\frac{1}{2}' \times 5'$ ఉన్న ఒక కిటికీ ఇచ్చెడి వెలుతురే 2′ ఎత్తున్న ఒక చూరు కిటికీలోనుండి రావలెనన్న అది ఎంతబారుగ నుండవలెను?

25. భర్తీగానున్న ఒక జలకోశమును 40 చ. అం. మధ్యచ్ఛేదముగల ఒక గొట్టము 6 గం. 30 నిమిషములలో ఖాళీచేయగలదు. 65 చ. అం. మధ్యచ్ఛేదముగల గొట్టము దానినే ఎన్ని గంటలలో ఖాళీచేయును?

26. ఒక చెరువులోనికి వాననీటిని తెచ్చెడి మేరయొక్క భూఫలము 5 చ. మైళ్లు 49 ఎకరములు. ఆ చెరువు వైశాల్యము 31 ఎక. 440 చ. గజములు. $3\frac{1}{2}''$ వాన ఆ మేరను కురిసినప్పుడు చెరువునీరు ఎంత ఎత్తు లేచును?

27. ఒక స్తంభముయొక్క పునాదిరాయి $18'' \times 12''$ ఉన్నది. అది $22\frac{1}{2}$ టన్నుల పీడన భరింపగలదు. $2'\ 6'' \times 1'\ 8''$ ఉన్న రాయి ఎంత భరించును?

28. ఛేదభూఫలము $2\frac{1}{2}$ చ. అం. గల ఒక మోకు 14 మంది మామూలు మనుష్యులయొక్క లాగుడు భరించును; ఛేదభూఫలము 1·75 చ. అం, అయినప్పుడు అది ఎంతమంది లాగుడునకు ఆగును?

29. $7\frac{1}{2}''$ వ్యాసముగల ఒక లోహపుకమ్మి చివరనున్న పీడనయొక్క తీవ్రత చ. అంగుళమునకు 516 పౌనులు. వ్యాసము $5\frac{5}{8}''$ అయిపోయి, మొత్తపు పీడన యథారీతిగా నుండినచో, పీడనయొక్క తీవ్రత ఎంత అగును? వృత్తపు భూఫలము $= \pi r^2$, వీటిలో $\pi = \frac{22}{7}$, $r =$ వృత్తపు వ్యాసార్థము.

30. 2·998 గ్రాముల పొటాసియ హారితము 1·169 గ్రాముల అమ్లజనిని విడిచి, 1·829 గ్రాములు హారిదమై మిగులును. 7·345 గ్రాముల పొటాసియ హారితము ఎంత అమ్లజనిని, ఎంత హారిదమును ఇచ్చును?

31. 960 గ్రాముల భారముగల ఒక లోహికామ్లజనిదమును 1000° పైకి కాల్చినపుడు అది 32 గ్రాముల అమ్లజనిని ఇచ్చును. 98 గ్రాముల అమ్లజని వచ్చుటకు ఎంత అమ్లజనిదమును అదే ఉష్ణక్రమమునకు కాల్చవలెను?

32. 211 పౌనుల నీటిని ఆవిరిగాచేయుటకు 1 క్వార్టరు కట్టెలు కావలసివచ్చినచో, 841 పౌనుల నీటిని ఆవిరిగా చేయుటకు కావలసిన కట్టెల బరువెంత?

33. ఒక స్వర్ణకిరీటముయొక్క భారము మద్రాసులో 193 గ్రాములు. భూమియొక్క ఆకర్షణబలము మద్రాసులో 978·29, ఎడిన్‌బరోలో 981·91. భారములు భూమియొక్క ఆకర్షణ (గురుత్వ) బలములకు అనుపాతములు. ఎడిన్‌బరోలో ఆ కిరీటముయొక్క భారము కట్టుము.

34. 143 అ. ఎత్తుగల ఒక గోపురపునీడ 39 అ. ఉన్నది. ఒక కొబ్బరి చెట్టునీడ, అప్పుడే $5\frac{1}{2}$ అ. ఉన్నది. చెట్టు ఎత్తు కట్టుము.

35. ఎగ్మోర్‌నుండి (మద్రాసు) విల్లుపురముయొక్కయు, పుదుచ్చేరి యొక్కయు దూరములు క్రమముగా 102 మైళ్లు, 122 మైళ్లును. ఎగ్మోర్‌నుండి విల్లుపురము మీదుగా పుదుచ్చేరికి మామూలు రైలుమీద 3-వ క్లాసు చార్జీ రూ. 2—6—0. విల్లుపురమునుండి ఎగ్మోర్‌కు చార్జీ కట్టుము. (అర్ధణాకంటె తక్కువలు విసర్జించి, ఎక్కువలు 1 అణా అని కట్టుకొనవచ్చును.)

36. నేను నెల 1-కి రూ. 16—0—0 చొప్పున చార్జీ ఇవ్వవలసిన హోటలులో భోజనము. ఫిబ్రవరినెలలో 5 వరుసరోజులు నేను భోజనముచేయలేదు. ఆ మేనేజరు నాకు ఎంత ముదరా ఇచ్చునని నేను అనుకొనవచ్చును?

37. గంటకు 15 మైళ్ల వేగము సెకనునకు 22 అడుగులకు సమమని నిరూపింపుము.

38. గంటకు 30 మైళ్లు వెళ్లగల ఒక "ఎక్స్‌ప్రెస్" రైలు ఒక దూరమును 18 గంటలలో గడచినది. గంటకు 40 మైళ్లు వెళ్లగల "మెయిలు" దానినే ఎన్ని గంటలలో గడచును?

39. "బోట్‌మెయిలు" అను రైలు ఎగ్మోర్‌లో 19-30 కి బయలుదేరి 21-0 కు చెంగల్పట్టు చేరును. ఈ రెండిటికిని ఎడము 38 మైళ్లు. మధ్య మధ్య ఆగుటలు 5 నిమిషములు అని కట్టుకొని, ఆ రైలుయొక్క సగటు వేగము కట్టుము.

40. 16′ 6″ × 12′ 3″ భూఫలముగల ఒక మేర లోహపు తెలుపురంగు వేయుటకు రూ. 6—5—1 అయినచో, $18' 7\frac{1}{2}'' \times 15' 4\frac{1}{2}''$ ఉన్న మేరకు అదే వేయుటకు ఎంత అగును?

41. 10 అ. పొడుగు, 9″ మందము, 13′ 4″ ఎత్తునుగల ఒక గోడ కట్టుటకు 1400 ఇటుకలు కావలెను. ఇటుకల ఖరీదు (మోతచార్జీ సహా) 330-కి రూ. 8—6—6. 28 అ. పొడుగు, 12′ 6″ ఎత్తు, 1′ 6″ మందమును గల గోడ కట్టుటకు ఎంత అగును?

42. నా మామూలు వేగములో $\frac{3}{4}$ వేగముతో నేను కచ్చేరికి వెళ్లిననాడు నేను 10 నిమిషములు లేటు. నేను మామూలుగా కచ్చేరికి ఎంతసేపులో వెళ్లుదును?

43. ఒక పనిని కొందరు 12 రోజులలో ముగింతురు. మరి 6 మందిని పెట్టినచో, అది 9 రోజులలోనే అయిపోవును. ఆ కొందరు ఎందరు?

44. బియ్యపురేటు రూపాయకు $2\frac{3}{4}$ పడులు అయినప్పుడు, ఒక సంసారమునకు, రేటు రూపాయకు $3\frac{1}{2}$ పడులు అయినప్పటికంటె ఖర్చు, 2 రూ. ఎక్కువ అగును. ఆ సంసారములో ఎన్నిపడుల బియ్యము చెల్లును?

45. ఒకడు రోజునకు 8 గంటలుచొప్పున పనిచేసి ఒక పనిని కొన్ని రోజులలో ముగించును. అతడు రోజునకు 9 గంటలుచొప్పున చేసినచో, ఆ పని 4 రోజులు పెందలకడనే ముగియును. ఆ కొన్నిరోజులు ఎన్ని?

46. ఒక మేస్త్రీయొక్క నెలసరి రాబడి అతడు బ్యాంకులోవేసిన కొంత సొమ్ము తాలూకు ప్రతినెలా నియామకముగా వచ్చెడి రూ. 45—6—6 ను, మరి రోజుకూలియు. 25 రోజులు కూలిచేసిన ఒక నెలలో అతని రాబడి రూ. 114—15—0. 18 రోజులుచేసిన నెలలో అతని రాబడి ఎంత?

47. ఒక ప్రచురణాలయమువారు గ్రంథకర్తకు మొదటి 1000 ప్రతుల మీదను ఏకమొత్తముగా 250 రూ. ఇచ్చుటకును, ఆ పైని అమ్మకము అయే ప్రతులకు అనుపాతముగ ఇచ్చుటకును, మాట జరిగినది. మొదటిసాలు ఆఖరికి 2345 ప్రతులు చెల్లినవి, గ్రంథకర్తకు రూ. 418—2—0 వచ్చినది. రెండవసాలు ఆఖరికి చెల్లిన ప్రతుల సంఖ్య ఆదినుండీ చూచినచో 4228 అయినచో, అప్పుడతనికి ఏమివచ్చును?

48. కొంతసేపు చలనములోనున్న ఒక స్వరూపముయొక్క వేగము, ఆది-వేగముయొక్కయు చలనకాలమునుబట్టి ఉండెడి మరియొక రాశియొక్కయు మొత్తము. సెకనునకు 20′ వేగముతో బయలుదేరి 1′ 20″ చలించినపిదప ఒక స్వరూపమునకు సెకనునకు 2580 అడుగుల వేగము వచ్చినచో, దానికి, అదే ఆదివేగముతో బయలుదేరిన 45 సెకనులలో, ఎంత వేగము వచ్చును?

49. నిర్మాణవ్యయము రెండు భాగములు. అందొకటి కట్టదలచినమేరయొక్క భూఫలమునకు అనుపాతము, రెండవది కట్టడముయొక్క ఘనఫలమునకు, ఉజ్జాయింపుగా అనుపాతము. 80′ పొడుగు, 20′ వెడల్పు, 34′ సగటు ఎత్తుగల ఒక కట్టడమునకు 14,000 రూ. అయినచో, 164′

పొడుగు, 48′ వెడల్పు, 51′ సగటు ఎత్తుగల కట్టడమునకు ఎంత అగును? భూమి ఖరీదు చ. అడుగు 4 రూ.

50. పాదరసముతో భర్తీగా ఉన్న ఒక బుడ్డియొక్క భారము 448 గ్రాములు. ఒక చర్య జరుపునిమిత్తము దానిలోని 14 ఘ. సెం.మీ., పాదరసము తీసివేయడమైనది. మిగత పాదరసముతో బుడ్డియొక్క భారము 257·6 గ్రాములు. బుడ్డియొక్క ఘనఫలము 30 ఘ. సెం.మీ. అగుచో, ఖాళీబుడ్డి భారము ఎంత?

51. ఒక ప్రశ్న పత్రమునకు అచ్చు ఖర్చులు రెండు భాగములు:— (*a*) అచ్చుకొట్టవలసిన ప్రతుల సంఖ్యతో నిమిత్తములేకుండ, "కంపోజు" ఖర్చు, ఇంత అనియు, (*b*) అచ్చుకొట్టవలసిన ప్రతుల సంఖ్యకు అనుపాతముగ నుండు అచ్చునకును కాగితమునకును కలిసి ఇంత అనియును. 375 ప్రతులు అచ్చుకొట్టుటకు రూ. 3—12—0 అగును, 650-కి రూ. 4—7—0 అగును. 750 అచ్చుకొట్టుటకు ఎంత అగును?

52. ఒక ఉద్యానకోశము కట్టుటకు 625 మంది పనివాళ్లకు 81 రోజులు పట్టును. పనిలో $\frac{1}{3}$ అయినపిదప, మనుష్యులలో. ·16 వెళ్లిపోయిరి. ఆది నుండి చూచిన, ఎన్నిరోజులలో ఆ కోశము ఉపయోగమునకు సిద్ధమగును?

53. ఒక పొలమును 15 మంది 48 రోజులలో కోసివేయగలరు. పని 12 రోజులు జరిగినపిదప 5 మంది తప్పుకొనినారు. తక్కినవారు ఆ పని సాగించి 10 రోజులు చేసిన తరువాత వారివంటి పనివాడితనముగలవారే మరి 15 మంది వచ్చి వీరితో కలిసిరి. పని ముగియునప్పటికి పట్టినకాలమెంత?

54. 28 రోజులకు చాలెడు తినుబండములుగల 150 మంది ఉన్న పటాలముతో ఒక యుద్ధనౌక సంగ్రామార్థము బయలుదేరినది. మృతించియో, దెబ్బలవలననో, వారమునకు 15 గురు దిగజారిపోవుచుండినచో, వారికిగల తినుబండములు ఎంతకాలము వచ్చును?

55. ఒక దళము 15 తెగలుగా చేసినచో, ఒక్కొక్క తెగలో 15 వరుసలును వరుసకు 18 మంది మనుష్యులును ఉందురు. కాని తెగ 1-కి 30 వరుసలును వరుసకు 15 మంది మనుష్యులును ఉండునట్లు చేసినచో దళము ఎన్ని తెగలగును?

56. 40′ పొడుగు, 1′ 6″ మందము, 12′ ఎత్తునుగల గోడను 6 మంది తాపీవాళ్లు $3\frac{3}{5}$ రోజులలో కట్టినచో, 60′ పొడుగు, 2′ 3″ మందము, 24′ 0″ ఎత్తునుగల గోడను 18 మంది తాపీవాళ్లు ఎన్నాళ్లలో కట్టుదురు?

57. 36′ × 22′ 6″ ఉన్న ఒక గదియొక్క నేలకు కడపరాళ్లు వేయుటకు రూ. 259—7—0 అగును. తాపీవాళ్ల నేర్పరితనము ఇదివరకు దానికి $\frac{5}{4}$ రెట్లుదియై, వీళ్లకు ఇచ్చేడికూలి ఇదివరకు దానికి $\frac{9}{8}$ రెట్లుదియై, ఉన్నప్పుడు 25′ × 18′ ఉన్న మరియొక గదికి అట్టిరాళ్లే వేయుటకు ఏమగును?

58. ఒక "పిక్ నిక్" పార్టీలోనున్నది 35 మంది పెద్దలు, 16 మంది పరివారజనులు, ముగ్గురు వంటవాళ్లును. వీరికి 4 రోజులకు 235 రూ. ఖర్చు అయినది. మరియొక పార్టీలో 75 మంది పెద్దలును, 20 మంది పరివారజనులును, 5 మంది వంటవాళ్లును ఉండి, ఈ పార్టీ 9 రోజులు సాగినచో, వీరికెంత అగును? (రెండవ సందర్భములోని ప్రతివానికిని మొదటి సందర్భములోని వాని ఖర్చులో $\frac{1}{5}$ తగ్గి అగును. పెద్దకు అగు ఖర్చునకును, పరివారజనునకు అగు ఖర్చునకును, వంటవానికి అగు ఖర్చునకును నిష్పత్తి 5 : 3 : 4.)

59. 9 మంది పెద్దవాళ్లును ముగ్గురు పిల్లలును కలిసి ఒక పనిని $12\frac{2}{3}$ రోజులలో ముగించినచో, 57 మంది పెద్దవాళ్లును 9 మంది పిల్లలును కలిసి దానినే ఎన్నాళ్లలో ముగింతురు? ఎంతమంది పిల్లలపని ఎంతమంది పెద్దలపనికి సమానమో తెలియవలెనా?

60. 4 గురు స్త్రీలును, ముగ్గురు బాలురును కలిసి ఒక పనిని 70 రోజులలో చేయుదురు. దానినే 12 మంది స్త్రీలును 6 మంది, బాలురును కలిసి ఎన్నాళ్లలో చేయుదురు? స్త్రీలకును బాలురకును సామ్యము తెలిపెడి సంబంధము ఈ ప్రశ్నలో అవసరమా? అగుచో, 1 స్త్రీ = ముగ్గురు బాలురు అనుకో.

61. 2 నెలల 18 రోజులలో ఒక భవనమును కట్టుటకు 140 మంది పురుషులు, 25 మంది స్త్రీలు, 15 మంది బాలురును కావలసినచో, దానినే 168 మంది పురుషులు, 30 మంది స్త్రీలు, 18 మంది బాలురును ఎన్నాళ్లలో కట్టగలరు? స్త్రీపురుష బాలురసంబంధము అవసరమా? కారణములు విశదముగ చెప్పుము.

62. 2 నెలల 18 రోజులలో ఒక భవనమును కట్టుటకు 140 మంది పురుషులు, 25 మంది స్త్రీలు, 15 మంది బాలురును కావలసినచో, దానినే 124 మంది పురుషులు, 45 మంది స్త్రీలు, 20 మంది బాలురును ఎన్నాళ్లలో కట్టగలరు? (ఒకేకాలములో పురుషుడు చేసినదానిలో $\frac{3}{5}$ స్త్రీయు, $\frac{2}{5}$ బాలుడును చేయగలరు.)

63. 14 మంది మగవాళ్లు, 7 మంది పిల్లలు, 8 మంది ఆడవాళ్లును కలిసి, రోజు 1-కి 8 గంటలు పనిచేసి ఒక పనిని $45\frac{1}{2}$ రోజులలో ముగించినచో,

ఆ పనినే, 70 మంది మగవాళ్లు, 15 మంది పిల్లలు, 15 మంది ఆడవాళ్లును కలిసి రోజు 1-కి 9 గంటలు పనిచేసి ఎన్నాళ్లలో ముగింతురు? ఒక మగవాడు రోజునకుచేయు పనిలో $\frac{2}{5}$ పిల్లవాడును, $\frac{3}{5}$ ఆడదియు చేయగలరు.

64. 18 క్లాసులును, క్లాసు 1-కి 40 మంది పిల్లలునుగల ఒక స్కూలు యొక్క వసూళ్లు మొత్తము 4,140 రూ. మరి 3 క్లాసులు ఎక్కువ ఉండి, క్లాసు 1-కి 32 మందే ఉండి, జీతములు ఇదివరకుకంటె $\frac{2}{23}$ పెరిగినచో, వసూళ్ల మొత్తము ఎంత?

65. ముగ్గురు పెద్దవాళ్లు, 5 గురు పిల్లలు, ఇద్దరు నౌకర్లుగల ఒక సంసారము వెళ్లబుచ్చుటకు 31 రోజులుగల ఒక నెలకు 155 రూ. అయినచో, 8 మంది పెద్దవాళ్లు, 10 మంది పిల్లలు, 4 గురు నౌకర్లునుగల సంసారమును 28 రోజులుగల ఒక నెల నడపుటకు ఎంత అగును? పెద్దవాని తిండి ఖర్చులో పిల్లవాడి ఖర్చు సగము, నౌకరు ఖర్చు $\frac{3}{4}$.

66. $180' \times 50'$ ఉన్న ఒక హాలులోపెట్టిన కాలక్షేపమునకు వసూలు 2,754 రూ. అయినచో, $160' \times 40'$ ఉన్న హాలులో ఎంత వసూలగును? వచ్చిన జనము రద్దీ ఇదివరకు దానికి $1\frac{1}{2}$ రెట్లున్నది, టికెట్టు చార్జీ ఇదివరకు కంటె $\frac{1}{4}$ పెరిగినది, రెండిటికిని హాలు భర్తీ అయినది.

67. ఒక పుస్తకముయొక్క ఖరీదు పుటలసంఖ్యకు అనులోమముగను, పుటలోని పదముల సంఖ్యకుకూడ అనులోమముగను, అచ్చుఅక్షరముల నమోనాకు విలోమముగను వికృతిచెందును. ఒక పుస్తకములోని పుటలసంఖ్య మరియొకదాని సంఖ్యకు $2\frac{1}{2}$ రెట్లును, మొదటివాని ప్రతి పుటలోను రెండవ దాని పుటలోని పదములలో $\frac{5}{8}$ యు, మొదటివాని అక్షరపు నమోనా రెండవ దాని నమోనాకు $1\frac{1}{8}$ రెట్లును అయినప్పుడు, రెండు పుస్తకములయొక్కయు ఖరీదులను పోల్చుము.

68. 2·5 ఘ. అడుగుల తోలుతిత్తితో రోజునకు 2 గంటలు పనిచేసి ఒక ఏతాము 625 ఘ. అడుగుల నీరు తోడగలిగినచో, 3·25 ఘ. అ. తిత్తితో, రోజునకు $3\frac{1}{2}$ గంటలు పనిచేసి, తోడెడివాని చురుకు ఇదివరకు వాని దానిలో $\frac{3}{4}$ అయినప్పుడు ఎన్ని ఘ. అడుగులు తోడును?

69. ఒక కంట్రాక్టుదారు ఒక భవనము కట్టుటకు 189 మంది తాపీవాళ్లను పెట్టినాడు. రెండు నెలలకు, పనిలో $\frac{2}{5}$ పూర్తికాగా, అతడు 168 మందినే అట్టే పెట్టి, పనికాలమును ఇదివరకుకంటె $\frac{1}{8}$ పెంచినాడు. భవనము ఎప్పటికి అగును?

70. ఒకడు రెండేసిమెట్లు ఎగురగలడు, 2 సెకనులలో 5 ఎగురులు ఎగురగలడు, ఇట్లు మేడమీదికి 6 సెకనులలో వెళ్లగలడు. మూడేసిమెట్ల చొప్పున ఎగురగలిగి 2 సెకనులలోను 3 ఎగురులు ఎగురగలవాడు ఆ మేడ మీదికే ఎంతసేపులో వెళ్లును?

71. ఒక తూర ఒక చెరువును 4 గంటలలో ఖాళీచేయును. ఈ తూర తీయునప్పుడే, దీని ఛేదభూఫలమునకు $1\frac{1}{2}$ రెట్లు గలిగిన మరియొకటి కూడ తెరచినచో, నిండుచెరువు ఎంతసేపులో ఖాళీ అగును?

72. 5″ వ్యాసముగల ఒక గొట్టము ఒక తొట్టిని 8 గంటలలో నింపును. ఈ తొట్టికి $3\frac{1}{2}$ రెట్లుండి, సగము నిండియుండి, గంటకు తన భూఫలములో $\frac{1}{277}$ నీరు కారిపోవుచున్న మరియొక తొట్టిని 8″ వ్యాసముగల ఒక గొట్టము ఎంతలో నింపును? (జలప్రవాహవేగములు రెండిటిలోను సమములు అనుకో.)

73. ఒకడు నడచుటలో 28″ చొప్పుననుండు అంగలు, నిమిషము 1-కి 114 వేయును. అతడు, తన అంగను వెనుకటికంటె $\frac{1}{14}$ పెంచి, నిమిషమునకు వేయు అంగలు వెనుకటి సంఖ్యలో $\frac{1}{19}$ తగ్గించుకొనినచో, 8 మై. 5 ఫ. 110 గ. ఎంతలో నడచును?

74. 28″ పన్నాగల 15 గజముల గుడ్డతో 4 కోట్లు కుట్టవచ్చును. అదే ఆదితో 15 కోట్లు కుట్టుటకు 30″ పన్నా గుడ్డ ఎన్ని గజములు కావలయును? (కత్తిరింపువల్ల వచ్చు తరుగులు అనుపాతములనుకో.)

75. 60 మంది పురుషులు, 18 మంది స్త్రీలును కలిసి, రోజునకు $7\frac{1}{2}$ గంటల చొప్పున చేసి, $8\frac{1}{2}$ రోజులలో ఒక మాటుగొయ్యి త్రవ్వుటకు అచ్చుకొనినారు. సగము త్రవ్విన అనంతరము, నేలయొక్క కర్కశత్వము వెనుకటి దానికి $2\frac{1}{2}$ రెట్లు ఉన్నదని వారు గ్రహించిరి. అందువల్ల పురుషులను 71 అగువరకును స్త్రీలను 27 అగువరకును పెంచి, పనికాలమును $8\frac{1}{2}$ గంటలుగా మార్చినారు. పని ఎప్పటికి అగును? ఒక పురుషుడు స్త్రీకంటె $\frac{1}{8}$ హెచ్చుగా పనిని చేయునని అనుకో.

76. ముట్టడిలోనున్న ఒక కోటలోని 1560 జనులకును తినుబండములు 40 రోజులకు చాలెడివి ఉన్నవి. ఒకొక్కని తిండి ఖర్చు రోజు 1-కి 12 అణాలు. 25 రోజుల తరువాత, ఒక కన్నముద్వారా 750 మంది జనము, తమకు 35 రోజులు వచ్చెడు తినుబండముల తమతో పట్టుకొని లోన పడిరి. వీరిలో ప్రతివానికినికూడ తిండి ఖర్చు అదే. కాని 750 మంది జనులును వచ్చిన రోజుననే, లోనున్నవారిలో $\frac{2}{3}$ మంది శత్రువులతో డీకొని మృతిం

చిరి. తిండి ఖర్చు ఒకొక్కనికి రోజు 1-కి 8 అ. గా మార్చుకొనినచో, ఇప్పుడున్నవారికి తినుబండములు ఎన్నాళ్లు వచ్చును?

77. ఒక సంక్షిప్తవిలేఖరి ఒక ఉపన్యాసకుని మాటలను అరగంట 1-కి 2,520 మాటలుచొప్పున ఎక్కించుకొనగలడు. ఆ ఉపన్యాసకునికి $1\frac{1}{2}$ అంతలు మాటలాడగల మరియొకని మాటలు 7,560 ఎక్కించుకొనుటకు అతనికి ఎంత సేపు పట్టును?

78. పంక్తికి సగటున 13 మాటలుచొప్పున, పుటకు 20 పంక్తులచొప్పున, 25 పుటల గ్రంథమును టైపుకొట్టుటకు ఒకనికి 1 గం. 5 నిమి. పట్టినచో, సగటున పంక్తికి 15 మాటలుచొప్పున, పుటకు 30 పంక్తులచొప్పున, 15 పుటల వృత్తాంతమును అతడు ఎంతసేపులో టైపుచేయును?

79. 12 మంది మనుష్యులు ప్రవాహమునకు ఎదురుగా 6 మైళ్లు 2 గంటలలో రెండు జతల తెడ్లతో వెళ్లగలిగినచో, 18 మంది ఆ పడవలోనే ప్రవాహమునకు ఎదురుగా 15 మైళ్లు 5 జతల తెడ్లతో ఎంతకాలములో వెళ్లగలరు? (పడవ బరువునకును, వేగమునకును విలోమ అనుపాతము అనుకో.)

80. కేంద్రపరాఙ్ముఖములై రోజు 1-కి 6 గంటలు పనిచేయు 2 కొళాయిలు ఒక చెరువును 4 రోజులలో ఖాళీచేసినచో, వాటి పనికి 1·65 రెట్లు పని రోజు 1-కి 8 గంటలచొప్పున చేయు 6 కొళాయిలు, పై చెరువునకు $2\frac{1}{2}$ అంతలు ఉన్న చెరువును ఎంతకాలములో ఖాళీచేయును?

81. ఒక భవనము కట్టుటకు కుదురుకొనిన 126 మనుష్యులు దానిని 30 రోజులలో ముగించుటకు మాట ఇచ్చి, $\frac{1}{3}$ భాగము కట్టుసరికి, ఒక పెను గాలి వచ్చి కట్టినదానిలో $\frac{2}{9}$ ని నేల గూల్చెను. ఆ గాలి 5 రోజులుదాక ఉన్నచో, అప్పటినుండి ఎంతమందిని ఎక్కువగా పెట్టినచో అనుకొన్ననాటికి పనియగును?

82. ఒక వర్తకుడు 12,450 రూ. పెట్టుబడి పెట్టుటవల్ల 2 నెలలలో దాని మీద 3,150 రూ. వచ్చినచో, 27,580 రూ. పెట్టుబడి పెట్టువాడు, 5 నెలలలో, సరకుల ఖరీదులు వెనుకటివాటికి $1\frac{1}{2}$ అంతలు అయినప్పుడు ఎంత లాభము తీయును? (తినుబడి మారలేదు అనుకో.)

83. ఒక చాకలి ఒకరి బట్టలు ఉతుకుటకు పట్టు రోజుల సంఖ్యకు, వాడు తన సాయముకొరకు వేసికొను మనుష్యుల సంఖ్యయు, అతడు ఉతుకుటకు ఒప్పుకొన్న రేటును విలోమ అనుపాతమున నుండును. అతడు 150 బట్టలు, 6 మందిని సాయముగా పెట్టుకొని, నూటికి 5 రూ. చొప్పున 18 రోజులలో

ఉతికినచో, 320 బట్టలు 8 మందిని సాయముగా వేసికొని, నూటికి 6 రూ. చొప్పున ఎన్ని రోజులలో ఉతుకును?

84. ఒక తుపాకీకిని లక్ష్యమునకును ఎడము 600 గజములు. లక్ష్యము దగ్గరనున్న ఒకడు, గుళిక లక్ష్యమును తాకిన తరువాత 0·30 సెకనునకు తుపాకీ పేలుట వినినాడు. తుపాకీ పేలిన ధ్వని వినబడుటకును గుళిక లక్ష్యమును తాకుటకును వ్యవధి ·50 సెకను ఉండవలయునన్న, తుపాకీ లక్ష్యమునకు ఎంత ఎడమున నుండవలయును? ధ్వని వేగము సెకనునకు 1140 అ. అయినచో, గుళిక యొక్క వేగము కట్టుము.

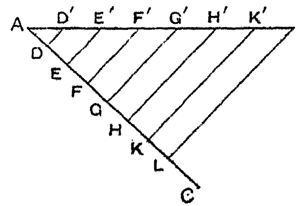
85. ఒక రైలుప్రయాణీకుని "లగ్గేజి" భారము 148 శేర్లు. అతడు మెడ్రాసునుండి బొంబాయికి 2 టికెట్లు కొనినాడు. మెడ్రాసునుండి బొంబాయికి లగ్గేజిరేటు మణుగు 1-కి రూ. 7—12—0 అయి, ప్రతి ప్రయాణీకుడును 15 శేర్లు చార్జిలేకుండ తీసికొనిపోవుటకు వీలుండినప్పుడు, అతనికి లగ్గేజిమీద, అణాకు సరిగ, ఎంత చార్జీ పడును? (1 మణుగు = 40 శేర్లు.)

అధ్యాయము XI.

అనుపాత భాగములు.

49. ఒక నిర్దిష్టసరళరేఖను నిర్దిష్టనిష్పత్తిలో ఖండించుట. (ఉదా. **4 : 3** లో.)

AB అను రేఖను మనము 7 భాగములుచేసి, వాటిలో నాలుగు భాగములు ఒక ఖండముగాను, తక్కిన మూడు భాగములును ఒక ఖండముగాను తీసికొనవలెను. A వద్ద AB తో ఏదో కోణము చేయు AC అను సరళరేఖ గీయుము. విభాగినిలో ఏదో ఎడముపుచ్చుకొని AC వెంట AD, DE, EF, FG, GH, HK, KL అను సమభాగములు గుర్తింపుము. LB కలుపుము. D, E, F, G, H, K లనుండి LB కి సమానాంతరములు AB ని D′, E′, F′, G′, H′, K′ లవద్ద ఖండించునట్లు గీయుము. అప్పుడు

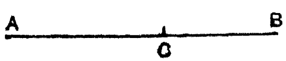


పటము 47.

AB 7 సమభాగములు అగును. అది G′ వద్ద 4 : 3 అను నిష్పత్తిలో ఖండిత మగును. అట్టి బిందువు ఒకటే ఉండును. $\frac{AG'}{G'B}=\frac{4}{3}$, $\frac{AG'}{AB}=\frac{4}{7}$, $\frac{G'B}{AB}=\frac{3}{7}$. AG′, G′B లను "అంతర ఖండములు" అందురు.

50. అట్లే, ఒక సరళరేఖను మూడు ఖండములుగా (ఉదా. 4 : 3 : 2 లో) ఖండింపవచ్చును. పై మాదిరిలోవలె ఇచ్చిన సరళరేఖనంతను 4 + 3 + 2 అనగా 9 సమభాగములుగా చేయవలెను. అప్పుడు రేఖపై 4 : 3 : 2. అను నిష్పత్తివచ్చునట్లు రెండు బిందువులను తీసికొనినచో, మొత్తము రేఖలో $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{2}{9}$ క్రమమున, ఖండములు అగును. మొత్తము రేఖ 900 అని సూచించినచో, ఖండములు, క్రమమున, 400, 300, 200 సూచించును.

51. 2·4 అంగుళములున్న AB అను రేఖను 4 : 3 అను నిష్పత్తిలో ఖండించునప్పటి ఖండములను లెక్కకట్టుట.



పటము 48.

AC : CB : : 4 : 3 అగునట్లు AB లో C అనునది ఒక బిందువు అనుకో. AC, 4 అయినచో, BC, 3. ∴ AB 4+3 అనగా 7 అయి తీరును.

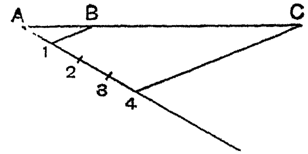
$$\therefore AC=\frac{4}{3+4} \text{ అనగా } \tfrac{4}{7} AB=\frac{4\times 2\cdot4}{7} \text{ అం.} =\frac{9\cdot6}{7} \text{ అం.} =1\cdot37''.$$

$$BC=\frac{3}{3+4} \text{ అనగా } \tfrac{3}{7} AB=\frac{3\times 2\cdot4}{7} \text{ అం.} =\frac{7\cdot2}{7} \text{ అం.} =1\cdot03''.$$

సర్వసామాన్యముగ AB అనునది a అంగుళముల పొడుగుండి, అది $m:n$ అను నిష్పత్తిలో ఖండితమైనచో, రెండు ఖండములలోను ఒకటి $\frac{m}{m+n}$ a అం., రెండవది $\frac{n}{m+n}$ a అంగుళములు.

52. AB అను ఒక సరళరేఖను బాహ్యమున ఖండించుట. ఉదా. 4 : 3 అను నిష్పత్తిలో.

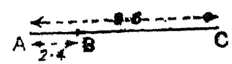
A వద్ద ఏదో సరళరేఖ గీయుము. దానివెంట A 1, 12, 23, 34 అను ఏవో సమప్రమాణములను గుర్తింపుము. 1 B కలుపుము. 4 నుండి, 1 B కి సమాంతరముగ నుండి, AB పెంపకమును C వద్ద ఖండించెడి 4 C ని గీయుము. అప్పుడు AC నాలుగు సమభాగములు కాగా, వాటిలో AB ఒకటి. కాబట్టి BC అట్టి 3 భాగములకు సమము.



పటము 49.

అందువల్ల, AC : CB : : 4 : 3. AC, CB లను "బాహ్యఖండములు" అందురు. AB అనునది ఆ ఖండముల తేడా అయి యుండును.

లెక్కకట్టు రీతిగ. AB పెంపకములో AC : CB : : 4 : 3 అగునట్లు, C అనునది ఒక బిందువు అనుకో. AC 4 భాగములు అయిన, BC లో 3 ఉండును, AB 1 అగును.



పటము 50.

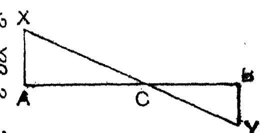
∴ AB 1 అయిన, AC 4, BC 3.

∴ ....2·4..............................

4×2·4, BC 3×2·4 అనగా; AC 9·6, BC 7·2.

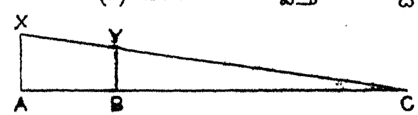
53. అంతరఖండన, బాహ్యఖండనలకు ఈ క్రింది పద్ధతులు వ్యాద్యములు:—

(*a*) 4 : 3 అను నిష్పత్తిలో C వద్ద అంతరఖండన గావలసిన రేఖ AB అనుకో. AB కి లంబముగ A వద్ద AX అను రేఖ 4 ఏకములును (ఉదా. 4 మి.మీ.) B వద్ద AB కి అవతలవైపున BY అనురేఖ 3 ఏకములును (ఉదా. 3 మి.మీ.) ఉండునట్లు గీయుము. AB ని C వద్ద ఖండించు XY కలుపుము. అప్పుడు AC : CB : : 4 : 3.



పటము 51.

(*b*) 4 : 3 అను నిష్పత్తిలో C వద్ద బాహ్యఖండన గావలసినరేఖ AB అనుకో. పైనలెనే AX, BY లను 4 మి.మీ., 3 మి.మీ. చొప్పున AB కి లంబముగ, AB కి ఒకేవైపున గీయుము. XY కలుపుము. AB పెంపకమును C వద్ద ఖండించునట్లు XY పెంచుము.

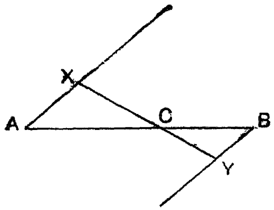


పటము 52.

అప్పుడు $\frac{AC}{CB}=\frac{4}{3}$.

54. ఈ క్రింది పద్ధతులుకూడ హృద్యములే:—

(*a*) 4 : 3 అను నిష్పత్తిలో ఖండనగావలసిన రేఖ AB అనుకొ

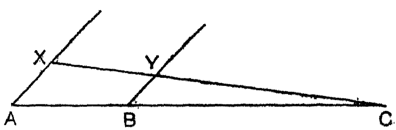


పటము 53.

A వద్ద, AB తో ఏదో కోణముచేయు AX అను రేఖ 4 మి.మీ. పొడుగున గీయుము. B నుండి AX కు సమానాంతరముగ, BY అను రేఖ 3 మి.మీ. పొడుగున AB యొక్క అవతల వైపున గీయుము. AB ని C వద్ద ఖండించు XY కలుపుము.

అప్పుడు $\frac{AC}{CB}=\frac{4}{3}$.

(*b*) 4 : 3 అను నిష్పత్తితో బాహ్యఖండన గావలసినరేఖ AB అనుకో. A వద్ద, AX అను రేఖ 4 మి.మీ. పొడుగున గీయుము. B నుండి AX కు సమానాంతరముగ, BY అను రేఖ 3 మి.మీ. పొడుగున AB యొక్క అదేవైపున గీయుము. XY కలిపి, AB పెంపకమును C వద్ద ఖండించునట్లు దానిని పెంచుము.



పటము 54.

అప్పుడు $\frac{AC}{CB}=\frac{4}{3}$.

మాదిరి (1) ఒక సంచీలో కొన్ని రూపాయ కాసులును, వాటికి రెట్టింపు అణాబిళ్లలును, నాలుగురెట్లు పైసలును, మొత్తపు విలువ రూ. 34—6—0 గలవి ఉన్నవి. ఒకొక్క రకపు నాణెములు ఎన్నెన్ని?

న్యాసము. సంచీలో 1 రూపాయ ఉన్నచో, 2 అణాలును, 4 పైసలును ఉండును. అప్పుడు సంచీలోని సొమ్ము విలువ రూ. 1—2—4 లేక $18\frac{1}{3}$ అణాలు.

సంచీలోని సొమ్ము విలువ $18\frac{1}{3}$ అ. అయినప్పుడు దానిలో ఉన్నది 1 రూ., 2 అ., 4 పై.

∴ ,, ,, 1 ,, ,, $1\times\frac{3}{55}$ రూ., $2\times\frac{3}{55}$ అ., $4\times\frac{3}{55}$ పై.

∴ ,, ,, రూ. 34—6—0 లేక 550 అ.

$550\times1\times\frac{3}{55}$ రూ. కాసులు.

$550\times2\times\frac{3}{55}$ అ. బిళ్లలు.

$550\times4\times\frac{3}{55}$ పై.

అనగా, 30 రూ. కాసులు,

60 అ. బిళ్లలు,

120 పైసలు.

మాదిరి (2) సమాన ఘనఫలముగల 3 గిన్నెలున్నవి. మొదటిది $\frac{1}{8}$ భాగమును, రెండవది $\frac{1}{4}$ భాగమును, మూడవది $\frac{1}{2}$ భాగమును సారాతో నున్నవి. అప్పుడు మొదటిదానిని నీరుపోసి నింపి, ఆ మిశ్రణముచే రెండవదానిని నింపి ఆ మిశ్రణముచే మూడవదానిని నింపుట జరిగినది. మూడవదానిలో, ఇప్పుడు సారాయు నీరును ఏ అనుపాతములో నున్నవి?

న్యాసము. ఒకొక్క గిన్నె ఘనఫలము 1 గాలను అనుకో.

మొదటిది నీటిచే నింపబడినపుడు, అందు $\frac{1}{8}$ గాలను సారా, $\frac{7}{8}$ గా. నీరు.

రెండదానిలో $\frac{1}{4}$ గా. సారా ఉన్నది. $\frac{3}{4}$ గా. మొదటిదానిలోనుండి పోయబడినది. ఈ $\frac{3}{4}$ గా. మిశ్రణములో $\frac{3}{4}\times\frac{1}{8}$ గా. సారాయు, $\frac{3}{4}\times\frac{7}{8}$ గా. నీరును ఉండును. అనగా, $\frac{3}{32}$ గా. సారాయు, $\frac{21}{32}$ గా. నీరును. ∴ నిండిన పిదప రెండవదానిలో $\frac{1}{4}$ గా. సారా + $\frac{3}{32}$ గా. సారా + $\frac{21}{32}$ గా. నీరును ఉండును. అనగా, $\frac{11}{32}$ గా. సారాయు $\frac{21}{32}$ గా. నీరును.

మూడవదానిలో $\frac{1}{2}$ గా. సారా ఉన్నది. ఆ గిన్నెను రెండవగిన్నె మిశ్రణముచే నింపుట అయినది. అనగా, రెండవ గిన్నెలోనిది $\frac{1}{2}$ గా. పోయుట అయినది. రెండవదానిలోనుండి మూడవదానిలో పడిన ఈ $\frac{1}{2}$ గా. మిశ్రణములో $\frac{1}{2}\times\frac{11}{32}$ గా. సారాయు, $\frac{1}{2}\times\frac{21}{32}$ నీరును ఉండును. అనగా, $\frac{11}{64}$ గా.

సారాయు, $\frac{21}{64}$ గా. నీరును ఉండును. ∴ నిండినపిదప మూడవదానిలో, $\frac{1}{2}$ గా. సారా + $\frac{11}{64}$ గా. సారా+ $\frac{21}{64}$ గా. నీరును ఉండును. అనగా, $\frac{43}{64}$ గా. సారాయు $\frac{21}{64}$ గా. నీరును ఉండును.

∴ సారాకును నీటికిని అనుపాతము 3-వ దానిలో $\frac{43}{64} : \frac{21}{64}$ అనగా, **43 : 21.**

మాదిరి (3) A అనునతడు 4,000 రూ. పెట్టుబడితో ఒక వ్యాపారము ప్రారంభించి, 4 నెలల అనంతరము, 300 రూ. పెట్టుబడితో వచ్చిన B ని భాగస్వామిగా తీసికొనెను. మరి రెండు నెలల అనంతరము వీరు **5,000** రూ. మూలధనముతో వచ్చిన C ని భాగస్వామిగా తీసికొనిరి. సాలాఖరున మొత్తము లాభము 6,700 రూ. తేలెను. అది ఎట్లు పంచవలయును?

న్యాసము. A పెట్టినసొమ్ము సంవత్సరమంతయు వ్యాపారములో నుండెను, అనగా 12 నెలలు.; B పెట్టినది 8 నెలలు ఉండెను. (4 నెలల అనంతరము చేరుటవలన); C పెట్టినది 6 నెలలుండెను (అతడు B తరువాత 2 నెలలకు చేరుటవలన).

వ్యాపారములో A 4,000 రూ. 12 నెలలు ఉంచుట యనగా 4,000 రూ. ×12 లేక 48,000 రూ. 1 నెల ఉంచుటకు తుల్యము.

అట్లే, B 300 రూ. 8 నెలలు ఉంచుట=300 రూ. × 8 లేక 2,400 రూ. 1 నెల ఉంచుట.

అట్లే, C 5,000 రూ. 6 నెలలు ఉంచుట=5,000 రూ. × 6 లేక 30,000 రూ. 1 నెల ఉంచుట.

∴ A యొక్క ధనము : Bది : Cది : : 48,000 : 2,400 : 30,000.
: : 480 : 24 : 300.
: : 40 : 2 : 25.

∴ A యొక్క వంతు లాభము : Bది : Cది : : 40 : 2 : 25.

∴ A యొక్క వంతు లాభము $=\frac{40}{40+2+25}$ లో 6700 రూ.

$=\frac{40}{67}$ రూ. $\times 6700=$ 4000 రూ.

B యొక్క వంతు లాభము $=\frac{2}{67}\times 6700$ రూ. = 200 రూ.

C యొక్క వంతు లాభము $=\frac{25}{67}\times 6700$ రూ. = 2500 రూ.

మాదిరి (4) ఒక పంచభుజముయొక్క 5 కోణములును 2 : 3 : 6 : 5 : 4 అను నిష్పత్తిలోనున్నవి. ఈ పంచభుజముయొక్క ప్రతి కోణముయొక్కయు విలువ కట్టుము.

∴ కోణపు విలువల మొత్తము $=10-4=6$ సమకోణములు $=6\times 90 =540^\circ$.

∴ మొదటి కోణము $=\frac{2}{2+3+6+5+4}$ లో $540^\circ=\frac{2}{20}\times 540^\circ=54^\circ$.

రెండవ కోణము $=\frac{3}{20}\times 540^\circ=81^\circ$.

మూడవ కోణము $=\frac{6}{20}\times 540^\circ=162^\circ$.

నాల్గవ కోణము $=\frac{5}{20}\times 540^\circ=135^\circ$.

అయిదవ కోణము $=\frac{4}{20}\times 540^\circ=108^\circ$.

అభ్యాసము 11.

1. A, B, C లు ఒకానొక వ్యాపారములో 5,000 రూ. ను, 6,000 రూ. ను, 7,500 రూ. ను పెట్టుదురు. వ్యాపారమువల్ల లాభము 3,441 రూ. వచ్చినచో, ఒకొక్కనికి వంతు లాభము ఎంతెంత వచ్చును?

2. 8·75″ పొడుగున AB అను రేఖ గీయుము. దానిని 1 : 2 : 3 అను నిష్పత్తిలో రేఖాగణితమూలమున భాగము చేయుము. లెక్కకట్టి సరి చూపుము.

3. A, B, C అను ముగ్గురికి R రూపాయల మొత్తమును, వాటాల నిష్పత్తి $a : b : c$ అగునట్లు పంచుము. $R=750$, $a=4$, $b=3$, $c=5$ అగునప్పుడు, ఆ ఫలితముల విలువలు కట్టుము.

4. త్రిభుజమగు ఒక దొడ్డియొక్క భుజముల నిష్పత్తి 4 : 5 : 7. దాని చుట్టుకొలత 132 గజములు. భుజములు కట్టుము. ఫలితములు అడుగులలో చెప్పుము.

5. ఒక చతుర్భుజముయొక్క భుజముల నిష్పత్తి 3 : 4 : 5 : 2. దాని చుట్టుకొలత 196 గజములగుచో, భుజములను కట్టుము.

6. నవరసులో 11 పాళ్లు నిఖారసు బంగారము, 1 పాలు రాగి. 750 నవరసులలోని నిఖారసు బంగారము ఎన్ని నవరసుల ఎత్తు?

7. ఒక త్రిభుజము తొలూకు 3 కోణములయొక్కయు విలువల నిష్పత్తి 3 : 5 : 1. ఒకొక్క కోణము ఎన్నెన్ని డిగ్రీలు?

8. 9·6 సెం.మీ. చుట్టుకొలతయు, భుజముల నిష్పత్తి 5 : 3 : 2 నుగల త్రిభుజమును రచింపుము.

9. చుట్టుకొలత 18 సెం.మీటర్లును, భుజముల నిష్పత్తి 5 : 4 నుగల ఒక ఆయతమును రచింపుము. కర్ణముయొక్క పొడుగు కొలువుము.

10. 5 సెం.మీ. పొడుగుగల AB ని AC : BC :: 5 : 4 అగునట్లు C వద్దకు పెంచుము. (ఈ రేఖ ఒక నిర్దిష్టనిష్పత్తిలో బాహ్యముగ ఖండితమైనది అని అందురు.)

11. ఒక మునిసిపాలిటీలోనున్న మూడు భాగములలోను జనసంఖ్య, క్రమమున 2,000, 3,500, 4,000. 13,300 రూ. పెట్టి ఒక ఆసుపత్రి కట్టవలెను. ఆ ఖర్చు ఆ మూడు భాగములును వాటి జనసంఖ్యల నిష్పత్తిలో భరింపవలెనన్న, ఒకొక్క భాగము ఎంతెంత వేసికొనవలెను?

12. ఇండియాలోని రైల్వేలను ఇట్లు విభజింపవచ్చును: — (1) దొరతనమువి, (2) కంపెనీలవి, (3) జిల్లా బోర్డులవి, (4) స్వదేశరాష్ట్రములవి. వీటి పొడుగుల మొత్తము 36,300 మైళ్లు. పై క్రమమున వాట్ల నిష్పత్తి 50 : 10 : 1 : 8. దొరతనపు రైల్వే పొడుగు కట్టుము.

13. 5,280 గజములు పొడుగున్న PQ అను రోడ్డుయొక్క చివరలగు P, Q లనుండి A, B లు బయలుదేరి ప్రతిముఖ దిశలలో, క్రమమున సెకను 1-కి 44 అ., 22 అ. చొప్పున నడచి M వద్ద ఎదురుపడుదురు. PM : QM అను నిష్పత్తి కట్టుము. PM : PQ, QM : PQ అను నిష్పత్తులుకూడ కట్టుము. PM, QM అను అసలు దూరములను కట్టుము.

14. పందెములకొరకు ఏర్పాటైన ఒక మార్గమున మూడు అడ్డుకట్టలుండుటవలన అది నాలుగు రంగములైనది. ఆ నాలుగింటి పొడుగులకును నిష్పత్తి $a:b:c:d$. మార్గముయొక్క మొత్తపు పొడుగు x మైళ్లు. ప్రతి రంగముయొక్క పొడుగును కట్టుము. $a=3$, $b=2$, $c=4$, $d=1$, $x=1$ అయినప్పుడు, ఆదినుండి ప్రతి కట్టకును ఎడము కట్టుము.

15. ఒక దినపత్రికయొక్క ఆదాయమునకు ఆధారములు మూడు:— (1) చందాలు, (2) ప్రకటనలు, (3) దానిని పోషించెడి రాజకీయపక్షముయొక్క విరాళములు. వీటి నిష్పత్తి $a:b:c$. సంవత్సరాదాయము R. రూ., సాలుచందా 24 రూ. అయినచో, చందాదారుల సంఖ్య ఎంత? R=

2,00,000 ను, $a=6$, $b=1$, $c=3$ అయినప్పుడు నీ ఫలితమునకు విలువ కట్టుము.

16. ఒకడు బీదలకు కొంత ధనము దానముచేసినపిదప తనవద్ద సమాన సంఖ్యల పావలాలు, బేడలు, అణాలు, ఉన్నట్లు గ్రహించెను. అతనిదగ్గర నిలువ రూ. 4—13—0 అయినచో, ఒకేరకపు సొమ్ము అతనివద్ద ఎంతెంత ఉన్నది?

17. ఒక వ్యాపారము నిమిత్తము B పెట్టినదానికంటె $\frac{1}{5}$ A ఎక్కువ పెట్టెను, A పెట్టినదానికంటె $\frac{2}{3}$ C ఎక్కువ పెట్టెను. వ్యాపారము చితికిపోయి 1,764 రూ. దండుగవచ్చినచో, ఒకొక్కనివంతు నష్టము ఎంత?

18. ఒక ఈనాందారు తన "విల్లు"లో, ఒకొక్క కొడుకు వాటాలో, $\frac{1}{3}$ కూతురు వాటాకావలెననియు, $\frac{2}{3}$ తల్లి వాటాకావలెననియు వ్రాసినాడు. అతడు గతించినపిదప, అతనిభార్య, ముగ్గురు కూతుళ్లు, నలుగురు కొడుకులును ఉండిరి. ఈనాంయొక్క విలువ 68,000 రూ. అయినచో, ఒకొక్కరికి ఎంతెంత వచ్చును?

19. ఒక పిల్లవానివద్ద కొన్ని గోలీలు ఉన్నవి. అతని దగ్గరకంటె, అతని అన్నవద్ద రెండురెట్లు ఎక్కువయు, అతని తమ్మునివద్ద సగము ఎక్కువయు ఉన్నవి. ముగ్గురి దగ్గరను కలిపి 66 ఉన్నచో, ఒకొక్కని దగ్గర ఎన్ని ఉన్నవి?

20. మనుష్యుని సంపాదనలో, బాలునిది సగము, స్త్రీది $\frac{2}{3}$. 4 గురు మనుష్యులకును, 6 గురు స్త్రీలకును, 8 మంది బాలురకును కలిపి వారపు కూలి రూ. 49—8—0 అయినచో, ఒకొక్కరి రోజు కూలి కట్టుము. [వారమునకు పని రోజులు $5\frac{1}{2}$.]

21. ఒక గొప్పవాడు, సకుటుంబస పరివారముగ ప్రయాణము బయలుదేరి సమానసంఖ్యల సెకండుక్లాసు, ఇంటర్ మీడియేటు, థర్డుక్లాసు, టికెట్లు రూ. 46—1—0 ఇచ్చి కొనెను. థర్డుక్లాసు చార్జీకి సెకండుక్లాసుది 3 రెట్లు, ఇంటరు చార్జీ $1\frac{1}{2}$ రెట్లును అయినచో, ఏ క్లాసు టికెట్లకు అతడు ఎంత ఖర్చుపెట్టెను?

22. సోడియ కర్బనితములోని పాళ్లు, 2 పరమాణువులు సోడియము, 1 పరమాణువు కర్బనము, మరి 3 పరమాణువులు అమ్లజని. సోడియము, కర్బనము, అమ్లజనుల పరమాణువుల నిష్పత్తి 23 : 12 : 16 అయినచో, 16 పౌ. 9 ఔ. సోడియ కర్బనితములో ఒకొక్కదాని భారము కట్టుము.

23. సోడియ పర్యమ్లజనిదములోని పాళ్లు, 2 పరమాణువులు సోడియము, 2 పరమాణువులు అమ్లజని. 55·9 గ్రాముల పర్యమ్లజనిదములోని సోడియము అమ్లజనులు ఎంతెంత ఎత్తు? (12-వ ప్రశ్న చూడుము.)

24. మైలతుత్తములో, 159·5 పాళ్లు తామ్రగంధకితమును, 90 పాళ్లు నీరును. దానిని 230° వరకు కాచునపుడు అది ఆ నీటిని బాయును. 183·75 గ్రాముల మైలతుత్తమును ఆ ఉష్ణక్రమమునకు గాచినపిదప, దాని భారము కట్టుము.

25. ముగ్గురు గొప్పవాళ్లు సకుటుంబముగ ప్రయాణము వెడలిరి. మొదటి వాని కుటుంబము, తనతోసహా, ముగ్గురు. రెండవవానిది నలుగురు, మూడవ వానిది అయిదుగురు. వెళ్లునప్పటి ఖర్చుల మొత్తము 240 రూ. మొదటివాడును, వచ్చునప్పటి ఖర్చుల మొత్తము 180 రూ. రెండవవాడును పెట్టినారు. మూడవవాడు తక్కినవారిలో ఒకొక్కనికి ఏమి ఇచ్చినచో వ్యాపారము ఎత్తిపోవును? (ఖర్చులు మందికి అనుపాతము.)

26. ఒక కమాను వెళ్లునప్పటి ఖర్చులు మూడు భాగములు చేయవచ్చును: (1) రైలు చార్జీ, (2) సామాను చార్జీ, మోత చార్జీ, (3) తిండి చార్జీ, ఒక కమానులో వీటి నిష్పత్తి 6 : 3 : 15. కమాను వెళ్లినది 40 మంది విద్యార్థులును, అక్కడనుండి కమాను వెళ్లెడిచోటికి ఒక టికెట్టు రైలు చార్జీ 2 రూ. ను, అయినప్పుడు వారు తమతో ఎంతసొమ్ము పట్టుకొని బయలుదేరినచో ఖర్చులు ఎత్తిపోవును?

27. సంపత్తు, చెల్లారాం అనువారికి, క్రమమున పట్టుసరకులయొక్క 500 బేళ్లును, 340 బేళ్లునుగల రెండు లాటులు ఉన్నవి. నిలువను ముగ్గురును పరిసమానముగా పంచుకొనుటకు ఒప్పందమై వారు, తమ ఇద్దరి నిమిత్తమును 1,68,000 రూ. పుచ్చుకొని, గయన్‌చంద్ అనువానిని భాగస్వామిగా జేర్చుకొనినారు. సంపత్తు చెల్లారాంలలో ఒకొక్కనికి ఎంత రావలెను?

28. 1915—16 సం॥లో ఇండియా రైళ్లమీద స్థూలాదాయము మొత్తము 43,106,933 పా. ఆ యేడే ప్రయాణీకుల సంఖ్య 464,380,900 సామానుయొక్కయు, జీవరాశియొక్కయు భారపు మొత్తము 82,499,000 టన్నులు, ప్రయాణీకులవల్ల రాబడికిని, సామానువల్ల రాబడికిని నిష్పత్తి 5 : 3 అయినచో. ఒకొక్క ప్రయాణీకుడు సగటున ఎంత ఇచ్చెనో, సామానునకు టన్ను 1-కి సగటు చార్జీ ఎంతో కట్టుము.

29. B కి ఇచ్చినదానిలో, $\frac{1}{2}$ A కిని, $\frac{1}{3}$ C కిని, వచ్చునట్లు 600 రూ. A, B, C లకు పంచుము.

30. B కి ఇచ్చినదానికి $2\frac{1}{2}$ రెట్లు A కిని, A, B లకు ఇచ్చినదానిలో $\frac{3}{4}$ C కిని, వచ్చునట్లు 882 రూ. A, B, C లకు పంచుము.

31. B, C లకు ఇచ్చినదానికి $\frac{4}{3}$ రెట్లు A, B లకును, B, C లకు ఇచ్చినదానిలోనే $\frac{4}{5}$ A, C లకును, వచ్చునట్లు 980 రూ. A, B, C లకు పంచుము.

32. A, B, C రాబడులయొక్క నిష్పత్తి 13 : 12 : 17. B తనవంతులో $\frac{1}{3}$ ను, C 99 రూ. ను A కి ఇచ్చినచో A, B, C ల మొత్తములు సమములగును. మొదట వారికి ఎంతెంత ఉండెను?

33. ముగ్గురు అన్నదమ్ములు తమకు వచ్చిన ఆస్తియగు 11,700 రూ. ను 6 : 5 : 4 అను నిష్పత్తిలో పంచుకొనవలెను. వారిలో రెండవవాడు తన వాటాకు హక్కు వదలుకొని, దానిని, పెద్దవానిలో $\frac{3}{8}$: ఆఖరువాని వాటాలో $\frac{5}{8}$ అను నిష్పత్తిలో తక్కిన ఇద్దరిని (పెద్దవానిని ఆఖరువానిని) పంచుకొనుడు అనినాడు. వారికి ఎంతెంత ఆస్తి ముట్టును?

34. A యొక్కయు, B యొక్కయు, C యొక్కయు రాబడుల నిష్పత్తి 5 : 3 : 6. ఒకొక్కని రాబడిలో 50 రూ. తీసివేసినచో అప్పుడు A యొక్క రాబడి : B యొక్క రాబడి : : 30 : 17. A, B, C ల రాబడులు కట్టుము.

35. ఒకానొక వ్యాపారములో నలుగురు లాభములు తీసినారు. 1-వ 2-వ వారల లాభముల నిష్పత్తి 4 : 5, 2-వ 3-వ వారల లాభముల నిష్పత్తి 8 : 9, 3-వ 4-వ వారల లాభముల నిష్పత్తి 12 : 13. నలుగురకును కలిపి లాభము 3,536 రూ. అయినచో, ఒకొక్కనిది ఎంత?

36. 98 అ. వ్యాసార్థముగల ఒక వృత్తపు పరిధిలో అయిదుచెట్లు పాతి ఉన్నవి. 1-వ 2-వ వాటి మధ్య ఎడమునకును, 2-వ 3-వ వాటి మధ్య ఎడమునకును, అట్లే క్రమముగ నిష్పత్తులు 3 : 4; 2 : 3; 3 : 4; 4 : $1\frac{1}{2}$. సరసముందు చెట్లయొక్క, పరిధిమీది ఎడములు కట్టుము.

37. గృహనిర్మాణమునకు ముఖ్య పరికరములు—ఇటుక, సున్నము, ఇసుక, కలప, చెక్కిన రాయి, పెంకు. వాట్ల సమాన ఘనప్రమాణములయొక్క ఖరీదులను పై క్రమమున చూచినచో ఆ ఖరీదుల వరుసనిష్పత్తులు 23 : 25; 25 : 1; 1 : 800; 4 : 1; 4 : 1. ఒకానొక గృహము నిర్మించుటకు తెచ్చిన పరికరములను, పై క్రమమున చూడ, వాటి ఘనఫలముల వరుస నిష్పత్తులు 20 : 7; 2 : 1;

7 : 4; 1 : 1; 2 : 1. కూలిపనులకు మినహా, ఆ గృహమునకు 53,770 రూ. ఖర్చుపడినచో, ఒక్కొక్క పద్దుక్రింద ఎంత అయినది?

38. అయిదు అంతస్థులుగల ఒక మేడమీద వచ్చెడి అద్దె 1,250 రూ. 1-వ 2-వ అంతస్థుల అద్దెలకును, 2-వ 3-వ అంతస్థుల అద్దెలకును, అట్లే క్రమముగను, నిష్పత్తులు 3 : 2, 1 : 2, 16 : 9, 9 : 5. ఒక్కొక్క అంతస్థుమీద ఎంత వచ్చెను?

39. A అనునదియు, B అనునదియు రెండు కల్తీనూనెల రకములు. A అను రకముయొక్క 1 వీసెలో 35 పలములు మంచినూనె, 5 పలములు వేరుసెనగనూనె. B అను రకముయొక్క 1 వీసెలో 36 పలములు మొదటిది, 4 పలములు రెండవది. A అను రకములోని 25 పలములును, B అను రకములోని 15 పలములును కలిపి ఒక మిశ్రణముచేసినచో, దానిలోని మంచినూనె వేరుసెనగనూనెల నిష్పత్తి కట్టుము.

40. ద్రాక్షసారా, నీరుల మిశ్రణములతో రెండు గిన్నెలున్నవి. ఒక దానిలోని ద్రాక్షసారా నీటికి రెట్టింపు, రెండవదానిలోని ద్రాక్షసారాకు మూడురెట్లు నీరు. మొదటిదానిలోనివి 9 గాలనులును రెండవదానిలోనివి 6 ను తీసి 3-వ గిన్నెలో పోయడమైనది. 3-వ దానిలోని ద్రాక్షసారా నీరుల నిష్పత్తి కట్టుము.

41. 20 గాలనుల సారాతో నిండి ఉన్న ఒక గిన్నెలోనివి 2 గాలనులు తీసివేసి అందుకు బదులు నీరు పోయడమైనది. ఇట్లే మరియొకసారి చేసిన పిదప, గిన్నెలో మిగులు సారా ఎంత!

42. ఒక రజతతామ్రసమ్మేళనములో భారవిషయమున రజతతామ్రముల నిష్పత్తి 98 : 2. మరియొక సమ్మేళనములో 95 : 5. ఈ రెండు సమ్మేళనములను 5 : 3 అను నిష్పత్తిలో కలిపి కరిగినారు. ఫలితమిశ్రణములోని రజతతామ్రముల నిష్పత్తి కట్టుము.

43. A, B లను, ఇద్దరు భాగస్వాములు 5 : 3 అను నిష్పత్తిగల పెట్టుబడులతో ఒక వ్యాపారము పెట్టినారు. తాను నిర్వాహక భాగస్వామిగానుండుటకు A ఒప్పుకొనినందున అతనికి లాభములో $\frac{1}{8}$ ఇచ్చుటకును, తక్కిన లాభమును ఇద్దరును పెట్టుబడుల నిష్పత్తిలో పంచుకొనుటకును B సమ్మతించెను. ఒక నెలలో వారికి వచ్చిన లాభము రూ. 565—10—0 అయినచో, ఒక్కొక్కనికి ఎంత వచ్చును?

44. ఒక జాయింటు వ్యాపారములో A, B, C లు భాగస్వాములు. వారు క్రమమున 5,000 రూ. ను, 4,000 రూ. ను, 3,000 రూ. ను సాలు ఆదిని పెట్టుబడులు పెట్టిరి. A 6 నెలల అనంతరము 1,000 రూ. ను, B 4 నెలల అనంతరము 2,000 రూ. ను వెనక్కు పుచ్చుకొనిరిగాని C 9 నెలల అనంతరము మరి 3,000 రూ. మదుపుపెట్టెను. సాలాఖరున మొత్తము లాభము 5,240 రూ. ఒక్కొక్కనికి ఎంత వచ్చును? (800 రూ. మూలధనమును 6 నెలలు వాడుకొనుట = 800 × 6 అనగా 4,800 రూ. 1 నెల వాడుకొనుట అని గమనింపుము. ఏ పెట్టుబడి ఎంతకాలమున్నను సరె, దానిని తత్తుల్యమగు 1 నెల పెట్టుబడిగా, పై రీతిని మార్చుము.)

45. ఇద్దరు మనుష్యులు కొన్ని బీడులను 10 నెలల కాలము 2,430 రూ. అద్దెకు మాట్లాడుకొనినారు. ఆ బీడులలో ఒకడు 27 ఎడ్లను 3 నెలల పాటును, రెండవవాడు 270 గొఱ్ఱెలను 7 నెలలపాటును మేపుకొనినారు. 3 ఎడ్లయొక్క మేత 11 గొఱ్ఱెలమేతతో తుల్యమగుచో, ఎవడు ఎంత అద్దె ఇచ్చుకొనవలెను?

46. 520 రూ. అద్దెకు A, B లు ఒక పచ్చికబయలు పుచ్చుకొనిరి. A 40 ఆవులను 3 నెలల పాటును, B 70 ఆవులను 2 నెలల పాటును తోలుకొనినారు. ఎవడెంత ఇచ్చుకొనవలెను?

47. ఒక వర్తకుడు తాను వర్తకముపెట్టిన 3, 5, 6 నెలల అనంతరమునను వరుసగా ముగ్గురు భాగస్వాములను తీసికొనెను. వారు చెల్లించిన మదుపులు, క్రమముగ, 400 రూ., 450 రూ., 495 రూ. మరి ఆరు నెలల అనంతరము మొత్తము లాభము 1,518 రూ. కనబడెను. రేటువారీగా దీనిని పంపకము చేయుము.

భాగస్వామ్యముమీద ఇంకను ప్రశ్నలు కావలెనన్న రకరకాల ప్రశ్నలు చూడు.

48. 40 మంది పురుషులును, 35 మంది స్త్రీలును, 20 మంది బాలురును కలిసి ఒకపనిని 8 వారములలో ముగించినచో, 35 మంది పురుషులును, 25 మంది స్త్రీలును, 15 మంది బాలురును ఆ పనినే ఎన్నిరోజులలో చేయుదురు? (పురుషస్త్రీ బాలుర క్రియాసామర్థ్యముల నిష్పత్తి 5 : 3 : 2 అనియు, ఒక్క వారములోను పనిరోజులు $5\frac{1}{2}$ అనియు అనుకో.)

49. ఒక వెండిపళ్లెము ఖరీదు రూ. 77—8—0. దాని ఆదిలో $\frac{3}{4}$ ఆదిగల ఒక బంగారుపళ్లెము వెల కట్టుము. సమాన ఘనఫలముల స్వర్ణరజతముల భార

ములయొక్క నిష్పత్తి 19 : 10 అనియు, వరహా ఎత్తు బంగారమును రూ. 7—0—0 ఖరీదు అనియు, అదే ఎత్తు వెండి 10 అ. ఖరీదు అనియు, అనుకో.

50. ఒక గ్రామములోనున్న హిందూ మహమ్మదీయులయొక్క జనసంఖ్యల నిష్పత్తి 9 : 5. హిందువులలో, బ్రాహ్మణా బ్రాహ్మణులయొక్క సంఖ్యల నిష్పత్తి 2 : 7. బ్రాహ్మణులలో పురుషస్త్రీలయొక్క సంఖ్యల నిష్పత్తి 4 : 5. ఆ స్త్రీలలో విధవ సధవలయొక్క సంఖ్యల నిష్పత్తి 8 : 13. విధవల సంఖ్య 240 అయినచో, గ్రామముయొక్క జనాభా కట్టుము.

51. ఒక గొప్పవాడు సాలుకి నూటికి 12 చొప్పున వడ్డీకితెచ్చిన 3,500 రూ. పెట్టి ఒక మోటారుకారు కొనెను. నెల 1-కి ఈ క్రింది ఖర్చులు అతనికి అగును:—మోటారు "షెడ్డు"కి అద్దె 35 రూ., "క్లీనరు" జీతము 15 రూ., "డ్రైవరు" జీతము 40 రూ., 10 రూ. మామూలు మరమ్మతులకు, కారు పన్ను 12 రూ., డబ్బా 1-కి రూ. 3—12—0 చొప్పున 20 డబ్బాల "పెట్రోలు." అవతల వడ్డీకిని, ఇవతల కారుమీద పెట్టెడి యావత్తు ఖర్చునకును నిష్పత్తి కట్టుము.

52. ఒక స్త్రీ, పడి 1-కి 5 అ. చొప్పున ప్రతిరోజును 10 పడుల పాలు కొనును. ఆమె వాటిలో $\frac{1}{4}$ ఇగిరిపోవువరకును వాటిని కాచి, తోడుపోసి పెరుగుచేసి వెన్నతీయును. కాగినపాలు పడి 1-కి $\frac{1}{2}$ ఆళాకు వెన్నను 5 ఆళాకుల పెరుగును ఇచ్చును. ఆమె 7 రోజులపాటు వెన్నకూడ బెట్టి, కాచి నెయ్యిచేయును. వెన్న, పడి 1-కి 5 ఆళాకులనెయ్యి అగును. నెయ్యి పడి 1-కి రూ. 4—12—0 ను, పెరుగు పడి 1-కి 8 అణాలును అమ్మకము. ఒక వారములో ఆమెయొక్క లాభమును కట్టుము.

అధ్యాయము XII.

సామ్యములు లేక సమీకరణములు.

55. $2x+1=2(x+1)-1$. ఈ సంబంధము $x=1$ అయినప్పుడును, $x=2$ లేక 10 లేక ఏదో సంఖ్య అయినప్పుడును కూడ సరిపడును. $x=1$ అయినప్పుడు, $2x+1$ అనగా $2\times1+1=3$, $2(x+1)-1$ అనగా $2(1+1)-1=4-1=3$. ఈ రీతిగ ఉభయపక్షములును సమములు. అట్లే, $x=2$ అయినప్పుడు, $2x+1$ అనగా 5, $2(x+1)-1$ అనగా $2(2+1)-1=2\times3-1=5$. ఇప్పుడు కూడ ఉభయపక్షములును సమములు. ఇట్లే, x యొక్క సకలమైన విలువలకును ఈ ఉభయపక్షములును సమములని నిరూపింపవచ్చును. కాని, $x+2=4$ అను సంబంధమును విచారణచేయుము. ఇది $x=2$ అయినప్పుడే సరిపడును; $x=1$ గాని, 3 గాని, ఏ ఇతర సంఖ్య గాని అగునప్పుడు పక్షములు అసమములగును. $x=1$ అయినప్పుడు, $x+2$ అనగా 3. 3 ను 4 ను సమములు కానేరవు.

$2x+1=2(x+1)-1$ ను "సర్వథాసామ్యము," "తాదాత్మ్యము" అందురు. ఏలయన, దానిలో ఇమిడియున్న అజ్ఞాతరాశియగు x యొక్క ఏ విలువకైనను అది సరిపడును. కాని, $x+2=4$ అను సంబంధమును "సామ్యము" అందురు. ఏలయన అది x యొక్క ప్రత్యేకపు విలువకే సరిపడును. ఈ రెండిటి వివక్షతయు కనబడుటకు, మొదటిదానిని $2x+1\equiv2(x+1)-1$ అని వ్రాయుదురు.

అంకగణిత ప్రశ్నలను చాలమట్టుకు సామ్యములచే సాధింపవచ్చును. కాని, తత్సాధన ప్రారంభింపకపూర్వము ఈ క్రింది పరిభాషయొక్క పరిచయము ఉండవలెను:—

(1) సమములకు సమములు కలిపినచో, మొత్తములు సమములు.

(2) సమములలోనుండి సమములు తీసివేసినచో, శేషములు సమములు.

(3) సమములను సమములచే గుణించినచో, లబ్ధములు సమములు.

(4) సమములను సమములచే భాగించినచో, భాజితములు సమములు.

సందర్భము 1. $x-5=3$.

రెండు పక్షములకును 5 కలుపుము.

$\therefore x-5+5=3+5$ (ఇచ్చట పైవాటిలో నెం. 1 సూత్రము వర్తించినది.)

$\therefore x=3+5$.

$\therefore x=8$.

ఎడమపక్షమున -5 అని ఉండినది, పోయి కుడిపక్షమున $+5$ అయి వెలసినదని గమనింపుము.

సందర్భము 2. $x+8=9$.

రెండుపక్షములనుండియు 8 తీసివేయుము.

∴ $x+8-8=9-8$ (ఇక్కడ పైవాటిలో నెం. 2 సూత్రము వర్తించినది.)

∴ $x=9-8$.

∴ $x=1$.

ఎడమపక్షమున + 8 అని ఉండినది పోయి, కుడిపక్షమున −8 అయి వెలసినదని గమనింపుము. 1, 2 సందర్భములనుబట్టి ఇది గ్రహింపుము:—

"ఒక పదమును దానియొక్క మారు సంజ్ఞతో పక్షాంతరమున వ్రాయవచ్చును."

సందర్భము 3. $5x+3=23$.

∴ $5x=23-3=20$. (3 ను పక్షాంతరమున వ్రాయుము; అది −3 అగును.)

అప్పటి రెండు పక్షములను 5 చే భాగింపుము.

∴ $\frac{5x}{5}=\frac{20}{5}$ (ఇక్కడ పైవాటిలో నెం. 4 వర్తించినది.)

∴ $x=\frac{20}{5}$.

∴ $x=4$.

5 పక్షాంతరమున హారమున వెలసినదని గమనింపుము.

సందర్భము 4. $\frac{x}{6}+2=5$.

∴ $\frac{x}{6}=5-2=3$. (2 ను పక్షాంతరమున వ్రాయుము; అది −2 అగును.)

ఇప్పటి రెండు పక్షములను 6 చే గుణింపుము.

∴ $\frac{x}{6}\times 6=3\times 6$.

∴ $x=3\times 6$.

∴ $x=18$.

6 పక్షాంతరమున లవమున వెలసినదని గమనింపుము.

వీటినిబట్టి ఇది గ్రహింపుము:—**ఒక సామ్యము తాలూకు చేరి యొక పక్షమునను ఒక్కొక్క పదమే ఉండునపుడు, ఒక పక్షమందలి లవహారములలోని గుణకములను పక్షాంతరమున హారలవముల గుణకములుగా వ్రాయవచ్చును.**

56. సామ్యసాధన. ఒక సామ్యములోని రాసులను "జ్ఞాతము" లనియు, "అజ్ఞాతము" లనియు రెండు తరహాలు చేయవచ్చును.

మాదిరి నెం. (1) ఇది సాధింపుము: $3x+6=7(x+1)+5$.

కుండలముల నివారింపగా, $3x+6=7x+7+5$.

అజ్ఞాతరాసులు ఒక పక్షమునను, జ్ఞాతరాసులు తక్కిన పక్షమునను వెలయునట్లు పక్షాంతరములు చేయగా, $3x-7x=7+5-6$.

అనగా, $-4x=6$.

∴ $x=-\frac{6}{4}$ అంటే $-\frac{3}{2}$.

అజ్ఞాతరాశియొక్క ఏ ప్రత్యేకపు విలువను ఒక సామ్యముయొక్క రెండు పక్షములను సరిపడునో ఆ విలువ తేలినపుడు ఆ సామ్యము **"సాధింపబడినది"** అందురు. అటుల తేలిన విలువను సామ్యముయొక్క **"మూలము"** అందురు. రెండు పక్షములును సమములగునో కాదో చూపుటకు, అటుల తేలిన x యొక్క విలువను మనము రెండు పక్షములలోను ఆదేశించునపుడు మనము సామ్యమూలమును **"సరిచూచు"** చున్నాము అందురు. అది ఈ క్రింద నున్నది:—

$3x+6=3\times(-\frac{3}{2})+6=-\frac{9}{2}+6=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ (1).

$7(x+1)+5=7\times(-\frac{3}{2}+1)+5=7\times(-\frac{1}{2})+5=-3\frac{1}{2}+5=1\frac{1}{2}$ (2).

ఈ (1), (2) లనుబట్టి రెండు పక్షములును సమములు. కాబట్టి $-\frac{3}{2}$ అను మూలము సరి.

ప్రశ్నలు. మాదిరి నెం. (2) ఒక సంఖ్య తలచుకో, దానికి 10 కలుపుము, ఆ మొత్తమును 8 పెట్టి గుణించి, లబ్ధమును 32 పెట్టి భాగింపుము. ఫలితము 4. సంఖ్య కట్టుము.

న్యాసము. సంఖ్య x అనుకో.

దానికి 10 కలుపునపుడు, మొత్తము $x+10$. దీనిని 8 చే గుణించునపుడు, లబ్ధము $8(x+10)$. దీనిని 32 చే భాగించునపుడు, భాజితము $\frac{8(x+10)}{32}$. ఈ భాజితము ప్రశ్నప్రకారము 4.

$$\therefore \frac{8(x+10)}{32}=4.$$

ప్రశ్న షరతుల ననుసరించి మనము ఇప్పుడు ఒక సామ్యమును కట్టితిమి.

దానిని ఈ రీతిగ సాధించిన సరి, సంఖ్య తేలును:—

$$\frac{8(x+10)}{32}=4.$$

అనగా, $\frac{x+10}{4}=4$ ($\frac{8}{32}$ ను సూక్ష్మతమమునకు మార్పగా.)

అనగా, $x+10=16$ (రెండు పక్షములను 4 చే గుణింపగా.)

$\therefore x=16-10=6.$

$\therefore$ తలచుకొన్న సంఖ్య 6.

సరిచూపు. $6+10=16;\ 16\times 8=128;\ \frac{128}{32}=4.$

కాబట్టి, ఫలితము సరి.

మాదిరి నెం. (3) ఒక సంఖ్య తాలూకు రెండు అంకెలయొక్కయు మొత్తము 8. ఆ సంఖ్యకు 36 కలిపినచో, దాని అంకెలు తారుమారగును. సంఖ్య కట్టుము.

న్యాసము. ఒకట్ల స్థానములోని అంకె x అనుకో. అప్పుడు, $8-x$ అను అంకె పదుల స్థానములోనిది (రెండింటి మొత్తమును 8 కాబట్టి).

$\therefore$ సంఖ్యయొక్క విలువ$=(8-x)$ పదులు $+x$ ఒకట్లు$=10(8-x)+x$.

దీనికి 36 కలుపునపుడు, మొత్తము$=10(8-x)+x+36$. ఇది, ప్రశ్న ప్రకారము, సంఖ్యయొక్క అంకెలను తారుమారుచేయగా వచ్చెడు సంఖ్య, అనగా, x పదులు $+(8-x)$ ఒకట్లు$=10x+(8-x)$.

$\therefore 10(8-x)+x+36=10x+(8-x).$

$\therefore 80-10x+x+36=10x+8-x.$

$\therefore -10x+x-10x+x=8-36-80.$

$\therefore -18x=-108.$

$\therefore x=\frac{-108}{-18}=6.$

$\therefore$ కోరిన సంఖ్య$=26.$

సరిచూపు. $26+36=62.$

మాదిరి నెం. (4) ఒక రకము "టీ" ఖరీదు పౌను 1-కి 6 అ., రెండవ రకము 10 అ. వీటిని ఏదో నిష్పత్తిలో కలుపగా, ఆ మిశ్రణము పౌను 1-కి 7 అ. ఖరీదు అగును. మిశ్రణముయొక్క నిష్పత్తి కట్టుము.

న్యాసము. 1-వ రకము 1 పౌనును 2-వ రకము x పౌ. కలిపి ఉన్నవి అనుకో.

1-వ రకము 1 పౌను ఖరీదు 6 అ., 2-వ రకము x పౌ. $10x$ అ.

$\therefore (1+x)$ పౌ. మిశ్రణము ఖరీదు $(6+10x)$ అ.

$\therefore$ 1 పౌ. మిశ్రణము ఖరీదు$=\frac{6+10x}{1+x}$ అ.

ప్రశ్నప్రకారము 1 పౌ. మిశ్రణము ఖరీదు$=7$ అ.

$\therefore \frac{6+10x}{1+x}=7.$

$\therefore 6+10x=7(1+x)$ (రెండు పక్షములను $1+x$ చే గుణింపగా).

$\therefore 6+10x=7+7x.$

$\therefore 10x-7x=7-6.$

$\therefore 3x=1.$

$\therefore x=\frac{1}{3}.$

$\therefore$ 1-వ రకము 1 పౌను 2-వ రకము $\frac{1}{3}$ తో కలిపి ఉన్నది.

$\therefore$ „ 3 „ „ 1 తో „

$\therefore$ కోరిన నిష్పత్తి $3:1.$

సరిచూపు. $\frac{3\times 6+1\times 10}{4}=\frac{18+10}{4}=\frac{28}{4}=7.$

మాదిరి నెం. (5) ఒక గొప్పవానికి ఉన్న పొలములు, ఇళ్లు, నగలు, సామాను, పశ్వాదులును మొత్తపు ఆస్తిలో క్రమమున, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$. తక్కినది 1,000 రూపాయల రొక్కము. అతని ఆస్తి కిమ్మతు ఎంత?

న్యాసము. అతని ఆస్తి కిమ్మతు x అనుకో.

అయినచో, పొలముల „ $=\frac{1}{2}x.$

„ ఇళ్ల „ $=\frac{1}{4}x.$

అయినచో, నగల కిమ్మతు $=\frac{1}{8}x.$

,, సామాను ,, $=\frac{1}{16}x.$

,, పశ్వాదుల ,, $=\frac{1}{32}x.$

$\therefore$ శేషము $=x-(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}x+\frac{1}{32}x)$. ఇది ప్రశ్న ప్రకారము 1,000 రూ.

$$\therefore x-(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{8}x+\tfrac{1}{16}x+\tfrac{1}{32}x)=1{,}000.$$

అనగా, $x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}x-\frac{1}{16}x-\frac{1}{32}x=1{,}000.$

ప్రతి పదమును హారముల (అనగా 2, 4, 8, 16, 32 ల) క. సా. గు. చే (అనగా 32 చే) గుణింపుము.

$\therefore 32x-16x-8x-4x-2x-x=32{,}000.$

$\therefore x=32{,}000.$

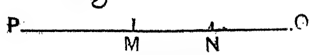
$\therefore$ ఆస్తి కిమ్మతు $=$ 32,000 రూ.

సరిచూపు.

		రూ.
పొలములు	$=\frac{1}{2}\times 32{,}000=$	16,000.
ఇళ్లు	$=\frac{1}{4}\times 32{,}000=$	8,000.
నగలు	$=\frac{1}{8}\times 32{,}000=$	4,000.
సామాను	$=\frac{1}{16}\times 32{,}000=$	2,000.
పశ్వాదులు	$=\frac{1}{32}\times 32{,}000=$	1,000.
	$\therefore$ మొత్తము $=$	31,000.
	శేషము $=$	1,000.

మాదిరి నెం. (6) A, B లు PQ అను ఒక రోడ్డుయొక్క చివళ్లను P, Q లవద్ద బయలుదేరి, క్రమమున గంటకు 3, 4 మైళ్ల వేగములతో ఎదురు నడతురు. వారు M వద్ద ఎదురై, వరుసను Q P లు జేరుకొని అక్కడనుండి వెనుకకు నడచివచ్చుటలో N వద్ద ఎదురగుదురు. MN=10 మైళ్లు అగు నప్పుడు, PQ అను దూరము కట్టుము.

న్యాసము. PQ అను దూరము x మైళ్లు అనుకో. A, B లు మొదటిసారి M వద్ద ఎదురగుదురు కావున, PM అను దూరమును A నడచు ఏదో కాలములో QM అను దూరమును B నడచును. కాని ఒకేకాలములో వారు నడచు దూరములు వారి వేగముల నిష్పత్తిలో నుండును.



పటము 55.

$$\therefore \frac{PM}{MQ}=\frac{3}{4}.\quad \therefore \frac{PM}{PQ}=\frac{3}{7}.\quad \therefore PM=\frac{3}{7}\ PQ=\frac{3}{7}x\ldots(1).$$

A అనువాడు PQ+QN అను దూరమును ఎంతకాలములో నడచునో, అంతే కాలములో QP+PN ను B నడచును.

$$\therefore \frac{PQ+QN}{QP+PN}=\frac{3}{4}.$$

అనగా, $\frac{x+QN}{x+PN}=\frac{3}{4}.$

ఇద్దరును నడచిన దూరముల మొత్తము $=x+QN+x+PN.$

అనగా, $2x+QN+PN.$ అనగా, $2x+PQ.$ అనగా, $2x+x.$ అనగా, $3x.$

$$\therefore \frac{x+PN}{3x}=\frac{4}{7}.$$

$$\therefore x+PN=\frac{4}{7}\times 3x.$$

$$\therefore PN=\frac{12x}{7}-x\ldots(2).$$

(1), (2) లను బట్టి $MN=PN-PM=\frac{12x}{7}-x-\frac{3}{7}x.$

ఇది, ప్రశ్నప్రకారము $=10$ మైళ్లు.

$$\therefore \frac{12x}{7}-x-\frac{3}{7}x=10.$$

$\therefore 12x-7x-3x=70$ (ప్రతి పదమును హారముల క. సా. గు. అగు 7 చే గుణింపగా.)

$\therefore 2x=70.$

$\therefore x=35.$

$\therefore$ PQ అను దూరము 35 మైళ్లు.

సరిచూపు. $PM=\frac{3}{7}\ PQ=\frac{3}{7}\times 35=15$ మైళ్లు.

$QP+PN=\frac{4}{7}\times 3\ PQ=\frac{4}{7}\times 105=60$ మైళ్లు.

$\therefore PN=60-35=25$ మైళ్లు.

$\therefore PN-PM=25-15=10$ మైళ్లు.

మాదిరి నెం. (7) ఇద్దరు తండ్రీకొడుకుల వయస్సుల నిష్పత్తి 7: 3. మరి 5 ఏళ్లలో కొడుకు ఈడునకు తండ్రి ఈడు రెట్టింపు. వారి ప్రస్తుత వయస్సులు కట్టుము.

న్యాసము. కొడుకుయొక్క ప్రస్తుతవయస్సు $3x$ ఏళ్లు అనుకో. అయినచో, తండ్రియొక్క ప్రస్తుతవయస్సు $7x$ ఏళ్లు అగును.

మరి 5 ఏళ్లకు వారి వయస్సులు $3x+5$, $7x+5$.

ప్రశ్నప్రకారము తండ్రివయస్సు కొడుకువయస్సునకు రెట్టింపు.

$\therefore\ 7x+5=2(3x+5).$

$\therefore\ 7x+5=6x+10.$

$\therefore\ 7x-6x=10-5.$

$\therefore\ x=5.$

$\therefore$ ప్రస్తుతవయస్సులు $7x$, $3x$ అనగా **35, 15** ఏళ్లు.

$\therefore$ తండ్రి ప్రస్తుతవయస్సు 35 ఏళ్లు, కొడుకు ప్రస్తుతవయస్సు 15 ఏళ్లు.

సరిచూపు. వారి ప్రస్తుతవయస్సుల నిష్పత్తి 35 : 15.
అనగా, 7 : 3.

5 ఏళ్ల తరువాత వారి ఈడులు 40, 20. అప్పుడు వారి వయస్సుల నిష్పత్తి 20: 10 అనగా 2 : 1.

మాదిరి నెం. (8) ఒక సంచీలో కొన్ని రూపాయకాసులును, కొన్ని బేడకాసులును, మొత్తము 120 నాణెములున్నవి. వీటి మొత్తపువిలువ 85 రూ. ఇవి ఎన్ని, అవి ఎన్ని?

న్యాసము. సంచీలోని రూపాయకాసుల సంఖ్య x అనుకో.
అయినచో, బేడకాసుల సంఖ్య $120-x$ అగును.

x రూపాయకాసుల విలువ x రూపాయలు.

$120-x$ బేడకాసుల విలువ $\frac{120-x}{8}$ రూపాయలు.

$\therefore$ మొత్తపు విలువ $x+\frac{120-x}{8}$ రూపాయలు.

ఇది, ప్రశ్నప్రకారము 85 రూ.

$\therefore\ x+\frac{120-x}{8}=85.$

ప్రతి పదమును 8 చే గుణింపగా వచ్చునది,

$8x+120-x=680.$

$\therefore\ 7x+120=680.$

$\therefore\ 7x=560.$

$x=80.$

$\therefore$ రూపాయకాసుల సంఖ్య 80, బేడకాసుల సంఖ్య $120-80$ అనగా 40.

సరిచూపు. 80 రూపాయకాసుల విలువ = 80 రూ.
40 బేడకాసుల విలువ = 5 రూ.
$\therefore$ మొత్తపు విలువ = 85 రూ.

మాదిరి నెం. (9) 3 నకును, 4 నకును, సందున గడియారపు ముల్లు రెండును, ఎప్పుడు (1) ఆచ్ఛాదించుకొనును, (*b*) సమకోణికముగ నుండును?

(1) 3 అయినప్పుడు, నిమిషపుముల్లు XII మీదను, గంటముల్లు III మీదను ఉండును. అప్పుడు వాటి ఎడము 15 నిమిష దూరములు. అవి **3** తర్వాత x నిమిషములకు ఒకదానిపై నొకటి ఉండునని అనుకో. నిమిషపుముల్లు XII ను వదలి x నిమిష దూరములు కదలును, గంటముల్లు $\frac{x}{12}$ నిమిష దూరములు III ను వదలి కదలును. (ఎందువల్లననగా, నిమిషపుముల్లు 60 నిమిష దూరములు కదలిన కాలములో, గంటముల్లు అట్టి దూరములు 5 మాత్రమే కదలును. కాబట్టి, ఒకేకాలములో, నిమిషపుముల్లు కదలినదానిలో $\frac{1}{12}$ మాత్రమే గంటముల్లు కదలును.) రెండు ముల్లును కలియును కావున,

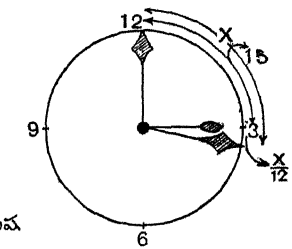
$x=15+\frac{x}{12}.$

$\therefore\ 12x=180+x.$

$\therefore\ 11x=180.$

$\therefore\ x=\frac{180}{11}=16\frac{4}{11}.$

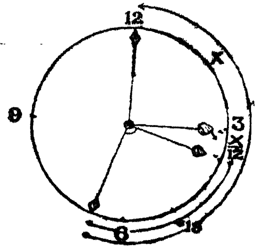
కాబట్టి, అవి 3 తర్వాత $16\frac{4}{11}$ నిమిషములకు ఆచ్ఛాదించుకొనును.



పటము 56.

(2) 3 అయినప్పుడు, వాటి మధ్య ఎడము 15 నిమిష దూరములు. కాబట్టి, ఇది ఒక ఫలితము. 3 తర్వాత x నిమిషములకు అవి సమకోణిక

ముగ నుండును అనుకో, నిమిషపుముల్లు XII నుండి x నిమిష దూరములను, గంటముల్లు 3 నుండి $\frac{x}{12}$ నిమిష దూరములును, గడచినవి. ఈ రెండును సమకోణికముగనుండుట చే,



పటము 57.

$$x=15+\frac{x}{12}+15.$$
$$\therefore 12x=180+x+180.$$
$$\therefore 11x=360.$$
$$\therefore x=32\frac{8}{11}.$$

∴ అవి, సమకోణికముగ, 3 తర్వాత $32\frac{8}{11}$ నిమిషములకు ఉండును.

అభ్యాసము 12.

1. మూడు వరుససంఖ్యల మొత్తము 63. సంఖ్యలు కట్టుము.
2. మూడు వరుసబేసిసంఖ్యలయొక్క మొత్తము 51. సంఖ్యలు కట్టుము.
3. మూడు వరుససంఖ్యల మొత్తము 88-కి 8 పెచ్చు. సంఖ్యలు కట్టుము.
4. నాలుగు వరుససరిసంఖ్యల మొత్తము, వాటిలో మహత్తమమునకు 3 రెట్లు. సంఖ్యలు కట్టుము.
5. ఒక సంఖ్యయొక్క రెట్టింపునకు 3 కలిపిన ఎంతో, ఆ సంఖ్యయొక్క మూడు రెట్లలో 27 తీసివేసిన అంతే. ఆ సంఖ్య కట్టుము.
6. ఒక త్రిభుజముయొక్క కోణముల నిష్పత్తి 1 : 2 : 3. కోణములు కట్టుము.
7. ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజముయొక్క సమానకోణములలో ఒకొక్కటి మూడవదానికి రెట్టింపు. మూడు కోణములను కట్టుము.
8. ఒక చతుర్భుజముయొక్క కోణముల నిష్పత్తి 1 : 2 : 3 : 4. కోణములను కట్టుము.
9. ఒక సమానాంతర చతుర్భుజముయొక్క సన్నిహితకోణముల నిష్పత్తి 5 : 3. నాలుగు కోణములను కట్టుము.
10. రెండు సంఖ్యల మొత్తము 56. ఒకటి తక్కినదానిలో $\frac{13}{15}$. సంఖ్యలు కట్టుము.

11. ఒక సంఖ్యలోని $\frac{2}{5}$ యొక్కయు, $\frac{5}{9}$ యొక్కయు మొత్తము, ఆ సంఖ్యలో $\frac{7}{8}$ కి 29 పెచ్చు. సంఖ్య కట్టుము.
12. ఒక సంఖ్యలోని $\frac{1}{8}$ ను 2 ను కలిపిన మొత్తమును, ఆ సంఖ్యలోని $\frac{3}{8}$ ను 5 ను కలిపిన మొత్తమును, కలిపినచో ఆ సంఖ్యయే ఏర్పడును. సంఖ్య కట్టుము.
13. ఒకడు తన 25-వ ఏట కొడుకును కనినాడు. కొడుకు వయస్సు తండ్రివయస్సులో $\frac{3}{8}$ ఉన్నప్పుడు, కొడుకునకు ఎన్నవ ఏడు?
14. ఒకని వయస్సు వాని కొడుకు వయస్సునకు రెట్టింపు. 20 ఏళ్ల క్రితము వానివయస్సు కొడుకు వయస్సునకు 6 రెట్లు. వారి వయస్సులు కట్టుము.
15. A వయస్సు B వయస్సులో $\frac{2}{3}$. మరి 5 ఏళ్లకు వాని వయస్సు B వయస్సులో $\frac{5}{7}$. వారి వయస్సులు కట్టుము.
16. A వయస్సు B వయస్సులో $\frac{2}{3}$, C వయస్సులో $\frac{1}{2}$. A, C ల యొక్క వయస్సులవార 15 ఏళ్లు. A, B, C ల వయస్సులు ఎంతెంత?
17. A కి ఇచ్చినదానికంటె $\frac{1}{2}$ ఎక్కువ B కిని, A కి ఇచ్చినదానిలో $\frac{7}{8}$ C కిని వచ్చునట్లు 135 రూ. A, B, C లకు పంచుము.
18. B కంటె 70 రూ. ఎక్కువ A కిని, A కంటె 60 రూ. తక్కువ C కిని, C యొక్క వాటాలో $\frac{1}{3}$ D కిని వచ్చునట్లు, 350 రూ. A, B, C, D లకు పంచుము.
19. A వద్ద కొన్ని రూపాయలున్నవి. వాటి రెట్టింపునకంటె B వద్ద 10 రూ. ఎక్కువ ఉన్నవి. A, B ల వద్ద కలిపి ఉన్నవాటిలో $\frac{3}{4}$ C వద్ద ఉన్నవి. B వద్ద ఉన్నన్నే C వద్ద ఉన్నవి. ఒకొక్కనివద్ద ఎంతెంత సొమ్ము ఉన్నది?
20. 20 గజముల పొడుగున్న ఒక గుడ్డను రెండింటికింద తుంచవలెను. మొదటిదానిలో సగమును, రెండవదానిలో $\frac{1}{3}$ ను సమానముకావలెను. రెండు ముక్కల పొడుగులును కట్టుము.
21. ఒక వర్తకుడు మల్లుతానులోని గజముముక్కలును గజములోని భాగములును కూడ చిల్లరిని అమ్మును. అమ్మకము అయిన తరువాత, నాలుగు మల్లుతానుల తాలూకు నాలుగు ముక్కలు, ఒకటి తానులో $\frac{1}{5}$, ఒకటి $\frac{1}{8}$, ఒకటి $\frac{1}{10}$, ఒకటి $\frac{1}{6}$ ను మిగిలెను. ముక్కల పొడుగుల మొత్తము అరతానుకంటె $3\frac{3}{8}$ గజములు ఎక్కువ. ఆ మల్లుతాను పొడుగు కట్టుము. (నాలుగు తానులును సమానమైన పొడుగు.)

22. ఒక దొడ్డి వెడల్పుకంటె పొడుగు 140 గజములు ఎక్కువ. దొడ్డి చుట్టుకొలత 1,980 గజములు. దాని నిలువు అడ్డములు కట్టుము.

23. ఆయతమగు ఒక భూమి పొడుగును 5 గజములు తగ్గించి, వెడల్పును 15 గజములు పెంచినచో, అది చతురస్రమగును, భూఫలము 825 చ. గజములు పెరుగును. ఆ భూమియొక్క పొడుగు వెడల్పులు కట్టుము.

24. ఒక ఆయతముయొక్క వెడల్పుకంటె పొడుగు 25 అ. ఎక్కువ. పొడుగును 20 అ. కుదించి, వెడల్పును 10 అ. పెంచినచో, భూఫలములో మార్పు ఉండదు. ఆ ఆయతము పొడుగు కట్టుము.

25. ఒక ఆయతముయొక్క పొడుగుకంటె వెడల్పు 5 అ. తక్కువ. పొడుగును వెడల్పును కూడ 5 అ. పెంచినచో, భూఫలము 80 చ. అ. వృద్ధియగును. దాని పొడుగు వెడల్పులు కట్టుము.

26. రెండు పొలములలో ఒకటి ఆయతము, రెండవది చతురస్రము. ఆయత భూఫలము, చతురస్ర భూఫలమునకు 100 చ. గ. హెచ్చు. ఆయతముయొక్క వెడల్పుకంటె పొడుగు 50 గ. ఎక్కువ. చతురస్రభుజము ఆయతముయొక్క వెడల్పుకంటె 20 గ. ఎక్కువ. ఆయతచతురస్రముల కొలతలు కట్టుము.

27. రెండు ఆయతభూముల భూఫలములు సమములు. వాటి పొడుగుల నిష్పత్తి $a:b$. వాటి వెడల్పుల నిష్పత్తి యెంత? ప్రతి భూమియొక్కయు భూఫలము c చ. గజములును, ఒకదాని పొడుగు l గజములును అయినచో, రెండింటి కొలతలును కట్టుము. $c=2,700$, $a=25$, $b=12$, $l=90$ అయినప్పుడు నీ ఫలితముల విలువలు కట్టుము.

28. ఒక పళ్లవర్తకుడు కొన్ని నారింజకాయలు డజను 12 అ. చొప్పునను, అన్నే పెదరేగులు డజను 1 రూ. చొప్పునను కొని, వాటిని ఒకొక్కటి క్రమమున, 1 అ. 4 పై. ను, 2 అ. ను చేసి అమ్మి, రూ. 3—4—0 లాభము తీసినచో, ఒకొక్కరకము ఎన్ని కొనెను?

29. ఒక దర్జీ, గజము 12 అ. చేసి కొన్ని గజముల "ట్విల్లు"ను, గజము 1 రూ. చేసి మరి 6 గజముల "కాకీ" గుడ్డయు కొని, మూడేసి గజములుపెట్టి షర్టులు కుట్టి, ట్విల్లుషర్టు రూ. 2–12–0 చొప్పునను, కాకీషర్టు రూ. 3–12–0 చొప్పునను అమ్మి, రూ. 6—8—0 లాభము తీసెను. ఏ రకముగుడ్డ ఎన్ని గజములు కొనెను?

30 ఒక జమీదారు తన ఎస్టేటులో $\frac{1}{2}$, ఎకరము 1,000 రూ. చేసియు, $\frac{1}{4}$ 875 రూ. చేసియు, $\frac{1}{8}$ 1,125 రూ. చేసియు, తక్కినది 975 రూ. చేసియు అమ్మెను. అతని కొనుబడి ఎకరము 950 రూ. ను, అతని లాభము 4,250 రూ. ను అయినచో, అతని ఎస్టేటు ఎన్ని ఎకరములు?

31. ఒకడు గజము 8 అ. చేసి కొన్ని గజముల ట్విల్లును, గజము 12 అ. చేసి కాకీగుడ్డ 2 గజములు ఎక్కువగను, గజము రూ. 1—4—0 చేసి సిల్కు 4 గజములు ఎక్కువగను, గజము రూ. 2—12—0 చేసి ట్వీడ్ 6 గజములు ఎక్కువగను కొనెను. అతను కొన్న సిల్కునకు 4 రెట్లు సిల్కు కొని ఉండి, కొన్న ట్విల్లుకంటె 11 గజములు ఎక్కువ ట్విల్లు కొని ఉండినచో, అతనికి ఇప్పుడైనంతే అయియుండును. ఒకొక్కరకము ఎన్ని గజములు కొనెను?

32. ఒక సంచీలోని రూపాయకాసుల సంఖ్యకు, అర్ధలు రెట్టింపు, పావలాకాసులు 3 రెట్లు, బేడలు $\frac{5}{6}$, కానులు $8\frac{3}{4}$ రెట్లు. సొమ్ముయొక్క విలువ రూ. 35—14—3 అయినచో, మొత్తము నాణెములసంఖ్య ఎంత?

33. ఒక నాటకకంపెనీకి ఒక రాత్రి వసూలులెక్కలు చూడగా, ఫస్టుక్లాసు టికెట్లసంఖ్యకు, సెకండుక్లాసువి $1\frac{1}{2}$ రెట్లు, థర్డుక్లాసువి 4 రెట్లు, ఫోర్తుక్లాసువి 10 రెట్లును అమ్ముడైనట్లును, మొత్తము రూ. 1,112—8—0 వచ్చినట్లును తేలెను. ఆఖరుక్లాసు టికెట్టు చార్జీ అగు 6 అణాలకు దాని పైక్లాసు రెట్టింపును, ఆ పైక్లాసు $3\frac{1}{3}$ రెట్లును, మరీ పైది $6\frac{2}{3}$ రెట్లును అయినచో, ఒకొక్క క్లాసు టికెట్లు, ఆ రాత్రి ఎన్నెన్ని అమ్ముడయ్యెను?

34. A 5 రోజులలోను, B 6 రోజులలోను ఒక పని వేర్వేరుగ చేయగలరు. కలిసి, వారు దాని నెంతకాలములో ముగింతురు?

35. A, B లు కలిసి ఒక పనిని 8 రోజులలో ముగింపగలరు. A ఒక్కడే దానిని $10\frac{2}{3}$ రోజులలో ముగింపగలడు. B ఒక్కడే దానిని ఎన్నాళ్లలో ముగించును?

36. A, B, C లు వేర్వేరుగ ఒక పనిని క్రమమున, m, n, p రోజులలో ముగింతురు. వారు కలిసి ఆ పనిని ఎన్నాళ్లలో ముగింతురు? $m=3$, $n=4$, $p=5$ అయినప్పుడు ఫలితముయొక్క విలువ కట్టుము.

37. A, B, C లు కలిసి 16 రోజులలో ఒక పనిలో $\frac{8}{9}$ చేయగలరు. B, C లు ఆ పనిలోనే $\frac{1}{6}$ 5 రోజులలో చేయుదురు. A యొక్క పనిచురుకును కట్టుము.

38. ఒక గొట్టము ఒక తొట్టిని కొన్ని గంటలలో నింపును. మరియొకటి దానినే $1\frac{1}{2}$ రెట్ల కాలములో నింపగలదు. తొట్టి ఖాళీగా ఉండగా మొదట మొదటిగొట్టమును వదలి, తరువాత 1 గం. 20 నిమిషములకు రెండవదానిని వదలగా, రెండవదానిని వదలిన 4 గంటలకు తొట్టి నిండినది. గొట్టములు తొట్టిని ఎన్నెన్ని గంటలలో నింపగలవు?

39. ఒక సంఖ్యను 14 చే భాగించునపుడు శేషము 3, 11 చే భాగించునపుడు శేషము 1. మొదటి సందర్భములోని భాజితము రెండవదానికంటె 1 ఎక్కువ. సంఖ్యను కట్టుము.

40. ఒక సంఖ్య తాలూకు అంకెల మొత్తము 6. ఆ రెండు అంకెలను తారుమారుచేయగా వచ్చు సంఖ్యకును అసలుదానికిని తేడా 18. సంఖ్య ఏది?

41. ఒక సంఖ్య తాలూకు రెండు అంకెలయొక్కయు మొత్తము 10. ఆ అంకెలలో ఒకటి రెండవదానిలో $\frac{2}{3}$. సంఖ్య కట్టుము. ఎన్ని ఫలితములు ఉన్నవి?

42. రెండంకెలుగల ఒక సంఖ్యలో 3 తీసివేసి, శేషమును 5 చే భాగించినచో, భాజితము 8, శేషము పూజ్యము. ఆ రెండంకెలకును తేడా 1 అయినచో, సంఖ్య కట్టుము.

43. ఒక సంఖ్య తలచుకో. దాని మూడురెట్లనుండి 200 తీసివేసి, శేషమును 12 చే భాగింపుము. అప్పుడు ఫలితము 10. సంఖ్య కట్టుము. ఫలితమునుబట్టి సంఖ్యను ఎట్లు కట్టగలవో చెప్పుము.

44. (*a*) ఒక పడవ 9 గంటలలో 18 మైళ్లు ఒక ప్రవాహమునకు ఎదురు నడచును. ప్రవాహవేగము గంట 1-కి a మైళ్లు అయినచో, నిశ్చలజలమున పడవ వేగము కట్టుము.

(*b*) ఒక పడవ $4\frac{1}{2}$ గంటలలో 18 మైళ్లు ఒక ప్రవాహమునకు వాలు నడచును. పడవ వేగము నిశ్చలజలమున గంట 1-కి b మైళ్లు అయినచో, ప్రవాహ వేగము కట్టుము.

45. ఇద్దరు మనుష్యులు, 35 మైళ్లు ఎడమునన్న రెండు స్థానములనుండి, ఒకరికేసి ఒకరు, ఏకముహూర్తమున బయలుదేరుదురు. వారి వేగములయొక్క తేడా గంటకు 2 మైళ్లు. 5 గంటల అనంతరము వారు ఎదురైనచో, వారి నడకలయొక్క వేగములును, స్థానములలో ఒకదానికిని వారు ఎదురుపడ్డచోటికిని ఎడమును కట్టుము.

46. పై ప్రశ్నలో, వారు తమ గమ్యస్థానములను జేరుకొని, అక్కడనుండి వెన్కకు మళ్లి తిరుగు దారిలో మరల ఎదురైనచో, వారు ఎధురుపడ్డ చోటులకు ఎడము కట్టుము.

47. ఒక సైకిల్ నేర్పరి ఒక స్థానమువద్ద పగలు 7 గంటలకు బయలుదేరి తొక్కుకొని పోవుచుండగా మరియొకడు ఆ చోటే పగలు 8–20 గంటలకు బయలుదేరి మొదటివానిని పగలు 11—20 గంటలకు పట్టుకొనెను. వారి వేగముల తేడా గంటకు $3\frac{1}{3}$ మైళ్లు అయినచో, ఇద్దరి వేగములను కట్టుము.

48. పరిధి పొడుగు 1 మైలుగల ఒక గుండ్రని పందెముల పుంతలో ఒక చోట A అనువాడు పగలు 7 గంటలకు బయలుదేరి కొంత వేగముతో పరుగు ప్రారంభించెను. 7—12 గంటలకు ఆ చోటనే B బయలుదేరి A ని 7—48 గంటలకు పట్టుకొనెను. వారి వేగముల తేడా గంటకు 1 మైలు. వారి వేగములను, A ని B పట్టుకొనినచోటు వీరు బయలుదేరిన చోటునకు ఉన్న ఎడమును కట్టుము.

49. ఒక గ్రామమునకు సమదూరముననున్న రెండు స్థానములనుండి ఇద్దరు బయలుదేరి, గ్రామముకేసి నడతురు. ఒకని వేగము గంటకు 3 మైళ్లు. తక్కినవాడు మొదటివానికి 35 నిమిషముల తర్వాత బయలుదేరినను, ఇద్దరును ఒక్కమాటుగనే గ్రామము చేరుదురు. రెండిటిలో ఏదైన స్థానమునకును ఆ గ్రామమునకును దూరము 25 మైళ్లు అయినచో, రెండవవాని వేగము కట్టుము.

50. ఒక మోటారుసైకిల్ రౌతు కొంత దూరమును 3 గంటలలో గడచి, 3 గం. 20 నిమిషములలో తిరిగి వచ్చినాడు. రాకపోకలయొక్క వేగముల తేడా గంటకు $2\frac{1}{2}$ మైళ్లు అయినచో, అతడు ఆ యంత్రముమీద ఎంత ప్రయాణముచేసెను?

51. 50-వ ప్రశ్నను అంకగణితముచే సాధింపుము.

52. గంటకు 40 మైళ్ల వేగముగల ఒక "ఎక్స్ప్రెస్" రైలు ఒక జెండాచూపువానిని 12 సెకనులలో దాటును. రైలు పొడుగు కట్టుము. ఆ రైలే ఒక వంతెనను 48 సెకనులలో దాటును. వంతెనపొడుగు కట్టుము.

53. పై ప్రశ్నలోని రైలు, ఒక స్టేషనువద్ద ఆగకుండ దానిని $34\frac{1}{11}$ సెకనులలో దాటిపోయినచో, స్టేషనుపొడుగు కట్టుము.

54. 7 నకును 8 కిని సందున, ఒక గడియారపు గంటనిమిషపుముళ్లు, ఎంత అయినప్పుడు, ఒకదానిపై నొకటి ఉండును?

55. 8 కిని 9 కిని సందున, ఒక గడియారపు గంటనిమిషపుముళ్లు, ఎంత అయినప్పుడు, (a) సమకోణికముగ నుండును, (b) ఏకరేఖగా ఉండును?

56. ఒక క్లాసులోని బాలబాలికలు మొత్తము 40 మంది. బాలునికి నాలుగేసియు, బాలికకు మూడేసియు ఇచ్చుటకు 145 నారింజపండ్లు ఉండిన చాలును. బాలురెందరు, బాలికలెందరు?

57. ఒక పాలవానివద్దనున్న ఆవుపాలును, గేదెపాలును మొత్తము $8\frac{1}{2}$ పడులు. అతడు పడి 10 అ. చేసి ఆవుపాలును, పడి 12 అ. చేసి గేదెపాలును అమ్మినచో, అతనికి మొత్తము రూ. 5—10—0 వచ్చును. అతని దగ్గరనున్న పాలు ఏ రకము ఎన్ని?

58. ఒక పండ్లవాడు పెదరేగుపండ్లు, నారింజపండ్లు, అరటిపండ్లును మొత్తము 56 ఫలములు కొని, పెదరేగుపండు 1-కి 2 అ. చేసియు, నారింజపండు 1-కి 1 అ. 4 పై. చేసియు, 2 అణాలకును 6 అరటిపళ్లు చొప్పునను అమ్మెను. పెదరేగుల సంఖ్యయొక్క రెట్టింపునకు 1 తక్కువగా నారింజలుండినచో, మొత్తము అమ్మకపురాబడి రూ. 4—1—4 అయినచో, వాడు ఎన్ని నారింజలును, ఎన్ని పెదరేగులును కొనెను?

59. ఒక గొప్పవాడు 1,000 రూ. ఇద్దరకు రెండు బాకీలుగా ఇవ్వగా రెండును దివాలారకములే అయి, ఒకదాని తాలూకు రూపాయకు 4 పైసలును, రెండవదాని తాలూకు రూపాయకు 5 పైసలును వంతు బాకీ వసూలు వచ్చినది. ఇట్లు వచ్చినది రూ. 22—12—7 అయినచో, ఏ బాకీ ఎంత?

60. ఒక వీధిని కట్టుచున్న ఒక ఇంటినిమిత్తము అక్కడకు అటొకటియు ఇటొకటియునున్న రెండు సున్నపుభట్టీలలో దేనినుండి సున్నము తెచ్చుకొనినను సమానముగానే కిట్టును. ఒక భట్టీదగ్గర సున్నము ఖరీదు ఘన అడుగు 1-కి 4 అ., రెండవచోట $3\frac{1}{2}$ అ. అయి, 50 ఘ. అ. సున్నమును జేరవేయుటకు మైలునకు 2 అ. చొప్పున అయి, భట్టీల మధ్య దూరము $18\frac{3}{4}$ మైళ్లు అగుచో, ఒకొక్క భట్టీనుండి ఆ ఇల్లు ఎంతెంత దూరము?

61. హాజరై పనిచేసినప్పుడు రోజు 1-కి 3 రూ. ఇచ్చుటకును, హాజరు కాని రోజు 1-కి 2 రూ. వెనుకకు పుచ్చుకొనుటకును షరతులుపెట్టి ఒక కూలీని పనిలో చేర్చుకొనినారు. 50 రోజుల పనికాలము జరిగినపిదప, వానికి 50 రూ. చేతిలో పడెను. అతడు హాజరుకాని రోజులెన్ని?

62. ఒక వర్తకుడు నెయ్యి నూనెలు 3 : 2 నిష్పత్తిలో కలిపివేసి ఆ కలగలుపును వీసె రూ. 2—12—0 చేసి అమ్మి, మొత్తముమీద 10 రూ. లాభము తీసెను. నెయ్యి నూనెలు అతడు 100 రూ. పెట్టుకొనినచో ఏది ఎన్ని వీసెలు కొనెను? నూనెకంటె నెయ్యి వీసె 1-కి రూ. 1—4—0 ఎక్కువ ఖరీదు అయినచో, వాటి ఖరీదులు ఎంతెంత?

63. ఒకడు పడి 1-కి 8 అ. చేసి కొన్ని పాలు కొని, వాటియొక్క $\frac{2}{5}$ భాగము నీరు వాటిలో పోయును. ఈ కలగలుపును పడి 1-కి 6 అ. చేసి అమ్మి, అతడు మొత్తముమీద 2 అ. లాభము తీసినచో, అతడు కొన్న పాలు ఎన్ని పడులు?

64. ఒక వర్తకుడు రెండు రకముల బెల్లమును 2 : 3 నిష్పత్తిలో కొనెను. మొదటి రకము ఖరీదు రెండవదానికి రెట్టింపు వాటి మిశ్రణమును అతడు వీసె 1-కి మొదటిరకపు వీసె ఖరీదులో $\frac{3}{4}$ వంతుచొప్పున అమ్మి, వీసెకు 4 పైసల లాభము తీసినచో, రెండు రకముల బెల్లపు ఖరీదులును కట్టుము. అతని లాభము 8 అ. అయినచో, అతడు ఏ రకము బెల్లము ఎన్ని వీసెలు కొనెను?

65. రాబడి పన్ను రేటు రూపాయకు 4 పై. చొప్పున ఉన్నప్పటికంటె రూపాయకు 5 పై. చొప్పున ఉన్నప్పుడు ఒకడు రూ. 3—14—2 ఎక్కువ పన్ను కట్టవలెను. అతని రాబడి ఎంత?

66. ఒక వర్తకునికి ఒక యేడు అతిక్రితము సంవత్సరముకంటె 50 రూ. ఎక్కువ లాభమువచ్చెను. రాబడిమీద మొదటియేడు రూపాయకు 4 పైసలును, రెండవయేడు రూపాయకు 5 పైసలును పన్ను. రెండు సంవత్సరముల నికరాదాయములకును తేడా రూ. 46—14—0 అయినచో, రెండవయేట అతని స్థూలాదాయము కట్టుము.

67. ఒక భక్తుడు కొంత సొమ్ముతో తీర్థయాత్ర బయలుదేరి మొదటి మకాములోనే ఆ సొమ్ములో $\frac{2}{5}$ భాగమును ఖర్చుపెట్టి, అప్పుడు చేతనున్న సొమ్ములో సగము ఒక స్నేహితుని దగ్గర పుచ్చుకొని సాగిపోయెను. అప్పుడున్నదానిలో సగము ఖర్చుపెట్టి, మరల ఎక్కడనో 150 రూ. పుచ్చుకొనెను. ఈ ఉన్నదానిలో $\frac{3}{4}$ వంతు ఇంటికి వచ్చుసరికి అయిపోగా, మిగిలినది బయలుదేరిన సొమ్ములో $\frac{1}{3}$ ఉండెను. అతడు ఎంత పుచ్చుకొని బయలుదేరెను?

68. ఒక ఆసామీ కొంతసొమ్ము పట్టుకొని జూదమాడబోయెను. ఒకసారి అతనికి 10 రూ. పోయెను. అప్పుడు మిగిలినదానికి అతడు ఇక నంత కలిపెను. అతనికి మరల 10 రూ. పోయెను. అప్పుడు మిగిలినదానికి అతడు ఇక నంత కలిపెను. అతనికి మరల 10 రూ. పోగా, మిగిలినది మొదటి సొమ్మునకు $1\frac{3}{5}$ రెట్లు ఉండెను. అతడు జూదమునకు ఎంత తీసికొని వెళ్లెను?

69. ఈ క్రింది సామ్యములను సాధింపుము:—

(1) $ax+b=cx+d.$

(2) $px+q=sx+t.$

(3) $ax-b=px-q.$

(4) $4(3x-2)+98=6(8-x).$

(5) $8(x+2)+9(x+3)+4(3x+1)=200.$

(6) $6(x-2)+4(x-3)+8(x-3)=6x+1.$

(7) $10(x-3)+9(x-8)=6(2x-1)+7(4x-3).$

(8) $4(x-6)-8(2x-3)=10(23x-5)+4(9x-8).$

(9) $2(x-a)+3(x-b)=0.$

(10) $3(x-b)+4(x-c)=5(x-a).$

(11) $6(x+p)-8(2x+p)=4(x-3p)+10(x-5p).$

(12) $6(7x-5)+4(8x-4)=10(4x+3)-12(x-8).$

(13) $\frac{2}{3}(3x+2)-\frac{5}{6}(4x+8)=\frac{9}{10}(4x+6).$

(14) $\frac{4}{9}(9x-3)+\frac{7}{15}(6x-2)=\frac{9}{8}(3x+4)+\frac{7}{12}(11x-4).$

(15) $a(px+q)+b(cx+d)=d(p+x)+e(f+x).$

(16) $\frac{x}{a}+\frac{m}{b}=\frac{p}{q}+\frac{r}{s}.$

(17) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x+480=\frac{7}{8}x.$

(18) $\frac{x-2}{7}=\frac{5x-1}{3}.$

(19) $\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{4}=\frac{2x-1}{6}.$

(20) $7x+\frac{74}{85}(17x)+20=\frac{8}{15}(900-5x).$

(21) $3x-\left(20+\frac{5x}{6}\right)=60+7x.$

(22) $15x+6(x-2)+8(x-3)=22(x-4)+6(x-5).$

(23) $\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}+\frac{5x}{6}-\frac{7x}{8}=10+\frac{x}{10}.$

(24) $\frac{x-2}{3}+4\left(x-\frac{1}{3}\right)+5\left(x-\frac{1}{6}\right)=6.\frac{8x-1}{5}.$

(25) $16(23x-48)=17(28x-56).$

(26) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{d}{c}.$

(27) $ax+bx+3+(4-x)=8.$

(28) $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=\frac{x}{5}-21.$

(29) $\frac{1}{2}(5x-5)+\frac{3}{4}(4x-3)=\frac{6}{7}(7x-4).$

(30) $p(x+1)+8=q(x+3)-20.$

(31) $\frac{8(x+5)}{4x+6}=\frac{5}{6}.$

70. x మైళ్ల పొడుగున ఒక రైలుమార్గమున నిర్మాణముచేయుటకు [illegible] $\{8x-4(x-2)\}$ లక్షల రూపాయలు అగునని ఒక కంపెనీవారు అంచనా కట్టినారు. మరియొక కంపెనీవారు $\frac{3}{8}\{6x-(3x+15\cdot75)\}$ లక్షల రూపాయలు అంచనా వేసినారు. మొదటి అంచనా రెండవదానికంటె మైలు 1-కి 1,000 రూ. ఎక్కువ. రైలుమార్గము ఎన్ని మైళ్లు? తక్కువ అంచనా ప్రకారము ఖర్చు ఎంత?

71. జర్మనులకును, రష్యనులకును జరిగిన ఒక యుద్ధమునకు పూర్వము వారి సంఖ్యల నిష్పత్తి 5 : 6 కాని, యుద్ధారంభవేళ 10,000 మంది జర్మనులును, 4,800 రష్యనులును వచ్చి తమ తమ వారల జేరుటవల్ల, అప్పటి సంఖ్యల నిష్పత్తి 50 : 59 అయ్యెను. యుద్ధ పూర్వము ఎవరిసేన ఎంతమంది?

72. ఒక ఏడు జనాభా లెక్కలలో పురుషులసంఖ్యకును, స్త్రీలసంఖ్యకును నిష్పత్తి 101 : 99. తర్వాత, జనాభా లెక్కలనాటికి పురుషులు 2,000 మంది తగ్గి, స్త్రీలు 2,000 మంది హెచ్చుటవల్ల వెనుకటి నిష్పత్తి తారుమారయ్యెను. మొదటి లెక్కలలో పురుషులసంఖ్యను, స్త్రీలసంఖ్యను కట్టుము.

73. ఇద్దరు "వాలంటీరు"లు ఒక లక్ష్యమును కొట్టిరి. A వేసిన గుళికలు, B వేసిన వాటికి మూడు రెట్లు. A కొట్టిన తప్పుడుదెబ్బలు 15, B వి 20. A కొట్టిన దెబ్బలు B కొట్టిన వాటికి $4\frac{1}{2}$ రెట్లు ఉన్నచో, ఒకొక్కడు ఎన్నెన్ని గుళికలు వేల్చెనో కట్టుము.

74. తండ్రీకొడుకుల జీతములయొక్క నిష్పత్తి 8 : 3. తండ్రికి నెలకు 50 రూ. ను, కొడుకునకు నెలకు 20 రూ. ను ఖర్చు. 3 ఏళ్ల అనంతరము వారు వెనకవేసిన సొమ్ములకు తేడా 720 రూ. తండ్రియే ఎక్కువ మిగిల్చెను. వారి జీతములు కట్టుము.

75. M_1, M_2 అను ఇద్దరు వర్తకుల పెట్టుబడులు క్రమమున 20,000 రూ. ను, 50,000 రూ. ను. M_1 అనువానికి రెండేళ్లలోను 10,000 రూ. ను, M_2 కి ఏటేటను 4,000 రూ. ను లాభము. లాభములను ఖర్చుకానీక పెట్టుబడు

లతో కలిపి చూచినచో, ఎన్ని ఏళ్ల తర్వాత వారి స్థితులు సమములు? (లాభములమీద వడ్డీలు చూడకు.)

76. (a) $\frac{mx-n}{p}=r$ అయినప్పుడు, x ను m, n, r, p అనువాటి పదములలో చెప్పుము.

(b) పై (a) అను భాగములోని, m ను n, x, r, p అనువాటి పదములలో చెప్పుము.

(c) పై (a) అను భాగములోని, n ను m, x, r, p ల పదములలో చెప్పుము.

(d) పై (a) అను భాగములోని, p ని m, n, r, x ల పదములలో చెప్పుము.

77. (a) $l=a+(n-1)\,d$. n ను l, a, d అను పదములలో కట్టుము.

(b) $s=\frac{n}{2}\{\,2a+(n-1)\,d\,\}$. d ని s, n, a అను పదములలో కట్టుము.

(c) $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{r}$. u ను v, r ల పదములలో కట్టుము.

(d) $\frac{pa+q}{ra+s}=l$. a ని p, q, r, s, l ల పదములలో కట్టుము.

78. (a) $K=\frac{P.m}{n(S+P)}$ అయినప్పుడు P అనుదానిని తక్కిన పదములలో కట్టుము. $K=30$, $m=1{\cdot}25$, $n=2{\cdot}8$, $S=300$ అయినప్పుడు P యొక్క విలువ కట్టుము.

(b) $n\,(x+1)=(n-1)\,x$, $m\,(y-2)=(m+2)\,y$. x, y ల విలువలను m, n ల పదములలో కట్టుము. $m=50$, $n=40$ అయినప్పుడు, x, y ల విలువలు కట్టుము.

79. ఈ క్రిందివాటిలో ఇమిడియున్న వర్ణముల విలువలు కట్టుము:—

(a) $3\,(5p-8)=16{\cdot}8$.

(b) $\frac{21}{16\frac{1}{2}+3n}-8=4$.

(c) $\frac{6\frac{1}{2}q+8}{3q-2}=10$.

(d) $(7\frac{1}{2}m-8)\,(4\frac{1}{2})=m+6$.

(e) $\frac{4}{a}+6=\frac{6a}{a+2}$.

(f) $\frac{(b+3)\,(b+2)}{5}-\frac{1}{2}=\frac{(2b-1)\,(b+2)}{10}$.

80. $S=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\,b+5c+10\,d$. S అనగా ఒక లాటరీలో వసూళ్లు, a, b, c, d లు అనగా 8 అ., 4 అ., 5 రూ., 10 రూ., ఈ టికెట్లు కొనుక్కొన్నవారి సంఖ్యలు. $S=25{,}000$ రూ. ను, $b=20{,}000$ ను, $c=1{,}200$ ను $d=1{,}000$ యు, అయినప్పుడు a యొక్క విలువ కట్టుము.

అధ్యాయము XIII.

సగట్లు.

57. ఒక స్కూలులోని 6-వ ఫారములోనున్న విద్యార్థులు ఆరుగురికిని, పబ్లిక్ పరీక్షలో ఇంగ్లీషులో మార్కులు క్రమమున 30, 45, 24, 38, 35, 15 ను వచ్చెను అనుకో. మరియొక స్కూలులోని 6-వ ఫారములోనున్న 8 మంది విద్యార్థులకును, ఆ పరీక్షలోనే క్రమమున 42, 38, 36, 37, 20, 15, 18, 29 ని వచ్చెను అనుకో. రెండు స్కూళ్ల ఫలితములను పోల్చి ఏ స్కూలు ఎక్కువ పనిచూపినదో చెప్పవలెను. ఇందుకు, ఒకేస్కూలులోని బాలురందరును సమానమైన తెలివితేటలుగలవారు అయినపక్షమున, మార్కుల మొత్తములో మార్పులేకుండ, ఒకొక్కనికి ఏమివచ్చునో కట్టి, అట్లే రెండవదానికి కట్టి, పోల్చి చూచుటయే పద్ధతి.

మొదటి స్కూలులోని 6 గురు బాలురయొక్కయు మార్కుల మొత్తము $=30+45+24+38+35+15$.

$\therefore$ (అందరి తెలివితేటలును సమములైనప్పుడు) ఒకొక్కనికి వచ్చునది

$$\frac{30+45+24+38+35+15}{6}, \text{ అనగా, } \frac{187}{6} \text{ లేక } 31\frac{1}{6} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

అట్లే, అందరి తెలివితేటలును సమములైనప్పుడు రెండవ స్కూలులో ఒకొక్కనికి వచ్చునది

$$\frac{42+38+36+37+20+15+18+29}{8}=\frac{235}{8}=29\tfrac{3}{8}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

మొదటి స్కూలే ఎక్కువపని చూపినదని విశదమైనది. (1), (2) లు సూచించు ఫలితములను క్రమమున, ఒకొక్క స్కూలులోని ఇంగ్లీషు శాస్త్ర విషయపు సగటుమార్కు అందురు.

ఒకే తరహారాసులు అనేకమున్నపుడు (వాటిలో అధనుము ఏ రెండో అసమములు కావలెను) ప్రతి రాశికిని ఇతరమైన ఏ ఒకేరాశి ఆ దేశముగ వేసినచో ఇప్పటి రాసుల మొత్తము అసలురాసుల మొత్తమునకు సమమగునో అట్టి

రాశిని నిర్ధరించుటకే "సగటు కట్టుట" అందురు. రెండు మొత్తములను సమీకరణముచేసి కట్టెడి ఆ రాశినే "సగటు" అందురు. దానినే "అంక గణిత మధ్యమము" అని కూడ అందురు.

సూచన: —(1) సగటు = $\dfrac{\text{అన్ని రాసులయొక్కయు మొత్తము}}{\text{రాసుల సంఖ్య}}$.

(2) సగటు × రాసుల సంఖ్య = అన్ని రాసుల యొక్కయు మొత్తము.

(3) సగటు అనునది రాసులలో మహత్తమ అధమముల సందుననుండును.

58. పైదానిలో మొదటి స్కూలుయొక్క సగటు ఇట్లు కట్టవచ్చు: రమారమిగా ఏదో 30 వంటిది సగటు అనుకో. అనుకొని ప్రతి సంఖ్యను సగటుయొక్క సంబంధములో చెప్పుము:—

	ఎక్కువో, తక్కువో	
$30=30+0$	0	
$45=30+15$	$+15$	
$24=30-6$	-6	∴ 30 కంటె అసలు సగటు
$38=30+8$	లేక, ఇంకను సూక్ష్మముగా, $+8$	యొక్క పెచ్చు $=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$.
$35=30+5$	$+5$	
$15=30-15$	-15	∴ కోరిన సగటు $=31\frac{1}{6}$.
	$+7$	

$\therefore\ 30+45+24+38+35+15=6\times30+0+15-6+8+5-15=6\times30+7.$

$\therefore\ \dfrac{30+45+24+38+35+15}{6}=30+\frac{7}{6}=30+1\frac{1}{6}=31\frac{1}{6}.$

వరా:—అనుకొనిన సగటునకు ప్రతి రాశియొక్కయు పెచ్చునుగాని, లోటునుగాని వేసికొని, ఆ పెచ్చు, లోటుల బీజగణితపు మొత్తమును రాసులసంఖ్యచే భాగించి, భాజితమును అనుకొనిన సగటునకు బీజగణితాత్మకముగ కలిపినచో, కోరిన సగటువచ్చును.

59. p ఫలితములయొక్క సగటు x అయి, q ఫలితములది y అగుచో, అన్ని ఫలితములయొక్కయు సగటు $\dfrac{px+qy}{p+q}$.

కారణము.—p ఫలితములయొక్క మొత్తము px.

q ,, ,, qy.

∴ $(p+q)$,, ,, $px+qy$.

∴ $(p+q)$ ఫలితములయొక్కయు సగటు $\dfrac{px+qy}{p+q}$.

60. p ఫలితములయొక్క సగటు x అయి, q ఫలితములది y అగుచో; మిగత ఫలితములయొక్క సగటు $\dfrac{px-qy}{p-q}$.

కారణము.—p ఫలితములయొక్క మొత్తము px.

q ,, ,, qy.

∴ $(p-q)$,, ,, $px-qy$.

∴ $(p-q)$ ఫలితములయొక్క సగటు $\dfrac{px-qy}{p-q}$.

మాదిరి నెం. (1) ఒక స్కూలులో ఒక వారములో రోజువారీ సగటు హాజరు 665. సోమవారము హాజరు 650; మంగళవారము 660; బుధవారము 680; గురువారము 692. శుక్రవారము హాజరు కట్టుము.

న్యాసము. సూచన నెం. (2) ను బట్టి, సగటు×5 (వారములో స్కూలు రోజులు అయిదే గనుక)=5 రోజుల హాజరులయొక్కయు మొత్తము.

∴ సోమవారముయొక్క+మంగళ. యొక్క+బుధ. యొక్క+గురు. యొక్క+శుక్ర. యొక్క హాజరుల మొత్తము=665×5=3325.

కాని మొదటి నాలుగు రోజులలోను కలిపి హాజరు=650+660+680+692=2682.

∴ శుక్రవారము హాజరు=3325−2682=643.

మాదిరి నెం. (2) 30 మందిగల ఒక క్లాసు బాలుర సగటు పొడుగు 4 అ. $0\frac{1}{6}$ అం. వారిలో కెల్ల మరీ ఎత్తరిగానున్న ఆరుగురియొక్క సగటు 4 అ. 11 అం., మరీ కురుచగానున్న 10 మందియొక్క సగటు 3 అ. 6 అం. తక్కిన వారి పొడుగులయొక్క సగటు కట్టుము.

న్యాసము. 30 మందియొక్క సగటు పొడుగు=4 అ. $0\frac{1}{6}$ అం.

∴ ఆ 30 మందియొక్క పొడుగులకును మొత్తము=(4 అ. $\frac{1}{6}$ అం.)×30=120 అ. 6 అం. ....(1).

అందు, మరీ ఎత్తరివారల సగటు పొడుగు=4 అ. 11 అం.

∴ ఆ ఆరుగురియొక్క పొడుగులకును మొత్తము=4 అ. 11 అం.×6 =29 అ. 6 అం.......................................(2).

ఇంక, మరీ కురుచవారల సగటు పొడుగు=3 అ. 6 అం.

ఆ పదిమందియొక్క పొడుగులకును మొత్తము=3 అ. 6 అం.×10= 35 అ. 0 అం.......................................(3).

∴ మిగతవారగు 30—6—10 అనగా 14 మందియొక్క పొడుగులకును మొత్తము=120 అ. 6 అం.—29 అ. 6 అం.—35 అ. 0 అం.=56 అ.

∴ మిగత వారి సగటు పొడుగు$=\frac{56}{14}=4$ అ.

అభ్యాసము 13.

1. ఒక "క్రికెట్" ఆటలో ఒక జట్టునకు వంతులు వచ్చినప్పుడు, క్రమమున, 82, 75, 39, 18, 12, 10, 3, 1, 5, 0, 2 పరుగులు లెక్కకు వచ్చెను. సగటు "స్కోరు" కట్టుము.

2. స్కాట్లండుయొక్క భూఫలము (ద్వీపములు సహా) 29, 797 చ. మైళ్లు. ఈ దిగువ పట్టీలో కొన్ని కొన్ని ఏళ్లలో దాని జనాభా ఇచ్చి ఉన్నది:—

సంవత్సరము	జనాభా	చ. మైలునకు జనసంఖ్య
1861	3,062,294	...
1871	3,360,018	...
1881	3,735 573	...
1891	4,025,647	...
1901	4,472,103	...
1911	4,760,904	...

ఇచ్చియున్న ప్రతి సంవత్సరమునను చ. మైలు 1-కి సగటు జనసంఖ్యను, ఒకట్లకు సరిగ కట్టుము. అదిగాక 1861-వ సం॥ లగాయతు 1911-వ సం॥ వరకును ఉన్న కాలములో చ. మైలు 1-కి సగటు జనసంఖ్య ఎంత?

3. 1911 సం॥ లో ఇండియాలోని నగరముల తాలూకు జనసంఖ్యలు ఇవి:—

నగరముయొక్క తరగతి	నగరముయొక్క జనసంఖ్య	నగరముల సంఖ్య	మొత్తపు జనాభా
1	100,000 పైన	30	7,075,782
2	50,000—100,000	45	3,010,281
3	20,000—50,000	181	5,545,820
4	10,000—20,000	442	6,163,954
5	5,000—10,000	848	5,944,503
6	5,000 లోపు	607	2,007,888

(*a*) ఒకొక్క తరగతి నగరముయొక్క సగటు జనసంఖ్య ఎంత? ఒకొక్క నగరముయొక్క సగటు జనసంఖ్య ఎంత?

4. యస్. యస్. యల్. సి. పబ్లిక్ పరీక్షకు ఒక స్కూలునుండి పదార్థ విజ్ఞానశాస్త్రములో పదిమంది వెళ్లగా, వారికి ఈ క్రింది మార్కులు వచ్చెను:—

వెళ్లినబాలుడు	ఆచరణభాగము 100	శాస్త్రభాగము 100	వెళ్లినబాలుడు	ఆచరణభాగము 100	శాస్త్రభాగము 100
A	53	48	F	64	26
B	64	36	G	98	72
C	32	40	H	12	38
D	78	22	K	14	26
E	36	14	L	16	28

(*a*) శాస్త్రభాగపు పేపరులోను, (*b*) ఆచరణభాగ పరీక్షలోను, (*c*) పదార్థ విజ్ఞానశాస్త్రములోను, సగటు మార్కును కట్టుము. ఎంతమంది సగటునకు పైనున్నారు, ఎంతమంది దిగువ?

5. ఒక స్కూలు దసరాకు 16 రోజులపాటు మూసివేయుచు బాలురకు గణితములో ఇంటికి "వర్కు" ఇచ్చినారు. ఒక బాలుడు కప్పదాటుగా పని చేయువాడు. మొదటి మూడు రోజులును అతడు "వర్కు" ముట్టుకొనలేదు, తరువాత నాలుగు రోజులు క్రమమున 20, 25, 30, 15 లెక్కలు అతడు చేసెను. పిదప అయిదు రోజులు అతడు మాట్లాడక ఊరుకొనెను. చివర నాలుగు రోజులలోను క్రమమున 30, 35, 10, 35 లెక్కలుచేసి, అతడు మెట్టుకి పని అయినది అనిపించెను. ఒకొక్క రోజున సగటున ఎన్ని లెక్కలు చేయగలందులకు మేష్టరు ఆ "వర్కు" ఇచ్చి ఉండును?

6. ఒక స్కూలులో 6-వ ఫారము 5 ఖండములుగా నున్నది. ఆయా ఖండముల మేష్టర్లు, "ఇంగ్లీషు" అనెడి విషయములో ఈ క్రింది మార్కులు వేసినారు:—

6-వ ఫారము	బాలుర సంఖ్య	సగటు మార్కు
A ఖండము ...	38	నూటికి 32·5
B ,, ...	36	,, 35·6
C ,, ...	32	,, 30·4
D ,, ...	30	,, 34·3
E ,, ...	40	,, 36·3

6-వ ఫారము మొత్తమునకు "ఇంగ్లీషు"లో సగటు శాతము కట్టుము. (ఒక దశాంశమునకు సరిగ.)

7. ఒక స్కూలులో ఒకొక్కడు వాయిదా 1-కి రూ. 6—8—0 చొప్పున జీతమిచ్చెడి 4-వ ఫారములో 298 మందియు, ఒకొక్కడు వాయిదా 1-కి రూ. 6—12—0 చొప్పున చెల్లించెడి 5-వ ఫారములో 196 మందియు, ఒకొక్కడు వాయిదా 1-కి రూ. 7—0—0 చొప్పున కట్టెడి 6-వ ఫారములో 192 మందియు ఉన్నారు. స్కూలునకు వాయిదా 1-కి బాలుని 1-కి జీతములవల్ల సగటు రాబడి కట్టుము. జీతమంతయు సాలునకు 8 వాయిదాలలో వసూలుచేసినచో, నెల 1-కి మొత్తపు జీతములవల్ల సగటు రాబడి కట్టుము.

8. సాగయ్యెడి నేలకు పన్ను రెండు తరహాలుగా నున్నది:—(*a*) పెద్ద పెద్ద ఎస్టేటులున్న జమీందారుల విషయములోవలె శాశ్వతపరిష్కారపు పంఫిణీ ఒకటి, (*b*) మధ్యప్రమేయములు లేకుండ దొరతనమునుండి సాక్షాత్తుగ నేల తీసికొనిన రైతులలోవలె రైతువారీ పంఫిణీ ఒకటి. పై రెండు బాపతుల క్రిందను తీసిన "ల్యాండు రివిన్యూ" ఈ క్రిందిపట్టీలో ఇచ్చి ఉన్నది:—

శాశ్వత పరిష్కారపు లేక జమీందారీ పంఫిణీ.

కొలిచిన భూమి:—	రివిన్యూ
ఎకరములు	పౌ.
మెడ్రాసు 23,851,994	532,962

రైతువారీ పంఫిణీ.

ఎకరములు	పౌ.
మెడ్రాసు 61,285,412	3,953,288.

ఇండియా సొమ్ములో ఎకరము 1-కి సగటు నేలపన్నును, (*a*) శాశ్వత పరిష్కారపు పంఫిణీలోను, (*b*) రైతువారీ పంఫిణీలోను, (*c*) రెండు పంఫిణీల లోను కలిపియు కట్టుము. 1 పౌ.=15 రూ. అనుకో.

9. మూడు జిల్లాలలోని వరిపంటభూముల భూఫలములు ఎకరములలో ఈ క్రింద ఇచ్చి ఉన్నవి:—

జిల్లా నెం	పల్లపుభూమియొక్క ఎకరముల సంఖ్య	ఎకరము 1-కి పన్ను రేటు	మెరకభూమియొక్క ఎకరముల సంఖ్య	ఎకరము 1-కి పన్ను రేటు
		రూ.		రూ.
1	5,300,000	10	843,000	8
2	6,420,000	12	1,023,000	6
3	8,936,000	9	489,000	4

పై దానినిబట్టి ఈ క్రింది ఫలితములను, అణాకు సరిగ కట్టుము:—

(*a*) 1-వ జిల్లాలో ఎకరము 1-కి సగటు నేలపన్ను.

(*b*) 2-వ జిల్లాలో ఎకరము 1-కి సగటు నేలపన్ను.

(*c*) 3-వ జిల్లాలో ఎకరము 1-కి సగటు నేలపన్ను.

(*d*) మూడు జిల్లాలకును కలిపి ఎకరము 1-కి సగటు నేలపన్ను.

(*e*) మూడు జిల్లాలకును కలిపి పల్లపుభూమిపై ఎకరము 1-కి సగటు నేలపన్ను.

(*f*) మూడు జిల్లాలకును కలిపి మెరకభూమిపై ఎకరము 1-కి సగటు నేలపన్ను.

10. బొంబాయిలో భారమితియొక్క దినపాఠములు ఒక నెలపాటు తీయగా ఇట్లున్నవి:—

దినము	పాఠము	దినము	పాఠము	దినము	పాఠము
1	29·662	11	29·688	21	29·720
2	29·591	12	29·696	22	29·743
3	29·600	13	29·862	23	29·701
4	29·673	14	29·770	24	29·717
5	29·685	15	29·874	25	29·782
6	29·724	16	29·839	26	29·776
7	29·741	17	29·767	27	29·790
8	29·760	18	29·763	28	29·810
9	29·719	19	29·742	29	29·843
10	29·684	20	29·698	30	29·769

దినపాఠములయొక్క మధ్యమమును, అంగుళములో వెయ్యవవంతునకు సరిగ కట్టుము. దానికి ఈ క్రింది రోజుల పాఠములు హెచ్చో, తగ్గో వ్రాయుము: 5-వ నాటిది, 8-వ నాటిది, 15-వ నాటిది, 29-వ నాటిది.

11. సౌత్ ఇండియన్ రైల్వేయొక్క కాలానుక్రమణికలో ఈ దిగువ విశేషములున్నవి:—

బీచ్ నుండి దూరము (మైళ్లలో)	నెం. 3 రామేశ్వరం ఎక్స్‌ప్రెస్	గంటలు	బీచ్ నుండి దూరము (మైళ్లలో)	నెం. 4 రామేశ్వరం ఎక్స్‌ప్రెస్	గంటలు
2	మెడ్రాసు (ఎగ్మోరు) వీడుట	6–55	102	విల్లుపురం వీడుట	15–10
36	చెంగల్పట్టు చేరుట	8–55	36	చెంగల్పట్టు చేరుట	17–57
	వీడుట	9–15		వీడుట	18– 9
102	విల్లుపురం చేరుట	12– 3	2	మెడ్రాసు (ఎగ్మోరు) చేరుట	20– 5

(*a*) మెడ్రాసు చెంగల్పట్టుల మధ్య దూరమును నెం. 3, నెం. 4 లలో ఒక్కొక్కటి ఎంత సగటు వేగముతో నడచునో కట్టుము.

(*b*) చెంగల్పట్టు విల్లుపురముల మధ్య దూరమును నెం. 3, నెం. 4 లలో ఒక్కొక్కటి ఎంత సగటు వేగముతో నడచునో కట్టుము.

(*c*) ఎగ్మోరు విల్లుపురముల మధ్య దూరమును నెం. 3, నెం. 4 లలో ఒక్కొక్కటి (i) ఆగుటలు గమనింపనప్పుడును, (ii) ఆగుటలు కూడ గమనించునప్పుడును, ఎంతెంత సగటు వేగముతో నడచునో కట్టుము.

12. ఒక సున్నపు గానుగసంగతి పరీక్షపట్టి చూడగా, గానుగలాగెడి ఎద్దు 5 చుట్లు 4 నిమిషములలోను, 10 చుట్లు 9 నిమిషములలోను, 15 చుట్లు 13 నిమిషములలోను, 20 చుట్లు 18 నిమిషములలోను, 30 చుట్లు 28 నిమిషములలోను, 45 చుట్లు 44 నిమిషములలోను, 60 చుట్లు 1 గంటలోను తిరుగుట కానవచ్చెను. ఎద్దు తాలూకు ఈ వేగముల సగటు కట్టుము.

13. 40 మందిగల ఒక క్లాసులో, ముగ్గురికి 0 చొప్పునను, 10 మందికి 15 చొప్పునను, 8 మందికి 24 చొప్పునను, 7 మందికి 17 చొప్పునను, 5 మందికి 35 చొప్పునను, ముగ్గురికి 38 చొప్పునను, ఒకనికి 41 యు, ఒకనికి 45 ను మార్కులు వచ్చెను; ఇద్దరు గైరుహాజరు అయిరి. క్లాసుయొక్క సగటు కట్టుము. ఎంతమంది సగటుకు పైవారు? ఎందరు దిగువవారు?

14. 5·3″ వ్యాసముగల ఒక వృత్తపు పరిధిని నలుగురు విద్యార్థులు విభాగినిచే కొలిచి, ఫలితములు 16·54″, 16·58″, 16·60″, 16·68″ అని ఇచ్చిరి. (పరిధి వ్యాసముల నిష్పత్తియగు) π యొక్క సగటు విలువ కట్టుము. 5-వ విద్యార్థికి 16·64″ అను ఫలితము వచ్చినచో, సగటు ఎట్లు మారును?

15. "సర్వే" కొలతలు నేర్చుకొనుచున్న నలుగురు 100 అ. గొలుసుతో ఒక 100 గజముల దూరమును వేర్వేరుగ కొలిచి దాని పొడుగు 299·5′, 299·8′, 300·3′, 301·1′ అని క్రమమున అనిరి. ఈ ఫలితములయొక్క సగటు అసలు దూరముతో ఏమాత్రము భేదించును?

16. ఒక తేలికవస్తువు తాలూకు 5 స్తంభాకారపు ముక్కలను నీటిలో తేలనిచ్చి పరీక్షించినపుడు క్రమమున వాటియొక్క $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{11}{24}$, $\frac{23}{47}$, $\frac{93}{188}$-వ భాగములు నీటిపైకి ఉండెను. ఆ వస్తువుయొక్క సగటు తారతమ్యగరిమ కట్టుము. (వస్తువుయొక్క జలాంతర్గతభిన్నమే ఆ వస్తువుయొక్క తారతమ్యగరిమకు ప్రమాణమని గమనింపుము.)

17. మెడ్రాసులో 5 వరుసరోజుల ఉష్ణక్రమము పరీక్షింపగా మొదటి రోజుది మామూలునకు 5° పైనను, రెండవరోజుది మామూలునకు 3° దిగువను, మూడవరోజున మామూలునకు ర° దిగువను, నాలుగవరోజున మామూలును (ఆ ఋతువుయొక్క), అయిదవరోజున మామూలునకు 7° పైనను ఉండెను. ఆ ఋతువుయొక్క మామూలు ఉష్ణక్రమము 90° అయినచో, ఆ అయిదురోజులయొక్కయు సగటు ఉష్ణక్రమము కట్టుము.

18. ఒక లోలకపు ప్రయోగములో తేలిన ఫలితములు ఈ దిగువపట్టీలో ఇచ్చి ఉన్నవి:—

నెం	లోలకపు పొడుగు (l)	50 ఊపుల కాలము	ఒక ఊపు కాలము (t)	t^2	$\frac{l}{t^2}$
1	83·13 సెం.మీ.	92 సె.			
2	76·53 ,,	87 ,,			
3	68·13 ,,	82 ,,			
4	107·23 ,,	105 ,,			
5	99.93 ,,	100 ,,			
6	129.53 ,,	113 ,,			
7	117·93 ,,	108 ,,			
8	122·53 ,,	111 ,,			

ఖాళీ నిలువులను పూర్తిచేయుము. ప్రతి సందర్భమును తీసికొని $g = 4\pi^2 \frac{l}{t^2}$ (దీనిలో $\pi = 3·1416$) అను సంకేత సూత్రమునుబట్టి, g యొక్క సగటు విలువ కట్టుము. $\frac{l}{t^2}$ అనుదాని సగటు విలువకూడ కట్టుము.

19. నైలుమీదనున్న "అస్సూయన్ జలరాశి"లో, ఆవిరియై హరించిన జలముయొక్క సగటు జనవరినుండి ఏప్రిలువరకు 0·195", మేనుండి సెప్టెంబరు

వరకు 0·394", అక్టోబరునుండి డిసెంబరువరకు 0·22". సాలు మొత్తమునకు సగటు జలహరణమును కట్టుము.

20. 5 అంతస్థుల ఒక మేడలో అద్దె, పైకి వెళ్లిన కొద్దియు 30 రూ. చొప్పున హెచ్చుగానున్నది. అట్టడుగు అంతస్థుయొక్క అద్దె 150 రూ. అగుచో, అంతస్థు 1-కి సగటు అద్దె కట్టుము.

21. చిల్లరిని అమ్మెడు ఒక బట్టలవర్తకుడు గజము 1 రూ. చేసి 15 గజముల ట్వీల్లు కొని, $3\frac{1}{2}$ గ. 3 రూ. లకును, $4\frac{3}{4}$ గ. రూ. 6—4—0 కును, 5 గ. రూ. 7—8—0 లకును, తక్కినది రూ. 3—4—0 కును అమ్మెను. గజము 1-కి అతని సగటు లాభము కట్టుము.

22. ఒక సైకిలిస్టు ఇల్లు బయలుదేరి, 20 నిమిషములలో $3\frac{1}{2}$ మైళ్లు తొక్కుసరికి ఒక బళ్లఘాటీ వచ్చెను. అతడు అక్కడ 5 నిమిషములు ఆగి, బయలుదేరి 25 నిమిషములలో 5 మైళ్లు తొక్కినపిదప సైకిల్ గొలుసు ముళ్ల చక్రమునుండి జెసికిపోయెను. 2 నిమిషములలో అతడు దానిని తిన్నపరచి, అక్కడకు $2\frac{1}{2}$ మైళ్లున్న తన గమ్యస్థానమును 10 నిమిషములలో జేరుకొనెను. 13 నిమిషముల తర్వాత అతడక్కడ బయలుదేరి 1 గంటలో ఇల్లుచేరెను. (a) ఆగుటలు గమనించుచు, (b) ఆగుటలు గమనింపకుండ, అతని మొత్తపు ప్రయాణములో సగటు వేగము కట్టుము.

23. ఒక హొటలు మేనేజరు మనిషికి నెలకు 14 రూ. పుచ్చుకొనును. భోజనముచేయుచున్న 210 మందిలో, 20 మంది 6 రోజులవరుసను రాలేదు, 8 మంది 18 రోజులే వచ్చినారు. రానిరోజులలో మూడవరోజు తర్వాత రోజులకు, రానివారికి రోజు 1-కి మనిషికి 10 అ. చొప్పున అతడు ముదరా యిచ్చుచు, ఆ నెలలో 20 కంటె తక్కువరోజులు వచ్చినవారి దగ్గర అతడు మనిషి 1-కి రోజు 1-కి 10 అ. వసూలుచేయుచు, ఆ నెలలో 200 రూ. లాభము తీసినచో, మనిషి 1-కి సగటున అతనికి ఎంత ఖర్చు అయ్యెను?

24. ఒక నగరములో మనిషికి, రోజు 1-కి నీటియొక్క సగటు సప్లయి 25 గాలనులు. నగర జనసంఖ్య 53,735. కాని, ఒక తీర్థసమయమున పొరుగూళ్లనుండి 24,300 మంది నగరములో వచ్చి పడుటవల్ల గంట 1-కి 3,240 ఘ. అ. చొప్పున అధికముగ జలము సప్లయి కావలసివచ్చెను. తీర్థపు రోజులలో మనిషికి రోజు 1-కి సగటు నీటిసప్లయి కట్టుము. [1 ఘ. అ.= $6\frac{1}{4}$ గాలన్లు.]

25. AB, AC అను సరళరేఖలు ఏదో కోణము చేయును. PM=MQ అగునట్లు AB మీద P, M, Q అను బిందువులను తీసికొనుము. P, M, Q ల నుండి AC కి లంబముగ Pp, Mm, Qq అను రేఖలు గీయుము. Mm అనునది Pp, Qq లకు సగటు అనగా అంకగణితమధ్యమము అని కొలతచే నిరూపింపుము.

26. ABC అనునది ఒక త్రిభుజము. AD=DE=EB అగునట్లు, D, E లు AB మీది బిందువులు. D, E లనుండి, BC కి సమానాంతరముగ AC ని F, G లవద్ద ఖండించెడి DF, EG లు గీయుము. EG అనునది DF, BC లకు అంకగణిత మధ్యమమని కొలతచే నిరూపింపుము.

27. AB అనునది ఒక సరళరేఖ. D అనునది AB లో ఏదో బిందువు. AD, DB ల సగటును అనగా అంకగణిత మధ్యమమును కట్టుము.

28. AB అనునది D వరకు పెంచిన ఒక సరళరేఖ. AD, DB ల సగటును అనగా అంకగణిత మధ్యమమును కట్టుము.

29. ఈ క్రిందివాటిలో సగటు కట్టుము:—

(*a*) $a+b+c,\ a+b-c,\ b+c-a,\ c+a-b.$

(*b*) $3a+2b-c,\ 3b+2c-a,\ 3c+2a-b.$

(*c*) $x+y+z-w,\ y+z+w-x,\ z+w+x-y,\ w+x+y-z.$

(*d*) $1+a,\ 1+b,\ 1+c,\ 1-a,\ 1-b,\ 1-c.$

30. నలుగురన్నదమ్ముల సగటు నెలసరి రాబడి 150 రూ. మొదటి ఇద్దరియొక్కయు సగటు నెలసరి రాబడి 160 రూ. మూడవవాడు 135 రూ. తెచ్చినచో, నాలుగవవాడు ఏమి తెచ్చును?

31. 5 పుస్తకముల సగటు వెల రూ. 5—8—0. వాటిలో మూడింటి సగటు వెల రూ. 6—4—0. నాలుగవది రూ. 5—0—0 అయినచో, అయిదవది ఎంత ఖరీదు?

32. ఒక బాలుడు నాలుగు సంఖ్యలను చూచి వేసికొనుటలో ఒక సంఖ్యను తారుమారుగా ఎక్కించుకొనుటవల్ల, వాటి సగటు అసలుసగటు కంటె 9 హెచ్చువచ్చెను. ఆ సంఖ్యలో ఒక అంకెకు రెండవ అంకె రెట్టింపు అయినచో, ఆ సంఖ్య కట్టుము.

33. ఒక జూదరి సోమవారము 8 అ. ను, మంగళవారము 11 అ. ను, బుధవారము 6 అ. ను లాభము కొట్టెనుగాని గురువారము 13 అ. నష్టపోయెను. శుక్రవారము అతనికి లాభనష్టములు లేకుండెను, శనివారము

1 రూ. నష్టము వచ్చెను. ఆ వారములో అతనికి సగటున రోజు 1-కి 4 అ. లాభము అయినచో, ఆదివారమునాడు అతనికి ఎంత లాభము? కాకున్న ఎంత నష్టము?

34. అయిదుగురు అన్నదమ్ముల సగటు రాబడి 235 రూ. వారిలో ఒకడు గతించెను. ఇంకొకనికి కాయిలా చేయుటవల్ల, సగము జీతముమీద సెలవు మంజూరయ్యెను. తక్కినవారిలో ఇద్దరికి పదేసి రూపాయలచొప్పున జీతము ఎక్కువ అయ్యెను. అయిదవవాని జీతము 20 రూ. తగ్గెను. ఈ మార్పుల తర్వాత ఆ సంసారముయొక్క సగటు రాబడి 200 రూ. గతించినవాని రాబడి 125 రూ. అయినచో, కాయిలావాని రాబడి కట్టుము.

35. కొంతమంది మగకూలీలకును అంతేమంది ఆడకూలీలకును కలిపి 22 రూ. కూలివచ్చెను. సగటున మగవానికి 15 అ. 6 పై. చొప్పునను సగటున ఆడుదానికి 6 అ. 6 పై. చొప్పునను కూలియైనచో, వాళ్లెందరు వీళ్లెందరు?

36. మనుష్యుని సగటు బరువు 14 స్టోనులు అయినప్పుడు గుఱ్ఱము నలుగురు కూర్చున్న జట్కాను లాగును. ముగ్గురిలో ప్రతివాడును నాలుగవవానికి $2\frac{1}{2}$ రెట్లు బరువు ఉన్నచో, నాలుగవవాని బరువు కట్టుము.

37. 25 ఏళ్లకుమించిన వయస్సుగలవాడు ఎప్పుడును గవర్నమెంటు నౌకరీలో చేరజాలడు. గవర్నమెంటు ఉద్యోగములలో కుదురుకొన్న 5 గురు స్నేహితులయొక్క సగటు వయస్సు 23 ఏళ్లు 7 నెలలు. వీరి తాలూకు స్నేహితుడగు ఆరవవాడు కూడ గవర్నమెంటులో చేరినచో అందువల్ల మారిన వీరందరియొక్కయు సగటు వయస్సు 23 ఏళ్లు $9\frac{1}{6}$ నెలలకు మించజాలదని నిరూపింపుము.

38. 100, 150 అను రెండు సంఖ్యలున్నవి. వీటి సందుననుండు సంఖ్యనొకదానిని కట్టవలయును. అదే మూడు సంఖ్యలకును సగటు కావలయును. 100 బదులు a, 150 బదులు b అని ఎసికొనినచో, ఫలితము ఎంత?

39. 20, 30, 56, x ల సగటు 30. x కట్టుము.

40. $x+30$, $2x-40$, $x-30$, $2x+50$ ల సగటు కట్టుము. ఆ సగటు 16 అయినచో, x కట్టుము.

41. 1916 మొదలు 1920 సం॥ వరకు 5 వరుససంవత్సరములలోను ఒక చోట కురిసినవాన 24·9″, 29·3″, 28·4″, 30·4″, 23·9″. ఈ అయిదు ఏళ్లలోను కురిసిన సగటు వాన కట్టుము. 1915—1920 సంవత్సరముల సగటు వాన 25″ అయినచో, 1915 సం॥లో కురిసినవాన కట్టుము.

42. ఒక త్రిభుజములోని ఒక కోణము కడమ రెండింటియొక్కయు సగటు. ఆ రెండును 3:2 నిష్పత్తిలో నున్నచో, మూడింటి విలువలను కట్టుము.

43. ఒక చతుర్భుజములోని ఒక కోణము కడమ మూడింటియొక్కయు సగటు. ఆ మూడును 4:3:2 అను నిష్పత్తిలో నున్నచో, నాలుగింటి విలువలను కట్టుము.

44. x అనునది రెండు రాసులగు a, b లకు సగటు. అదియే రెండు రాసులగు c, d లకు కూడ సగటు. $a+b=c+d$ అని నిరూపింపుము.

45. కొంత "మేటరు", అచ్చులో, పంక్తికి సగటున 11 మాటలున్నప్పుడు 10 పేజీలు ఉండును. అదే పంక్తికి సగటున 16 మాటలుండి. పేజీ 1-కి 2 పంక్తులు తగ్గినపుడు $7\frac{1}{2}$ పేజీలు ఉండును. పేజీకి ఎన్ని పంక్తులు?

అధ్యాయము XIV.
శాతములు.

61. "శాతము" అనగా వందయే హారముగాగల భిన్నము. ప్రతి భిన్నమును హారము 100 అగునట్లు మార్చవచ్చును.

ఉదా. $\frac{1}{2}=\frac{1\times50}{2\times50}=\frac{50}{100}=50$, నూటికి (నూటికి 50 అని ఉచ్చరింపుము.)

అట్లే, $\frac{3}{4}=\frac{3\times25}{4\times25}=\frac{75}{100}=75$, నూటికి.

„ $\frac{7}{8}=\frac{7\times12\frac{1}{2}}{8\times12\frac{1}{2}}=\frac{87\frac{1}{2}}{100}=87\frac{1}{2}$, నూటికి.

మాదిరి (1) $\frac{20}{51}$ ని శాతముగా చెప్పుము.

శాతమనగా, 100 హారముగాగల భిన్నాంకము గనుక, దాని లవము x అనుకో, (హారము 100.)

$$\therefore \frac{20}{51}=\frac{x}{100}.$$

$$\therefore x=\frac{20}{51}\times100=\frac{2000}{51}=\frac{666\cdot66}{17}\cdots\cdots=39\cdot22\ldots\ldots \text{ నూటికి.}$$

మాదిరి (2) నూటికి $26\frac{1}{4}$ ను భిన్నాంకముగా మార్చుము.

$$\text{నూటికి } 26\tfrac{1}{4}=\frac{26\frac{1}{4}}{100}=\frac{105}{4}\times\frac{1}{100}=\frac{21}{80}.$$

62. ఇద్దరు వర్తకులు వ్యాపారములమీద హెచ్చుతగ్గుగ పెట్టుబడులు పెట్టి హెచ్చుతగ్గుగ లాభములు తీసినప్పుడు అన్యోన్యముగ వారి లాభముల రేట్లు ఎట్లున్నవో పోల్చి చెప్పుటకు, ఒకొక్కడు నూటికి ఎంత లాభము తీసెనో చూచుటయే పద్ధతి.

A అను వర్తకుడు 4,000 రూ. పెట్టి వ్యాపారముచేసి 250 రూ. లాభము తీసెను. B అను మరియొకడు 150 రూ. పెట్టి వ్యాపారముచేసి 12 రూ. లాభముతీసెను అనుకో.

A తాలూకు శాతలాభము x అనుకో.

అప్పుడు, $\frac{x}{100}=\frac{250}{4000}$. $\therefore x=\frac{250}{4000}\times100=6\frac{1}{4}$ నూటికి.

B తాలూకు శాతలాభము y అనుకో.

అప్పుడు, $\frac{y}{100}=\frac{12}{150}$. $\therefore y=\frac{12}{150}\times100=8$ నూటికి.

∴ B యొక్క లాభపురేటు ఎక్కువది.

ఆ రీతిగనే, రెండు నగరములలోని జనసంఖ్యలయందలి వృద్ధిక్షయముల రేటులనుగాని, రెండు స్కూళ్లలోని పిల్లల మొత్తములయొక్క వృద్ధిక్షయముల రేటులనుగాని, పోల్చవలసివచ్చుచుండును. అప్పుడు వృద్ధిక్షయములయొక్క ఆయా రేటులను శాతములుగ మార్చి, పోల్చి చూచుటయే ఉత్తమపథము. వృద్ధిక్షయముల రేటులయొక్క సంబంధము లేకుండకూడ, 'శాతము' అనునది మామూలు వ్యవహారములలో వచ్చుచుండును. ఉదా: వడ్డీరేటు, 'బ్రోకరు'కు ఇచ్చెడి కమిషనురేటు, రొక్కము చెల్లబెట్టి కొనుక్కొనేవానికి "డిస్కౌంటు" రేటు—ఇవన్నియు నూటికి ఇంత అని, శాతముగనే అందరు చెప్పుచుందురు. ఈ రీతిగ వ్యవహారపు లెక్కలలో శాతము అనునది ఉపయోగకరము.

మాదిరి (3) మగచోరీలలోను, ఆడచోరీలలోను కలిపి వృద్ధి 1·8 నూటికి. మగచోరీలలో మాత్రము 4·6 నూటికి క్షయము. ఆడచోరీలలో 9·8 నూటికి వృద్ధి. మగచోరీల సంఖ్యను ఆడచోరీల సంఖ్యతో పోల్చుము.

న్యాసము. మగచోరీల సంఖ్య m అనుకో, ఆడచోరీల సంఖ్య f అనుకో.

మగచోరీలలో 4·6 నూటికి క్షయమున్నది.

అనగా, ఇదివరకు 100 మంది మగచోరీలు ఉండిన, ఇప్పుడు 100—4·6 అనగా 95·4 మంది.

$\therefore$,, m ,, ,, ,, $\frac{95\cdot4}{100}m$ మంది.

ఆడచోరీలలో 9·8 నూటికి వృద్ధి.

అనగా, ఇదివరకు 100 మంది ఆడచోరీలు ఉండిన, ఇప్పుడు 100+9·8 అనగా 109·8 మంది.

$\therefore$,, ,, ,, ,, $\frac{109\cdot8}{100}f$ మంది.

$\therefore$ మొత్తపు చోరీల ప్రస్తుత సంఖ్య $\frac{95\cdot4}{100}m+\frac{109\cdot8}{100}f$ మంది.

ప్రశ్నప్రకారము, మొత్తపు చోరీల సంఖ్యలో 1·8 నూటికి వృద్ధి ఉన్నది.

అనగా, ఇదివరకు మొత్తపు చోరీల సంఖ్య 100 అయిన, ఇప్పుడు 100+1·8 లేక 101·8.

$\therefore$ ఇదివరకు మొత్తపు చోరీల సంఖ్య $m+f$ అయిన, ఇప్పుడు $\frac{101\cdot8}{100}, (m+f)$.

$\therefore$ ప్రస్తుతము మొత్తపు చోరీల సంఖ్యలగు ఈ రెండును సమములు వలెను.

$$\therefore \frac{95\cdot4}{100}m+\frac{109\cdot8}{100}f=\frac{101\cdot8}{100}(m+f).$$
$$=\frac{101\cdot8}{100}m+\frac{101\cdot8}{100}f.$$
$$\therefore \frac{109\cdot8}{100}f-\frac{101\cdot8}{100}f=\frac{101\cdot8}{100}m-\frac{95\cdot4}{100}m.$$
$$\therefore \frac{8}{100}f=\frac{6\cdot4}{100}m.$$
$$\therefore 8f=6\cdot4\,m.$$
$$\therefore 80f=64\,m.$$
$$\therefore 64\,m=80f.$$
$$\therefore \frac{m}{f}=\frac{80}{64}.$$
$$\therefore m:f::80:64.$$
$$\therefore m:f::5:4.$$

అభ్యాసము 14 (A)

1. ఈ క్రింది భిన్నములను శాతములుగ మార్చుము:—

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}$.

2. ఈ క్రింది శాతములను భిన్నములుగ మార్చుము:—

నూటికి 20, నూటికి 25, నూటికి 30, నూటికి $12\frac{1}{2}$, నూటికి $16\frac{2}{3}$, నూటికి $33\frac{1}{3}$, నూటికి $41\frac{2}{3}$.

3. నూటికి 10-కి నూటికి 10 ఎక్కువను కట్టుము; నూటికి 20-కి నూటికి 25 ఎక్కువను, నూటికి 30-కి నూటికి 50 ఎక్కువను, నూటికి 60-కి నూటికి 40 ఎక్కువను, నూటికి 75-కి నూటికి $33\frac{1}{3}$ ఎక్కువను, అట్లే కట్టి చెప్పుము.

అభ్యాసము 14 (B)

1. ఒకని నెలసరి రాబడి 175 రూ. అతని నెలసరి ఖర్చు రూ. 157—8—0 అతని రాబడిలో ఏ శాతము అతను వెనుకవేయును?

2. 1915 సం॥లో బ్రిటిషు ఇండియాలోని జైళ్లలోనున్న మగ ఖైదీలు 119, 494 మంది, ఆడఖైదీలు 2,793. మొత్తపు ఖైదీలలో మగవాండ్ల సంఖ్యయు, ఆడవాళ్ల సంఖ్యయు ఏయే శాతములు?

3. 1917—18 సం॥లో ఇండియా గవర్నమెంటు వసూలుచేసిన మొత్తపు రివిన్యూ 98,870,800 పౌ. ఇందుకు ప్రతిగా వేసికొనిన ఖర్చు 98,735,400 పౌ. ఖర్చు రివిన్యూలో ఏ శాతము?

4. యస్. యస్. యల్. సి. పరీక్ష ఇచ్చిన 11,420 మంది అభ్యర్థుల లోను 3,564 మంది విశ్వవిద్యాలయపు తరగతులలో చేరుటకు అర్హులని ప్రకటితమైనది. మొత్తపు అభ్యర్థులలో ఏ శాతమునకు విశ్వవిద్యాలయబోధ అర్హమని తీర్మానమైనట్టు?

5. ఈ క్రింది లెక్కలు 1911 సం॥ తాలూకువి:—

		వ్రాయ, చదువ నేర్చినవారు	వ్రాయ, చదువ లేనివారు	మొత్తము
పురుషులు	...	16,938,668	143,480,620	...
స్త్రీలు	...	1,600,763	151,397,030	...

(1) స్త్రీపురుష జనాభాలలో అక్షరాస్యులైన స్త్రీపురుషులయొక్క శాతములు, క్రమమున ఎంతెంత? (2) మొత్తపు జనాభాలో (*a*) అక్షరాస్యులైన స్త్రీలు ఏ శాతము? (*b*) అక్షరాస్యులుకాని స్త్రీలు ఏ శాతము?

6. ఒక ఘన అడుగు కంకరయొక్క భారము గాలిలో 125 పౌ., నీటిలో 63 పౌ. దాని భారములో ఏ శాతము నీటిలో కనపడకుండ ఉండును? ఒక కంకరగుట్ట గాలిలో 8,750 పౌ. తూగినచో, అదే నీటిలో ఎంత తూగును? (ఈ ప్రశ్నయొక్క రెండవ భాగములో, మొదటి భాగములో వచ్చిన శాతమును వాడుము.)

7. ఒక విద్యార్థి $\frac{355}{113}$ బదులు $\frac{22}{7}$ వేసికొనినచో, అతని తప్పు నూటి కెంత?

8. మద్రాసు మహాపురపాలకసంఘము పదియేళ్ల కొకసారి ఇళ్లపన్ను పునర్నిర్ధారణ చేయుచుండును. ఒకానొక ఇంటిపన్ను 1901 సం॥లో రూ. 7—12—5; 1911 సం॥లో రూ. 19—15—11; 1921 సం॥లో రూ. 59—15—0. 1911 సం॥లో ఆ పన్ను ఏ శాతము పెరిగినది? 1921 సం॥లో ఇంకను ఏ శాతము పెరిగినది? 1901 సం॥ మొదలు 1921 సం॥ వరకు ఏకముగ చూచినచో పన్ను ఏ శాతము పెరిగినది?

9. తన ఇంటిపన్ను రూ. 22—8—0 ఉన్నప్పుడు, ఒక యజమాని తన యింటిలోని రెండు గదులు 7 రూపాయలకు అద్దికిచ్చెను. ఇంటిపన్ను రూ. 63—14—6 దాకా పెరిగినప్పుడు, అతడు గదుల అద్దె రూ. 14—8—0 అనెను.

(*a*) అద్దెలో శాతవృద్ధి ఎంత? (*b*) ఇంటిపన్నులో శాతవృద్ధి ఎంత? పన్నుయొక్క వృద్ధిరేటులో అద్దెయొక్క వృద్ధిరేటు ఏ శాతము?

10. 1876 సం॥లో రూపాయకు బియ్యము 16 పడులు. ఇప్పుడు రూపాయకు $2\frac{3}{4}$ పడులు. ఖరీదులో శాతవృద్ధి కట్టుము.

11. 1913 సం॥లో ఒక గడియారము ఖరీదు 20 రూ. ఇప్పుడు అదే రూ. 62—8—0. దాని ఖరీదులో వృద్ధియొక్క శాతము కట్టుము.

12. $3\frac{1}{2}$ గజముల పొడుగు వచ్చెడి అహమ్మదాబాద్ ధోవతీచాపు మూడేళ్ల క్రితము రూ. 6—4—0. ఇప్పుడు అది రూ. 3—12—0. దాని ఖరీదులో క్షయముయొక్క శాతము కట్టుము.

13. ప్రపంచ యుద్ధకాలములో, అనగా 1918 సం॥లో, నవరసు ఖరీదు రూ. 22—10—0. ఇటీవల అది రూ. 17—2—0. దాని ఖరీదు ఏ శాతము తగ్గిపోయినది?

14. ఒక సబ్బుకంపెనీవారు రుద్దుకొనెడివి తయారుచేయుటకు ఈ దిగువ వస్తువులు ఈ దిగువ పాళ్లలో కలిపి వాడుదురు:—

దాహకసోడా	మొత్తపు భారములో	5,	నూటికి.
కొబ్బరి నూనె	,,	40,	,,
నీరు	,,	20,	,,
సోడా	,,	5,	,,
సోడియ శైలితములు	,,	10,	,,
బలపపు రాయి	,,	$2\frac{1}{2}$,	,,
వాసనద్రవ్యములు	,,	$7\frac{1}{2}$,	,,
రంగుకాటుక	,,	10,	,,

ఒక పెట్టెలో 288 సబ్బుబిళ్లలున్నవి. వాటిభారము 72 పౌనులు. ఒకొక్క బిళ్లలో ఏ వస్తువు ఎంత ఉన్నది?

15. 10,000 రూ. చేసెడి ఒక ఇంటిమీద ఒక ఏడు నెల 1-కి 50 రూ. చొప్పునను, మరుసటి యేడు నెల 1-కి 56 రూ. చొప్పునను అద్దె వచ్చును. గృహయజమానికి పెట్టుబడిపై కిట్టెడి ఒకొక్క సంవత్సరపు వడ్డీరేటును శాతముగ చెప్పుము. మొదటి ఏడుకంటె రెండవ సంవత్సరపు వడ్డీరేటులోని వృద్ధియొక్క శాతము కట్టుము. రెండవ యేడుకంటె $12\frac{1}{2}$ నూటికి ఎక్కువగా అతనికి మూడవ ఏడు కిట్టినచో, మూడవ ఏడు అద్దె ఎంత?

16. ఒక ప్రధాన పరీక్షకుడు తన సహాయ పరీక్షకులలో నొకడు పంపిన మార్కులు పునర్నిర్ధారణ చేయుచు ఒకచోట a మార్కులు b మార్కులగునట్లు పెంచెను; మరియొకచోట c మార్కులు d మార్కులగునట్లు తగ్గించెను. మొదటి సందర్భములోని శాతవృద్ధియు, తరువాత దానిలోని శాతక్షయమును కట్టుము.

17. ట్వీల్లుగుడ్డ ఖద్దరుకంటె నూటికి $16\frac{2}{3}$ ఎక్కువ ఖరీదు, కాని నూటికి 50 ఎక్కువ కాలము మన్నును. కాలక్రమమున ఏది చౌక?

18. ఒక స్కూలు తాలూకు 4-వ ఫారములోనున్న రెండు డివిజనుల యొక్కయు మేష్టర్లు ఒక శాస్త్రములో వేర్వేరుగ క్లాసుపరీక్షలు పెట్టి, పూరా మార్కుకూడ వివిధముగ పెట్టి పేపర్లు దిద్దిరి. ఒక క్లాసులో పూరా మార్కు 80, సగటు మార్కు 25·2. రెండవదానిలో పూరా మార్కు 60, సగటు మార్కు 19·8. రెండింటిలోను ఎక్కువ పని చూపిన డివిజను ఏది? ఆ ఎక్కువను శాతముగ చెప్పుము.

19. ఒక రైతునకుగల పొలముల కిమ్మతు 25,000 రూ., అతనికి సాలుసరి రాబడి 3,000 రూ. ఒక వర్తకుడు 10,000 రూ. పెట్టి వ్యాపారము చేయును, అతని నెలసరి రాబడి 150 రూ. రాబడి రేటులలోని తేడాను శాతముగ కట్టుము.

20. మూడు స్కూళ్లనుండి 80 మందియు, 65 మందియు, 125 మందియు పరీక్షకు వెళ్లగా, క్రమమున 25 గురు, 26 గురు, 45 గురును ప్యాసైనారు. ఈ ఫలితములనుబట్టి, ఏది ఉత్తమ పాఠశాల?

21. ఈ క్రిందివారిలో ఎవరి లాభపురేటు ఎక్కువది?

(*a*) ఒక స్త్రీ నూరేసి పత్రములుగల కట్టలు కట్ట 1-కి 1 అ. చొప్పున 50 కొని, వాటితో పదేసి పత్రములుగల విస్తరాకులు కుట్టును. నూరేసి విస్తరాకులతో దిండ్లుకట్టి, దిండు 1-కి 14 అ. చొప్పున అమ్మును.

(*b*) ఒక స్త్రీ ప్రొద్దున్న ఆరింటికి రూ. 3—7—0 తో కూరగాయలు కొని, చిల్లరిని అమ్మి, అవన్నియు కూడ ఛీదాగా అమ్మగా పది గంటలయ్యెను, రూ. 5—0—0 వచ్చెను. బజారులో అద్దె 4 అ. ను, మార్కెటునుండి బజారుకి మోతకూలి 2 అ. ను ఆమె పెట్టుకొనవలెను.

(*c*) ఒక స్త్రీ పడి 1-కి 10 అ. చొప్పున పాలు కొని, 7 : 8 నిష్పత్తిలో దానిలో నీరు కలిపి, పడి 1-కి 8 అ. చొప్పున అమ్మును.

22. ఒక పొడుగును గొలుసుతో కొలుచుటలో విద్యార్థి నూటికి ·1 తప్పినచో అతనికి మార్కులు సున్నయగును. 4 ఫ. 22 గ. 2 అ. పొడగును కొలువవలసిన సందర్భములో ఒక విద్యార్థి, మార్కుల నష్టము కలుగకుండ, ఎంత ఇటు అటుగా ఫలితము ఈయవచ్చును?

23. తన తాలూకు మోటారుకారు అమ్మిపెట్టిన బ్రోకరువానికి నూటికి $5\frac{1}{2}$ కమిషను ఇచ్చెదనని ఒక గొప్పవాడు మాట ఇచ్చెను. ఆ కారుయొక్క నికర విక్రయఫలము రూ. 5,953—8—0 అయినచో, అది అసలు ఎంతకు అమ్ముడయ్యెను?

24. ఒక రైలుయొక్క వేగము నూటికి $16\frac{2}{3}$ హెచ్చినచో, అది ఒక స్టేషనును 2 గం. పెందరాళే చేరుకొనును. ప్రయాణ దూరము 420 మైళ్లు అయినచో, రైలుయొక్క వేగము కట్టుము. కలిసివచ్చిన కాలముయొక్క శాతము కట్టుము.

25. ఒక మ్యునిసిపాలిటీవారు, ఒకానొక ఇంటిమీద వచ్చెడి సాలుసరి అద్దెలో నూటికి $18\frac{3}{4}$ భాగమే పన్నుగా వేసినారు. ఆ ఇంటిపన్ను రూ. 119—14—0. ఆ ఇంటియొక్క సాలుసరి అద్దె ఎంత?

26. ఒక విద్యార్థికి 275 మార్కులకును 154 మార్కులు వచ్చుటవల్ల అతడు ప్యాసుమార్కునకు నూటికి 26 హెచ్చుగా నున్నాడు. ప్యాసునకు వచ్చి తీరవలసిన మార్కు ఎంత?

27. ఒక విద్యార్థికి 40 మార్కులే వచ్చుటవల్ల, $12\frac{1}{2}$ మార్కులు తక్కువై, అతడు ఫేలయినాడు. ప్యాసుమార్కు నూటికి 35 అయినచో, పూరా మార్కు కట్టుము.

28. ఒక పరీక్షితుడు తనకు 95 మార్కులు వచ్చినను, మొత్తపు మార్కులలో నూటికి 12 తక్కువవచ్చి ఫేలయ్యెను. ఇంకొకడు 165 మార్కులు తెచ్చుకొని ప్యాసుమార్కుకంటె నూటికి 16 పైన ఉండెను. పూరా మార్కును ప్యాసుమార్కును కట్టుము.

29. ఒక గొప్పవాడు తన సాలుసరి రాబడిలో నూటికి 65 సంసార నిమిత్తమును, నూటికి 20 పిల్లలచదువులు నిమిత్తమును, నూటికి 10 దానధర్మములకును వెచ్చించి, 200 రూ. వెనుకవేయును. అతని సాలుసరి రాబడి యెంత?

30. ఒక యేడు ఒక మహానగరముయొక్క జనసంఖ్యలో నూటికి $2\frac{1}{2}$ ఇతర స్థలములకు వలసపోయిరి. నూటికి 15 కలరా, ఇన్‌ఫ్లుయెంజా, వంటిజాడ్యముల చే గతించిరి. జనవృద్ధి నూటికి 30 ఉండినచో, సాలాఖరున ఆది సంఖ్యలో ఏ శాతము నగరముననుండును? సంవత్సరాదిని 50 లక్షల జనులు ఆ నగరమునుండినచో, సంవత్సరాంతమున ఎందరు ఉందురు?

31. ఒక జమీందారు తన ఆస్తిలో నూటికి 35 పెట్టి ఋణములు తీర్చెను. మిగతలో నూటికి 50 తన భార్యావశము చేసెను, మిగతలో నూటికి 40 గ్రామదేవతగుడికి వ్రాసియిచ్చెను, మిగత 39 ఎకరములకును తన ఏకపుత్రికకు వారసత్వపు హక్కు ఇచ్చెను. అతని ఆస్తి ఎన్ని ఎకరములు?

32. ఒక తేదీని ఇద్దరు మనుష్యులయొక్క బరువులకు తేడా 22 పౌనులు. సంవత్సరానంతరము, వారు మరల తూగి చూచుకొనగా, మునుపటి బరువు మనుష్యుడు నూటికి $6\frac{1}{4}$ తీసిపోయినట్లును, తేలిక మనుష్యుడు నూటికి $7\frac{1}{8}$ బలిసినట్లును గ్రహించిరి. అప్పుడు వారి బరువులు సమములైనచో, మునుపటి బరువులను కట్టుము.

33. ఒక వర్తకుడు 75 సిమెంటు పీపాలు కొనగా వాటిలో 12 కాల వశమున చెమర్చి పాడయ్యెను. మిగత వాటిని అతడు సాటివర్తకులతోపాటు నూటికి 25 చొప్పున పీపా -కి రూ. 12—8—0 కు అమ్మినగాని అమ్మకము సరిగా ఉండదు. (1) కొంత సరకు పాడగుటవల్ల అతనికి రాకుండపోయిన లాభము ఎంత? (2) అతని పెట్టుబడిమీద వచ్చిన లాభము నూటికి ఎంత?

34. పడి 1-కి రూ. 10—8—0 ఖరీదుచేయు 28 పడులుగల బస్తాలు 28 ఒక చిల్లరివర్తకుడు ఒక టోకువర్తకునివద్ద కొని, మోతకూలి 2 రూ. పెట్టుకొని, నూటికి 12 లాభమునకు వాటిని అమ్మెను. అతడు పడి 1-కి ఎంతకు అమ్మెను? మొత్తముపై ఎంత లాభము తీసెను?

35. ఒకడు 250 రూ. పెట్టి ఒక సైకిల్ కొని, అది కొన్నియేళ్లు వాడుకొని, నూటికి 28 నష్టమునకు ఒక చిల్లరిబేరగానికి ఇచ్చివేసెను. అతడు 35 రూ. పెట్టి దానిని అంతటా బాగుచేయించి, డాబుచేయించి నూటికి 12 లాభమునకు అమ్మెను. ఈ చివర ఖరీదును సైకిల్‌యొక్క మొదటి ఖరీదుతో పోల్చినచో లాభమో నష్టమో నూటికి కట్టుము.

36 ఒక ఇంటియజమాని తనయిల్లు నెల 1-కి 180 రూ. చొప్పున అద్దెకిచ్చెను. 7 నెలల తరువాత కాపురమున్నవారు లేచిపోయిరి. యజమాని 350 రూ. పెట్టి ఇల్లంతయు బాగుచేయుంచుటకు ఒక నెల పట్టెను. పిదప, ఆ సంవత్సరములో మిగత కాలమునకు అతడు దానిని నెల 1-కి 85 రూ. చొప్పున ఇచ్చివేసెను. అతడు ఆరేసి నెలలకు $37\frac{1}{2}$ రూ. ఇంటిపన్ను కట్టినచో, 11,500 రూ. పెట్టి కట్టిన ఆ యింటిమీద అతనికి నూటికి ఎంత వడ్డీ కిట్టినది?

37. డబ్బా రూ. 3—2—0 చేసి ఒక వర్తకుడు 50 డబ్బాల కిరసనాయిలు కొనెను. కొంతకాలమునకు, 8 డబ్బాలలో నీరుకలిసినట్లును, 4 చిల్లుపడి ఛీదాగా కారిపోయినట్లును అతడు గ్రహించెను. కల్తీ డబ్బాలు సీసా 1-కి 2 అ. చొప్పునను, తక్కినవి సీసా 1-కి 2 అ. 8 పై. చొప్పునను అతడు అమ్మినచో, అతనికి నూటికి లాభము కట్టుము. (1 డబ్బా = 24 సీసాలు.)

38. ఒకడు కొన్న రెండు దున్నపోతులలో ఒకదాని ఖరీదు 35 రూ. ఎక్కువ. కొంతకాలమునకు అతడు చౌకదానిని నూటికి 20 లాభమునకును, తక్కినదానిని నూటికి 25 నష్టమునకును అమ్మెను. మొత్తముపై అతని నష్టము 15 రూ. అయినచో, వాటి ఖరీదులు కట్టుము.

39. ఒక వస్తువుయొక్క చేతఖరీదుకంటె టోకుబేరగానివద్ద నూటికి 15 ఎక్కువ, టోకుబేరగానివద్దకంటె చిల్లరిబేరగానివద్ద నూటికి 18 ఎక్కువ.

చిల్లరిబేరగాడు ఆ వస్తువును 150 రూ. కు అమ్మి నూటికి 20 లాభము తీసినచో, దాని చేతఖరీదు కట్టుము.

40. మొదటిది వీసె 1-కి రూ. 2—0—0 ను, రెండవది వీసె 1-కి రూ. 1—12—0 ను చేసి ఒక వర్తకుడు రెండు రకముల కాఫీగింజలు సమాన మొత్తములుగా కొనెను. రెండవది నూటికి 35 ను, మొదటిదానిని నూటికి 45 ను కలిపి, ఆ కలగలుపును వీసె 1-కి రూ. 1—14—0 చేసి అతడు అమ్మెను. అతనికి లాభమో నష్టమో మొత్తపు అమ్మకపు ఖరీదుయొక్క శాతముగ కట్టుము.

41. నూటికి 2 చొప్పున అసలు దానికంటె తక్కువయగు గజముబద్దతో ఒక వర్తకుడు 13 గజములగుడ్డ కొలిచి, అది 12 గజములుగనే కట్టి ఖరీదు పుచ్చుకొనును. అతడు నూటికి 15 లాభమునుకొని అమ్మినచో, ఈ సందర్భములో నూటికి ఎంత లాభము?

42. ఒక వర్తకుడు రొక్కపు బేరమునకు ప్రకటన రేటులో నూటికి 5 తగ్గింపు చేయును. కాని తగ్గుధరల అమ్మకము పెట్టుటచే, ప్రకటన రేటులు నూటికి 15 పడిపోయినవి. ఒక వస్తువుమీద తాను పెట్టిన రూ. 215—5—4 మీదను ఇప్పుడతడు నూటికి $12\frac{1}{2}$ లాభము తీసినచో, దాని ప్రకటన ఖరీదు కట్టుము.

43. పడి 1-కి p అణాలచొప్పున a పడుల పాలు కొని, దానిలో b పడుల నీరు కలిపి, ఆ కలగలుపును పడి 1-కి q అణాలచొప్పున అమ్మినచో, నూటికి లాభము కట్టుము.

44. ఒక పుస్తకవర్తకుడు 13 పుస్తకములు అమ్మి, 1 పుస్తకముయొక్క అమ్మకపు ఖరీదు లాభము తీయును. ఒక పుస్తకముయొక్క అమ్మకపు ఖరీదు రూ. 1—8—0 అయినచో, కొన్న ఖరీదును, నూటికి లాభమును కట్టుము.

45. ఒక ప్రచురణ సంఘమువారు పుస్తకపు ఖరీదులో నూటికి 30 కవికి ఇచ్చుటకు అచ్చుకొని, 800 రూ. పెట్టి 1,600 ప్రతులు వేయించి, నూటికి 40 లాభము తీసినచో, ఒకొక్క పుస్తకము ఎంతకు అమ్మిరి?

46. ఒక పుస్తకవర్తకుడు నిస్సంశయముగ చిల్లరివర్తకులైనవారికి నూటికి $12\frac{1}{2}$ తగ్గింపుచేయును, పైగా పన్నెండింటి ఖరీదునకు 13 పుస్తకము లిచ్చును. చిల్లరివర్తకునకు నూటికి లాభము కట్టుము.

47. ఒక నాటక కంపెనీవారు ఒక నాటకమును 5 సార్లు ఆడగా, ఒకొక్కసారి వెనుకటికంటె నూటికి 25 ఎక్కువ వసూలు అయ్యెను. మూడవ ఆటకు 1,800 రూ. వచ్చినచో, మొదటి అయిదవ ఆటలకు ఎంతెంత వచ్చెను?

48. B కంటె A వద్ద నూటికి 80 ఎక్కువ ఉన్నది. A కంటె B వద్ద నూటికి ఎంత తక్కువ ఉన్నది?

49. A కి కొంత సొమ్మున్నది. B వద్ద అంతకంటె నూటికి 15 ఎక్కువ ఉన్నది. C వద్ద, B వద్దకంటె నూటికి 10 తక్కువేకాని, A వద్దకంటె 21 రూ. ఎక్కువ. A వద్ద ఎంత ఉన్నది?

50. ఒక వ్యాపారములో కొంత పెట్టుబడి A పెట్టును, దానికంటె నూటికి 60 ఎక్కువగా B పెట్టును, A B ల మొత్తముకంటె నూటికి 75 ఎక్కువగా C పెట్టును. వారికి లాభము 637 రూ. వచ్చినచో, ఒకొక్కని వాటా లాభము కట్టుము.

51. B, C లకు కలిపి ఇచ్చినదానికంటె నూటికి 75 A, B లకును, C, A లకు కలిపి ఇచ్చినదానికంటె నూటికి 80 B, C లకును వచ్చునట్లు 2,400 రూ. A, B, C లకు పంచుము.

52. ఒకడు తన రాబడిలో నూటికి 65 తిండికి వెచ్చించునపుడు, మిగత సొమ్ము ఇతర ఖర్చులకు బొటాబొటిగా సరిపోవును. తినుబండముల ధర నూటికి 20 పడిపోయినచో, సొమ్ము నిలువచెయ్యని పద్ధతిని అతడు నూటికి ఎంత ఎక్కువ తిండి తినవచ్చును?

53. కాఫీ ఖరీదు నూటికి $9\frac{1}{11}$ తగ్గిపోయిన పక్షమున, ఒకడు మామూలుగా కొంత కాఫీ కొనుక్కొనే సొమ్మునకే మరి 2 వీ. వచ్చియుండెడిది. అతడు మామూలుగా ఎంత కొనును?

54. ఒకానొకయేడు ఒక రాష్ట్రముయొక్క మొత్తపు ఖర్చు, మొత్తపు రాబడిలో నూటికి 85. మరుసటియేడు రాబడి నూటికి 12 హెచ్చి, ఖర్చు నూటికి 8 తగ్గినచో, రెండవయేడు నిలువ నూటికి ఎంత ఎక్కువ?

55. ఒక ఉద్యోగియొక్క జీతము నూటికి 25 తగ్గినది. దానికి దానికి సరిపుచ్చుటకు, అతడు తన వ్యయమును తగ్గించుకొనినాడు. అది రెండు తరవాలగానున్నది, (*a*) మొత్తములో నూటికి 40 అచంచలవ్యయము, (*b*) తక్కినది చంచలము. జీతము తగ్గనప్పుడును, తగ్గినప్పుడును కూడ అతని నిలువ శూన్యమేయైనచో, చంచలవ్యయమును అతడు నూటికి యెంత తగ్గించుకొనినాడు?

56. ఒక సరకుమీద దిగుమతీపన్ను నూటికి 50 హెచ్చుటవల్ల, దానియొక్క వాడకము నూటికి 35 పడిపోయెను. ఆ సరకుమీద వచ్చెడి రివిన్యూ నూటికి యెంత పడిపోయినది?

57. కొంత సొమ్ము పెట్టి కొన్ని చేతిరుమాళ్లు కొనవచ్చును. కాని ఒకొక్కదాని ఖరీదు కొంత తగ్గినచో, ఆ సొమ్మునకే వచ్చెడి రుమాళ్లసంఖ్య నూటికి 25 హెచ్చును. చేతిరుమాలు ఖరీదు నూటికి ఎంత తగ్గవలెను?

58. గోధుమల ఖరీదు హెచ్చిపోవుటవల్ల, ఒకేసొమ్మునకు వెనుకవచ్చెడి పడులసంఖ్యకంటె ఇప్పుడు వచ్చెడు పడులసంఖ్య నూటికి 20 తక్కువ. ఖరీదు నూటికి ఎంత హెచ్చినది?

59. మార్కుల మొత్తము y అయినప్పుడు ఒక విద్యార్థికి x వచ్చెను. అతనికి నూటికి ఎన్ని వచ్చెను? ఆ x అను మార్కును చూచి వేసికొనుటలో ఆ బాలుడు ఒకట్లస్థానమందున్న 8 బదులు 3 వేసికొనుటచే నూటికి $2\frac{1}{2}$ తప్పు బయలుదేరినచో y విలువ ఎంత? కాని, పదులస్థానమందున్న 8 బదులు 3 వేసికొనినచో, నూటికి ఎంత తప్పు సంభవించును?

60. ఒక స్కూలులో 720 మంది బాలురు. ఒకొక్కడు సాలుకి 52 రూ. ఏకమొత్తముగగాని, 8 సమానవాయిదా మొత్తములుగగాని చెల్లింపవచ్చును. బాలురలో నూటికి 5 మంది అసలే జీతములేనివారు, తక్కినవారిలో నూటికి $16\frac{2}{3}$ మందికి సగము జీతము. ఆ మిగతలో నూటికి 10 మంది మొదటి జీతముకట్టి చదువులు కట్టిపెట్టినారు. పిల్లల జీతాల రాబడికంటె స్కూలు ఖర్చు నూటికి $12\frac{1}{2}$ ఎక్కువ అయినచో, స్కూలునకు తెగులుబాటు ఎంత?

61. p గాలనుల పాలున్న ఒక పాత్రలోనుండి q గాలనుల పాలు తీసివేసి, అందుకుబదులు నీరుపోసినారు. ఆ కలగలుపునుండి మరల q గాలనులు తీసివేసి, అందుకుబదులు నీరుపోసినారు. ఈ చివర మిశ్రణములో నూటికి ఎంత నీరో కట్టుము.

$p=8$, $q=3$ అయినప్పుడు నీ ఫలితముయొక్క విలువ కట్టుము.

62. ఒక బట్టలవర్తకునివద్ద రొక్కపు ఖరీదుకంటె, కాతా ఖరీదు నూటికి $12\frac{1}{2}$ ఎక్కువ. పైగా, వ్రాసి ఉన్న ఖరీదు, కాతా ఖరీదుకంటె నూటికి 25 ఎక్కువ. ఒక బెనారసుచీరకు వ్రాసి ఉన్న ఖరీదు రూ. 703—2—0 అయినచో, దాని రొక్కపు ఖరీదు ఎంత?

63. ఒకని వ్యాపారములు నీలిమందు, బియ్యము. నీలిమందుశాఖ నూటికి 10 దండుగకు పనిచేయుచుండెను, బియ్యపుశాఖ నూటికి 15 లాభసాటిగా ఉండెను. అతడు రెంటిలోను కలిపి, మొత్తపు పెట్టుబడిమీద నూటికి $1\frac{1}{4}$ లాభము తీయుచుండెను. రెండు వ్యాపారశాఖలలోను పెట్టిన సొమ్ములను పోల్చుము.

64. ఒక దేవాలయపు ఖర్చునకు రెండు ఆధారములున్నవి. (*a*) దేవాలయపు పొలములనుండి శిస్తు, (*b*) భక్తులగు లక్ష్మీపుత్రుల విరాళములు. ఒకానొకయేడు మొదటి ఆదాయము నూటికి 20 తగ్గిపోయెను, రెండవది నూటికి 8 హెచ్చెను. మొత్తముమీద దేవాలయపు రాబడి నూటికి $4\frac{8}{11}$ తగ్గెను. రెండు ఆధారములనుండియు వచ్చెడి రాబడులను పోల్చుము.

అధ్యాయము XV.

63. బారువడ్డీ.

మాదిరి నెం. (1) P రూపాయలమీద n ఏళ్లకు నూటికి r చొప్పున వడ్డీ కట్టుము. మొత్తమును కూడ కట్టుము. [అసలును వడ్డీని కలపగా వచ్చెడి దానినే 'మొత్తము' అనియు, "మిశ్రధనము" అనియు వాడుదురు.]

న్యాసము. 100 రూ. మీద 1 ఏడునకు వడ్డీ r.

$\therefore$ 1 రూ. మీద 1 ఏడునకు వడ్డీ $\frac{r}{100}$.

$\therefore$ P రూ. మీద n ఏళ్లకు వడ్డీ $\frac{r}{100}\times P\times n$ లేక $\frac{Prn}{100}$.

కాబట్టి, వడ్డీ $=\frac{Pnr}{100}$. మొత్తము $=P+\frac{Pnr}{100}$ లేక $P\left(1+\frac{nr}{100}\right)$.

మాదిరి నెం. (2) 3 ఏళ్లకు సాలుకి నూటికి 12 వడ్డీ చొప్పున మొత్తము 680 రూ. అయినచో, అసలు ఎంత?

పద్ధతి 1. అసలు 100 అనుకో. అది 3 ఏళ్లలో నూటికి 12 చొప్పున $100+\frac{100\times3\times12}{100}$ అనగా, 136 అగును. (వడ్డీ కట్టుటకు పైనిచెప్పిన సంకేతసూత్రము.)

136 రూ. మొత్తము అయినచో, అసలు 100 రూ.

$\therefore$ 1 రూ. ,, ,, $\frac{100}{136}$ రూ.

$\therefore$ 680 రూ. ,, ,, $\frac{100}{136}\times 680$ రూ. లేక 500.

పద్ధతి 2. సంకేత సూత్రమును ప్రయోగించుట.

$$P\left(1+\frac{nr}{100}\right)=A.$$

$\therefore P\left(1+\frac{3\times12}{100}\right)=680.$ అనగా, $P\left(1+\frac{36}{100}\right)=680.$

$$\therefore P\times\frac{136}{100}=680.$$

$$\therefore P=\frac{680\times100}{136}=500.$$

$\therefore$ అసలు 500 రూ.

మాదిరి నెం. (3) 500 రూ. సాలుకి నూటికి 12 చొప్పున 680 రూ. మొత్తము అగుటకు ఎంత కాలము పట్టును?

పద్ధతి 1. వడ్డీ = మొత్తము − అసలు = 680 రూ. − 500 రూ.
= 180 రూ.

100 రూ. మీద 1 ఏడునకు వడ్డీ 12 రూ.

1 రూ. ,, ,, ,, $\frac{12}{100}$ రూ.

500 రూ. ,, ,, ,, $\frac{12}{100}$ రూ. × 500 లేక 60 రూ.

60 రూ. వడ్డీ, 500 రూ. మీద అగుటకు కాలము 1 ఏడు.

1 రూ. ,, ,, ,, $\frac{1}{60}$,,

180 రూ. ,, ,, ,, $\frac{1}{60}\times 180=$ 3 ఏళ్లు.

పద్ధతి 2. సంకేతసూత్రమును ప్రయోగించుట.

$$P\left(1+\frac{nr}{100}\right)=A.$$

$$500\left(1+\frac{n12}{100}\right)=680.$$

$$\therefore 1+\frac{12n}{100}=\frac{680}{500}.$$

$$\therefore \frac{12n}{100}=\frac{680}{500}-1.$$

$$\therefore \frac{12n}{100}=\frac{680-500}{500}.$$

$$\therefore \frac{12n}{100}=\frac{180}{500}.$$

$$\therefore n=\frac{180}{500}\times\frac{100}{12}=3.$$

∴ కోరిన కాలము 3 ఏళ్లు.

మాదిరి నెం. (4) నూటికి ఏ రేటున 500 రూ. 3 ఏళ్లలో 680 రూ. అగును?

పద్ధతి 1. వడ్డీ=680 రూ.−500 రూ.=180 రూ.

500 రూ. మీద 3 ఏళ్లకు వడ్డీ 180 రూ.

1 రూ. ,, 1 ఏడునకు వడ్డీ $\frac{180}{500\times 3}$ రూ.

100 రూ. ,, ,, ,, $\frac{180\times 100}{500\times 3}$ లేక 12 రూ.

∴ రేటు=నూటికి 12.

పద్ధతి 2. సంకేతసూత్రమును ప్రయోగించుట.

$$P\left(1+\frac{nr}{100}\right)=A.$$

అనగా, $500\left(1+\frac{3r}{100}\right)=680.$

$$\therefore 1+\frac{3r}{100}=\frac{680}{500}.$$

$$\therefore \frac{3r}{100}=\frac{680}{500}-1=\frac{680-500}{500}=\frac{180}{500}.$$

$$\therefore r=\frac{180}{500}\times\frac{100}{3}=12.$$

∴ రేటు=సాలుకి నూటికి 12.

మాదిరి నెం. (5) ఒక వర్తకునినుండి ఒక ధనికునకు 1,000 రూ. రావలసియున్నది. ఆ సొమ్ము 1 సంవత్సరము చివర ఇచ్చినను సరే, లేక వాయిదా 1-కి 260 రూ. చొప్పున మూడేసినెలల వాయిదాలు అప్పటినుండి 12 నెలల

దాక చెల్లించినను సరే, అని ఒప్పందమైనది. ఆ ధనికుడు కట్టిన వడ్డీరేటు కనుగొనుము. (మొదటివాయిదా అప్పటికి 3 నెలల చివర చెల్లింపవలెను.)

న్యాసము. వడ్డీరేటు r అనుకో.

రెండవ ఏర్పాటుప్రకారము, ఆ ధనికునికి 3 నెలల చివర 260 రూ. ను, 6 నెలల చివర 260 రూ. ను, 9 నెలల చివర 260 రూ. ను, 12 నెలల చివర 260 రూ. ను ముట్టును. మొదటి 260 రూ. ను మిగత 9 నెలలలోను 260 రూ. $\left(1+\frac{\frac{3}{4}r}{100}\right)$ అగును; అట్లే, రెండవ 260 రూ. ను మిగత 6 నెలలలోను 260 రూ. $\left(1+\frac{\frac{1}{2}r}{100}\right)$ అగును; అట్లే, మూడవ 260 రూ. ను మిగత 3 నెలలలోను 260 రూ. $\left(1+\frac{\frac{1}{4}r}{100}\right)$ అగును; నాలుగవ 260 రూ. మీదను, అది సంవత్సరము చివర చెల్లింపబడును గావున, ఏమియు వడ్డీ కిట్టదు.

∴ ఈ ప్రకారము, ధనికునకు సాలాఖరున ముట్టునది:

$$260\left(1+\frac{\frac{3}{4}r}{100}\right)+260\left(1+\frac{\frac{1}{2}r}{100}\right)+$$
$$260\left(1+\frac{\frac{1}{4}r}{100}\right)+260.$$

అనగా, $260\left\{1+\frac{\frac{3}{4}r}{100}+1+\frac{\frac{1}{2}r}{100}+1+\frac{\frac{1}{4}r}{100}+1\right\}$

అనగా, $260\left\{4+\frac{1\frac{1}{2}r}{100}\right\}.$

మొదటి ఏర్పాటుప్రకారము, ఆ వర్తకునకు, సాలాఖరున కిట్టునది: $1000\left(1+\frac{1r}{100}\right).$

ఈ రెండు మొత్తములును సమము.

$$\therefore 1000\left(1+\frac{r}{100}\right)=260\left(4+\frac{1\frac{1}{2}r}{100}\right).$$

$$\therefore 1000+10r=1040+\frac{260\times 3r}{2\times 100}=1040+\frac{39}{10}r.$$

$$\therefore 10r-\frac{39r}{10}=1040-1000.$$

$$\therefore \frac{61r}{10}=40. \quad \therefore r=\frac{40\times 10}{61}=\frac{400}{61}=6\frac{34}{61}$$ నూటికి.

అభ్యాసము 15.

1. ఈ క్రింది ప్రశ్నలలో సంకేతసూత్రమును ప్రయోగించి, వడ్డీని మొత్తమును కట్టుము:—

(a) 350 రూ. మీద నూటికి 12 చొప్పున 15 నెలలకు.

(b) 450 రూ. మీద నూటికి 9 చొప్పున 2 ఏళ్లకు.

(c) 750 రూ. మీద నూటికి 10 చొప్పున 35 వారములకు.

(d) 1080 రూ. మీద నూటికి $10\frac{1}{2}$ చొప్పున 219 రోజులకు.

(e) a రూ. మీద నూటికి c చొప్పున b రోజులకు.

(f) p రూ. మీద నూటికి r చొప్పున q వారములకు.

(g) x రూ. మీద నూటికి z చొప్పున y నెలలకు.

2. $I=\frac{Pnr}{100}$ అను సంకేతసూత్రమును ఈ క్రింది రూపములలోనికి మార్చుము:—

(1) $n=$........, (2) $r=$..........., (3) $P=$.......... మార్చి, ఆ క్రొత్త రూపములను వాడి ఈ ప్రశ్నలను చేయుము:—

(a) ఎంతకాలములో 500 రూ. నూటికి సాలుకి 6 చొప్పున 625 రూ. అగును?

(b) ఎంతకాలములో 975 రూ. నూటికి సాలుకి 9 చొప్పున 1,500 రూ. అగును?

(c) ఎంతకాలములో 1,500 రూ. మీద, నూటికి సాలుకి 10[illegible] చొప్పున 150 రూ. వడ్డీ అగును?

(d) ఎంతకాలములో 3,200 రూ. మీద, నూటికి సాలుకి $7\frac{1}{2}$ చొప్పున 800 రూ. వడ్డీ అగును?

(e) 200 రూ. 12 ఏళ్లలో 375 రూ. అయినచో, వడ్డీరేటు ఎంత?

(f) 480 రూ. 10 ఏళ్లలో 720 రూ. అయినచో, వడ్డీరేటు ఎంత?

(g) 650 రూ. మీద 26 ఏళ్లలో వడ్డీ 260 రూ. అయినచో, వడ్డీరేటు ఎంత?

(h) $52\frac{1}{2}$ రూ. మీద 9 ఏళ్లలో వడ్డీ 63 రూ. అయినచో, వడ్డీరేటు ఎంత?

(i) నూటికి 5 చొప్పున 4 ఏళ్లలో వడ్డీ 75 రూ. అయినచో, అసలు కట్టుము.

(j) నూటికి 6 చొప్పున 12 ఏళ్లలో వడ్డీ 396 రూ. అయినచో, అసలు కట్టుము.

(k) నూటికి y చొప్పున x ఏళ్లలో వడ్డీ z రూ. అయినచో, అసలు కట్టుము.

(l) ఒక సొమ్ము ఎంతో, దానిమీద నూటికి సాలుకి $8\frac{1}{3}$ చొప్పున 12 ఏళ్లలో వడ్డీకూడా అంతే. ఆ సొమ్మెంతో కట్టగలవా? కట్టలేనిచో, ఎందువల్ల కట్టలేవు?

3. $A=P\left(1+\frac{nr}{100}\right)$ అను సంకేతసూత్రమును ఈ దిగువ కోరిన రీతిని మార్చుము:—

(a) $n=$......? (b) $r=$......? (c) $P=$......?

2 లోని భాగములను (a) నుండి (k) వరకును, వీలునుబట్టి ఈ పైన వచ్చిన సంకేతసూత్రములను ప్రయోగించి చేయుము. ఏయే ప్రశ్నభాగములలో ఈ క్రొత్తగా కట్టిన సంకేతసూత్రములలో ప్రతిదియు అప్రస్తుతము?

4. ఈ క్రింది వ్యాపారములలో నూటికి సాలుకి వడ్డీరేటు కట్టుము:—

(a) ఒక నిధిసంఘమువారు రూపాయకు నెలకు 1 పై. వడ్డీ పుచ్చుకొందురు.

(b) ఒక మార్వాడీ రూపాయను నెలకు 1 అ. వడ్డీ పుచ్చుకొనును.

(c) ప్రావిడెంటుఫండు అధికారులు, చందాదారుల జీతములోనుండి, వడ్డీనిమిత్తము కొంత మినహాయింతురు. అది 25 రూ. ల మీదను నెలకు 1 అ. 2 పై.

(d) ఒక వర్తకుడు ఒక వస్తువును రొక్కమునకైతే $2\frac{1}{2}$ రూ. కే ఇచ్చును. ఒక నెల అరువునకైతే 3 రూ. పుచ్చుకొనును.

(e) ఇప్పుడు రూ. 7—8—0 పెట్టి కొనుక్కోవలసిన సర్టిఫికెట్టునకు గవర్నమెంటువారు 5 ఏళ్ల అనంతరము 10 రూ. దయచేయుదురు.

5. 1914-వ సం॥ సెప్టెంబరు నెలలో, "ఎమ్డెన్" అను యుద్ధనౌక మెడ్రాసును ఒక తడాఖా తీసిన కాలములో, ఒకడు తంబుచెట్టి వీధిలో ఒక ఇల్లు చౌకగా దొరకగా 5,400 రూ. పెట్టి పుచ్చుకొనెను. నాలుగు ఏళ్ల తరువాత ఒక గొప్ప ధనికుడు యుద్ధకాలములో తాను చేసిన సొమ్ముయొక్క క్షేమవృద్ధి నాలోచించి ఆ యింటిని 2[illegible],[illegible]00 రూ. ఇచ్చి పుచ్చుకొనెను. ఆ యుద్ధకాలములో వడ్డీరేటు నూటికి సాలుకి 18 అయినచో, మొదటివానికి ఎంత లాభము?

6. నూటికి సాలుకి 12 చొప్పున 350 రూ. ఒక ఋణదాతవద్దను, నూటికి, సాలుకి 15 చొప్పున 475 రూ. మరియొకనివద్దను, నేను అప్పుతీసికొంటిని. 6 నెలల 18 రోజుల చివర, నేను అంతా కలిపి ఎంత వడ్డీ ఇచ్చుకొనవలెను? ఈ రెండు ఋణములను ఏకముచేసి, పోనీ ఒకనివద్దనే తీసికొనవలయునన్నచో, రెండు ఏర్పాటులలోను ఇచ్చుకొనవలసెడి మొత్తపు వడ్డీలు సమములు కావలయునన్న, ఎంత వడ్డీకి తీసికొనవలయును?

7. యుద్ధకాలపు వ్యాపారములో ఇద్దరు భాగస్వాములకు 4,50,000 రూ. లాభము రాగా వారు దానిని 3 : 2 నిష్పత్తిలో పంచుకొనిరి. మొదటివాడు 2,00,000 రూ. పెట్టి ఒక తోటయు తక్కినదానితో ఒక ఇంటిని కొనుక్కొనగా, తోటమీద నెలకు 400 రూ. ను, ఇంటిమీద నెలకు 200 రూ. ను వానికి అద్దెవచ్చెను. రెండవవాడు 1,50,000 రూ. పెట్టి ఒక మార్కెటు కొనుక్కొనగా, దానిమీద అతనికి రోజుకి రూ. 30—4—0 నికరము అద్దె వచ్చెను. తక్కినసొమ్ము అతడు నూటికి సాలుకి ఆరుచొప్పున బ్యాంకులో వేసికొనెను. ఎవనికి ఎంత వడ్డీరేటు కిట్టినట్లు? ఎవని వ్యాపారము ఎక్కువ లాభకరము?

8. A అనువాడు, నూటికి 9 చొప్పున B వద్ద ఎంత పుచ్చుకొనెనో నూటికి 12 చొప్పున C వద్ద అంతే పుచ్చుకొనెను. అది 550 రూ. అయినచో 1 ఏడు $7\frac{1}{2}$ నెలల ఆఖరున C కి A ఎంత వడ్డీ ఎక్కువ చెల్లించియుండును? (అతిసూక్ష్మమార్గమున కట్టుము.)

9. P అను కొంత సొమ్మును ఒకడు నూటికి సాలుకి r చొప్పున ఒక బ్యాంకులోను, అంతే సొమ్మును నూటికి సాలుకి r' చొప్పున మరియొక బ్యాంకులోను వేసినచో, రెండవ బ్యాంకునుండి ఎంత వడ్డీ ఎక్కువ వచ్చును? (r' అనునది r కంటె పెద్దది.)

10. ఒక రైతు సంక్రాంతిపండుగకు 528 రూ. ఖర్చుచేసి తన పాలేళ్లకు బట్టలు పెట్టుచుండును. ఒక యేడు అతడు దానిలో సగము తక్షణమే చెల్లగట్టి, ఆ యేడే దీపావళికి తాను మరల బట్టలు కొనవలసినపని ఉండి వెళ్లినప్పుడు బట్టలవానికి రూ. 292—8—0 చెల్లించి, ఆ బాకీ రద్దుచేసికొనెను. సంక్రాంతి పండుగ జనవరినెల 13-వ తేదీ, దీపావళి, అక్టోబరునెల 18-వ తేదీ అయినచో బట్టలవాడు పుచ్చుకొనిన వడ్డీరేటు కట్టుము.

11. ఒకడు 1922-వ సం॥ జనవరినెల 17-వ తేదీని రూ. 25—12—0 ను, 1922-వ సం॥ ఆగస్టునెల 4-వ తేదీని రూ. 35—4—0 ను వడ్డీకి వేసెను. వడ్డీ

రేటు సాలుకి నూటికి 3 అయినచో, 1923-వ సం॥ మార్చినెల 31-వ తేదీకి అతనికి ఎంత వడ్డీవచ్చును? (ప్రతి నెలయొక్కయు 4-వ తేదీ ఆఖరు తేదీల సందున వడ్డీకివేయువాని పేరనుండు నిలువలలో అధమపు నిలువమీదనే వడ్డీ కట్టునది అని తెలిసి లెక్కచేయుము.)

12. ఒక ఏడాదిలో నూటికి r చొప్పున P రూ. యొక్క మిశ్రధనమెంత? ఈ మిశ్రధనమే రెండవయేటి ప్రారంభమున అసలు అనుకొనినచో, అదే రేటుచొప్పున రెండవ సంవత్సరపు అంతమున మిశ్రధనమెంత?

13. వడ్డీ వ్యాపారస్థుడగు ఒక గుజరాతీ 18 ఏళ్లుగల ఒక మైనరు కుర్రవానిచేత 1,000 రూ. లకు ప్రామిసరీనోటు వ్రాయించుకొని, ఆ సొమ్ములో నూటికి 10 కొట్టివేసి మిగతా రొక్కమే అతనిచేతిలో వేయును. 3 ఏళ్ల ఆఖరున, నూటికి సాలుకి 44 చొప్పున కట్టి అతడు మిశ్రధనమును వసూలు చేయును. న్యాయతః వడ్డీరేటు ఎంత?

14. ఒక ఇంటిమీద నెలకు 20 రూ. అద్దె వచ్చుచుండెను. యజమాని, అప్పట్లో మోటారుషెడ్లకు ఉన్న గిరాకీ కనిపెట్టి, 500 రూ. అప్పుతెచ్చి, విశాలమైనవి మూడు షెడ్డులు తయారగునట్లు ఇంటిని మార్పించెను. ఒకొక్క షెడ్డుమీద 40 రూ. అద్దె వచ్చుచుండెను. అతడు నూటికి 15 చొప్పున అప్పు తెచ్చియున్నచో, అతని రాబడి నూటికి ఎంత పెరిగినది?

15. ఒకచోట వడ్డీకివేసిన 25 రూ. ను 10 ఏళ్లలో రెట్టింపు అయినవి. వడ్డీరేటు కట్టుము.

16. P రూ. 20 ఏళ్లలో రెట్టింపు అయినవి. వడ్డీరేటు ఎంత? ఏళ్లసంఖ్య వడ్డీరేటులయొక్క లబ్ధము ఎంత?

17. P రూ. సొమ్ము 15 ఏళ్లలో మూడురెట్లు అయినది. వడ్డీరేటు ఎంత? ఏళ్లసంఖ్య వడ్డీరేటులయొక్క లబ్ధము ఎంత?

18. P రూ. సొమ్ము t ఏళ్లలో nP రూ. మిశ్రధనమగుచున్నది. వడ్డీరేటు$=\dfrac{(n-1)\,100}{t}$ అని నిరూపింపుము. ఏళ్లసంఖ్య వడ్డీరేటుల లబ్ధము ఎంత?

19. 1921-వ సం॥ జనవరినెల 24-వ తేదీని ఒక గొప్పవాడు మెర్కెన్టైల్ బ్యాంకులో నూటికి సాలుకి 6 చొప్పున 3,500 రూ. వడ్డీకివేసెను. 1922-వ సం॥ జనవరినెల 24-వ తేదీని అతడు ఆ యేటి "డిపాజిటు" దరఖాస్తు కాగితము పంపినగాని, అప్పటినుండి వడ్డీరాదు. 1921-వ సం॥ మార్చినెల 31-వ తేదీని అతడు ఇండియాలోని పుణ్యక్షేత్రములకు యాత్రబయలుదేరి, ఇల్లు

చేరుకొనుసరికి ఏటిమీద ఆరు నెలలు పట్టెను. సకాలములో క్రొత్త డిపాజిటు కాగితమును పంపుట అతడు మరచినచో, ఇంటికివచ్చిన తేదీవరకు అతనికి వడ్డీలో ఎంత తగ్గెను?

20. ఓరియెంటల్ బెనిఫిట్ డిపాజిటు సొసైటీ (లిమిటెడ్) లో ఒక గొప్పవాడు ఒక వస్తువు తాకట్టునకు 150 రూ. మాటాడుకొనెను, గాని దానిలో ఈ దిగువచెప్పిన తీసివేతలు జరిగెను, (1) అడ్వాన్సుగా పుచ్చుకొనిన ఒకనెల వడ్డీ రూ. 1—8—0, (2) విలువలు కట్టెడివాని ఫీజు 5 అ., (3) రశీదుబిళ్ల 1 అ., (4) ఉపయోగించిన కొన్ని అచ్చుఫారములకు 1 అ. ఆ గొప్పవాడు నెల ఆఖరున 150 రూ. ను ఇచ్చి వస్తువు వదలించుకొనెను. (1) సొసైటీ కట్టెడి వడ్డీరేటు ఎంత? (2) ఆ గొప్పవాడు న్యాయతః ఎంత వడ్డీరేటు ఇచ్చుకొనినాడు?

21. మెడ్రాసు "ఇంజినీరింగు కాలేజి"లో మరీ పైవి అయిన నాలుగు క్లాసులలో దేనిలోనైన ఒక విద్యార్థి ఏకమొత్తముగ 140 రూ. చెల్లించినను సరే, వాయిదా 1-కి 18 రూ. చొప్పున 9 వాయిదాలలో ఇచ్చినను సరే. వడ్డీరేటు ఎంత?

22. కలకత్తాలోని "స్టాండర్డ్ లిటరేచర్ కంపెనీ" (అనగా, ప్రమాణ శారస్వతపు కంపెనీవారు) ప్రచురించు బాలుర "ఎన్‌సైక్లొపీడియా" (అనగా, విజ్ఞానసర్వస్వము) కొనుటకు ఒకేమొత్తముగ 80 రూ. చెల్లించినను సరే, లేక సమానమైన 16 నెల వాయిదాలలో మొత్తము 80 రూ. చెల్లించినను సరే. (మొదటి వాయిదా తక్షణము కట్టవలెను.) కంపెనీవారు పుచ్చుకొను వడ్డీరేటు ఎంత?

23. మైలాపూరులోని "హిందూ పర్మనెంటు ఫండు" వారు (అనగా, హిందూ శాశ్వతనిధివారు) ఒకొక్క వాటాదారుడు నెల 1-కి 1 రూ. చొప్పున 7 ఏళ్లపాటు చెల్లించినచో, అతనికి ఏడేళ్లచివర రూ. 102—8—0 ఇచ్చెదరు. వడ్డీ ఏ రేటున వారు ఇచ్చెదరో కట్టుము. ($1+2+3+\dots n = \frac{n(n+1)}{2}$ అను సంకేతసూత్రమును వాడుము.)

24. నూటికి సాలుకి $6\frac{1}{4}$ చొప్పున x రూ. మీద వడ్డీ, నెలకు x పైస అని నిరూపింపుము. తద్వారా, నూటికి సాలుకి $6\frac{1}{4}$ చొప్పున రూ. 73-15-4 మీద 3 నెలల వడ్డీ వ్రాయుము.

25. పచ్చయప్ప క్లబ్బులో సభ్యుడుగ యావజ్జీవమును ఉండుటకు 15 రూ. చెల్లించినను సరే, లేక ప్రతి సంవత్సర ప్రారంభమునను 1 రూ. చందాచొప్పున చివరవరకును ఇచ్చినను సరే. నూటికి $6\frac{1}{4}$ బారువడ్డీరేటున చూచి, ఈ దిగువ ఇచ్చిన సంవత్సరములు సభ్యుడుగ నుండదలచినవారికి, యావజ్జీవసభ్యత పద్ధతి మంచిదో, సాలుచందా పద్ధతి మంచిదో కట్టుము:— (*a*) 20 ఏళ్లు, (*b*) 21 ఏళ్లు, (*c*) 22 ఏళ్లు, (*d*) 23 ఏళ్లు, ((*a*) లో వడ్డీ 20 ఏళ్ల చివరవరకును, (*b*) లో 21 ఏళ్ల చివరవరకును, అట్లే (*c*), (*d*) లలోను కట్టుము.)

26. నేను ఇండియన్ బ్యాంకులో నూటికి సాలుకి 5 చొప్పున కొంత వేయగా, 6 నెలల చివర నాకు రూ. 358—12—0 వచ్చినది. వేసినది ఎంత?

27. ఒక వస్తువుయొక్క అరువు ఖరీదు రూ. 322—8—0. అరువు 10 నెలలు, వడ్డీరేటు సాలుకి నూటికి 9. ఆ వస్తువుయొక్క రొక్కపు ఖరీదు కట్టుము.

28. ఒక గొప్పవాడు నేషనల్ బ్యాంకులో (వట్టి 'డిపాజిటు' కాక) వడ్డీ 'డిపాజిటు' పద్దులో తన కూతురు 12-వ ఏట వేసి, ఆమెకు 15-వ యేడు వచ్చునప్పటికి చిక్కులులేకుండ ఆమె పెళ్లిచేయుటకు 2,450 రూ. వచ్చునట్లు ఖంజాయింపు చేసెను. ఆ 'డిపాజిటు' అక్కడ మూడేళ్లకాలమును ఉండెను. (బారు) వడ్డీరేటు నూటికి సాలుకి $7\frac{1}{2}$ అయినచో, అతడు ఎంత వేసెను?

29. ఒక తోళ్లవర్తకుడు, వ్యాపారము ఎత్తివేసి, తన ఋణదాతలకు ఆరు నెలల అనంతరము 10,600 రూ. ఇచ్చెదనని వాగ్దానముచేసెను. కాని రెండు నెలల ఆఖరునే తనకు సంబంధించిన ఇంగ్లండువర్తకులు సొమ్ము సర్దుబాటు చేయుటవల్ల, అతడు అప్పుడే ఋణములు తీర్చుకొనెను. అప్పుడు వర్తక ప్రపంచములో వడ్డీరేటు నూటికి సాలుకి 12 అయినచో, అతని ఋణదాతలకు ఎంత సొమ్ము ముట్టెను?

30. ఒక పాత "హైడ్రాలిక్ ప్రెస్సు" (అనగా, నొక్కిబిగించెడి మర) 2,050 రూ. కు అమ్మకమైనది. కాని, ఖరీదులో సగము తక్షణమే ఇవ్వవలెను, మిగత సగమును సంవత్సరాంతమున ఇవ్వ నిర్ణయము. వడ్డీరేటు నూటికి సాలుకి $2\frac{1}{2}$ అయినచో, ఎంత సొమ్ము ఒకేసారి తక్షణమే ఇచ్చివేసినచో పై ఏర్పాటునకు సరిసమానమై వ్యాపారము ఎత్తిపోవును?

31. 30-వ ప్రశ్నలోని మర కొనుక్కొన్నవాడు, దానినే మరియొక పార్టీకి అటువంటి షరతులతోనే 2,500 రూ. కు అమ్మినాడు--దానిలో సగము తత్క్షణమును, మిగత సగమును 6 నెలల ఆఖరునను ఇవ్వ నిర్ణయములతో వడ్డీరేటు నూటికి 10 చొప్పున ఉన్నచో, తత్క్షణము చెల్లించెడి ఏర్పాటుల ననుసరించి, కొనగానే అమ్మినవాని లాభము నూటికి కట్టుము.

32. అమెరికాలోని ఒక కోటీశ్వరునికి అతని మూలధనముమీద నిమిషమునకు 100 పౌ. వడ్డీ వచ్చునని తేలినది. సగటున వడ్డీరేటు నూటికి సాలుకి 9 అయినచో, అతని మూలధనము, మిలియనులలో కట్టుము.

33. 3 నెలల అరువునకు కొన్ని సరకులు రూ. 357--14--0 కు అమ్మకమైనవి. వడ్డీరేటు నూటికి 9 చొప్పున చూచుకొన్నచో, వాటి రొక్కపు ఖరీదు ఎంత?

34. 4 నెలల అరువునకు కొన్నిసరకులు నేను 250 రూ. కు పుచ్చుకొని, ఒక నెలాఖరున 3 నెలల అరువునకు వాటిని 300 రూ. కు ఇచ్చివేసితిని. వడ్డీరేటు సాలుకి నూటికి 12. నా బాకీదారు నాకు రొక్కమే ఇచ్చి, అతడిచ్చిన తత్క్షణమే నేను నా బాకీకూడ తీర్చుకొనినచో, నూటికి నా లాభము కట్టుము.

35. కొంతసొమ్ము నూటికి సాలుకి $4\frac{1}{2}$ (బారు) వడ్డీచొప్పున $2\frac{3}{4}$ ఏళ్లలో రూ. 8,428--2--0 అగును. అసలు సొమ్ము ఎంత?

36. ఒకడు ఒక వడ్డీ వ్యాపారస్థునిదగ్గర కొంత తెచ్చి నూటికి సాలుకి $12\frac{1}{2}$ చొప్పున 3 ఏళ్ల 4 నెలల ఆఖరున వానికి 9,180 రూ. చెల్లించెను. తెచ్చిన సొమ్ము కట్టుము.

37. నూటికి $5\frac{1}{2}$ చొప్పున నేను రెండు సొమ్ములు వడ్డీకి వేసితిని. 7 ఏళ్ల 7 నెలల ఆఖరున నాకు వచ్చినది మొత్తము రూ. 11,903--8--0. అసల్లు రెండును 2,000 రూ. తేడాగలవి అయ్యినచో, వాటిని కట్టుము.

38. రెండు సమధనములలో ఒకటి నూటికి సాలుకి $4\frac{1}{2}$ చొప్పునను, ఒకటి $6\frac{3}{4}$ చొప్పునను వడ్డీకి వేయబడినవి. $1\frac{3}{4}$ ఏళ్ల ఆఖరున ఒకదానిమీద రెండవదానిమీదకంటె 133·875 రూ. ఎక్కువ కిట్టెను. ఒకొక్క ధనము ఎంత?

39. రెండు సమధనములలో ఒకటి నూటికి సాలుకి $5\frac{1}{2}$ చొప్పున 18 నెలలకును, రెండవది నూటికి సాలుకి $6\frac{3}{4}$ చొప్పున 21 నెలలకును వడ్డీకి వేయగా మొత్తముపై 331 రూ. వడ్డీవచ్చెను. ఒకొక్క ధనము ఎంత?

40. ఒకడు కొంతసొమ్ము నూటికి 9 చొప్పున తెచ్చి, తత్క్షణమే దానిలో సగము నూటికి $7\frac{1}{2}$ చొప్పునను సగము 12 చొప్పునను బాకీలిచ్చెను. రెండు ఏళ్ల ఆఖరున అతనికి రూ. 136--8--0 లాభము మిగిలినచో, అతడు ఎంత తెచ్చెను?

41. ఒక వ్యాపారములో ఒకని రాబడి 8,000 రూ. అతడు దానిని రెండు భాగములుచేసి, ఒకటి నూటికి 5 చొప్పున $2\frac{1}{2}$ ఏళ్లకును, రెండవది నూటికి $6\frac{1}{4}$ చొప్పున 3 ఏళ్లకును, వడ్డీకివేయగా, వాటిమీద వడ్డీలు 11 : 15 నిష్పత్తిలో నుండెను. ఏ భాగము ఎంత?

42. ఒక గొప్పవాడు నూటికి సాలుకి 6 చొప్పున బారువడ్డీకి 2,500 రూ. ఒక ధనికునివద్ద అప్పుపుచ్చుకొనెను. అతడు ప్రతి సాలాఖరునను 300 రూ. చెల్లగట్టును. వ్యాపారము 8-వ యేడు చిగురున పైసలైనది. చెల్లించిన సొమ్ములకు ఎదురువడ్డీ అదేరేటున ఇచ్చుటకు ధనికుడు ఒప్పుకొనెను. 8-వ యేడు ఆఖరున ఎంత ఇచ్చినచో, వ్యాపారము ఎత్తిపోవును?

43. 4 సంవత్సరపు వాయిదాలలో మొత్తముమీద 4,800 రూ. చెల్లించుటకును, మొదటి వాయిదా అప్పటికి సాలాఖరునుండి మొదలుపెట్టుటకును షరతులతో ఒక పాత మోటారుకారు కొనడమైనది. వడ్డీరేటు సాలుకి నూటికి 9 అయినచో, ఒకొక్క వాయిదాసొమ్ము ఎంత?

44. 10,000 రూ. సొమ్ములో ఒక భాగమును నూటికి సాలుకి 6 చొప్పునను, రెండవదానిని నూటికి సాలుకి 9 చొప్పునను వడ్డీకి వేయగా, 5 ఏళ్ల చివర వచ్చు మిశ్రధనముల మొత్తము 13,600 రూ. నూటికి 6 చొప్పున ఇచ్చినదెంత?

45. ఒక "సైకిల్ ఇంపోర్టింగ్ కంపెనీ" (అనగా సైకిళ్లు దిగుమతిచేసే కంపెనీ) వారివద్ద A అనువాడు 175 రూ. పెట్టి ఒక సైకిల్ కొనెను. ఆ కంపెనీ ప్రొప్రయిటరు A కి స్నేహితుడగుటచే, A నూటికి 20 చొప్పున రొక్కమును చెల్లించి తరువాత కొంతకాలమునకు సాలుకి నూటికి 12 చొప్పున అయిన 154 రూ. మిశ్రధనమిచ్చి బాకీ రద్దుచేసెను. అది జరిగినదెప్పుడు?

46. ఒక కాలక్షేపసభలో యావజ్జీవ సభ్యుడగుటకు 25 రూ. ఇవ్వవలెను, కాని సాలు చందా 3 రూ. ఒకడు 10 ఏళ్లపాటు సభ్యుడుగనుండి, ఏ ఏర్పాటైనను ఒకటే అని గ్రహించెను. వడ్డీరేటు కట్టుము.

47. "గ్రషమ్ లైఫ్ ఇన్సురెన్స్ కంపెనీ" (ఒకానొక భీమాకంపెనీ) వారు సాలుకి 250 రూ. చొప్పున ప్రిమియమ్ వాయిదాలు (అనగా భీమాలో

వేయు సొమ్మువాయిదాలు) చెల్లించుచుండువారికి 25 ఏళ్ల చివర 7,500 రూ. చెల్లించుటకు అభయమిచ్చినారు. వారిచ్చెడి వడ్డీరేటు కట్టుము.

48. ఇక వచ్చెడి పుట్టినరోజునకు ఒక పిల్లనయస్సు 1 ఏడు. అప్పటి నుండి ఆ పిల్లకు 21-వ యేడు వచ్చువరకును వాయిదా 1-కి రూ. 35—5—0 చొప్పున సంవత్సరపు వాయిదాలు 20 చెల్లించినచో, అప్పుడు 1,000 రూ. వచ్చెడి ఏర్పాటు కట్టుదిట్టమగును. వడ్డీరేటు కట్టుము.

49. 43-వ ప్రశ్నలో వాయిదా 1-కి చెల్లించినది 1,250 రూ. అయినచో, వడ్డీరేటు ఎంత?

50. ఒక క్రొత్త మోటారు కొనుటకు రొక్కము 6,100 రూ. ఇచ్చినను సరే, లేక రొక్కము 1,000 రూ. ఇచ్చి, వాయిదా 1-కి 350 రూ. చొప్పున 17 మాస వాయిదాలుకూడ చెల్లించినను సరే. కంపెనీవారికి ఎంతవడ్డీరేటు కిట్టును?

51. ఒక సొమ్ము 10 ఏళ్లలో 6,000 రూ. అగును, 12 ఏళ్లలో 6,500 రూ. అగును. అసలును, వడ్డీరేటును కట్టుము.

52. అసలులో $\frac{2}{5}$ సాలాఖరున ఇచ్చివేసెడి షరతుతో, B కి A 275 రూ. నూటికి సాలుకి 9 చొప్పున బాకీ యిచ్చెను. బాకీ $2\frac{1}{2}$ ఏళ్లలో రద్దు అయినచో, A కి B ఎంత చెల్లించెను?

53. 1,200 రూ. ఖరీదుగల వజ్రములు నేను పద్దువ్రాసి పుచ్చుకొంటిని. వడ్డీ నూటికి సాలుకి $7\frac{1}{2}$ అయినచో $4\frac{1}{2}$ నెలల ఆఖరున నేను ఎంత ఇచ్చుకొనవలెను?

54. ఒక వస్తువు రొక్కమునకు 50 రూ. ఖరీదు. వడ్డీ నూటికి సాలుకి 4 అయినచో 3 నెలల అరువునకు దాని ఖరీదెంత? మరియొక వస్తువుయొక్క రొక్కపు ఖరీదు 75 రూ. పై వడ్డీరేటుచొప్పున 3 నెలల అరువునకే దీని ఖరీదెంత? ప్రతి సందర్భమునను, రొక్కపు అరువు ఖరీదుల నిష్పత్తి కట్టుము. దీనినిబట్టి నీవేమి తెలిసికొందువు?

55. ఒక ఉద్యోగియొక్క జీతపుక్రమము రూ. 75—5—100. అతడు 75 రూ. మీద ప్రవేశించినాడు. అతని జీతములోనుండి రూపాయలకు అణాలు "ప్రావిడెంటు ఫండు" నకు పోవును. వడ్డీరేటు నూటికి సాలుకి 4 అనియు, సంవత్సరమంతలోను పోగైన సొమ్ముమీద ప్రతి సాలాఖరుననే వడ్డీ కట్టబడుననియు తెలిసి, అతడు పోగుచేసికొనిన సొమ్ము మాత్రమే 2 ఏళ్ల ఆఖరున ఎంత అగునో కట్టుము.

అధ్యాయము XVI.

చతురస్రముయొక్క భూఫలము, ఆయతముయొక్క భూఫలము; ప్రమాణ ప్రాతినిథ్యము; చి. భు., సమానాంతర చతుర్భుజము, త్ర్యస్రము, త్రిభుజము, విషమ చతుర్భుజము—వీటి భూఫలములు. పైతాగొరాస్ సిద్ధాంతము, దాని ప్రయోగము.

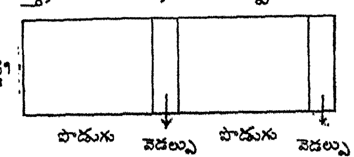
64. భూఫలము కట్టుటలో ఈ క్రిందిమానము మిక్కిలి ఉపయోగపడును:—

484 చ. గ. = 1 చ. గొలుసు.
10 చ. గొ. = 1 ఎకరము.
100 సెంట్లు = 1 ఎకరము.

ఉదా:— ∵ 1 గొ. = 22 గ., ∴ 1 చ. గొ. = 22 × 22 చ. గ. = 484 చ. గ.

1 ఎకరము = 10 చ. గొ. = 4840 చ. గ. ("2·45 ఎకరములు" అను దానిని "2 ఎకరాల 45 సెంట్లు" అని చదువనగును.)

65. H అనగా గదియొక్క యెత్తు, L పొడుగు, B వెడల్పు అయి—ఇవన్నియు ఒకే సంగత ఏకాంశములో నుండునపుడు, ఒక గదియొక్క నాలుగు గోడలయొక్కయు భూఫలము = 2 H (L + B) చ. ఏకాంశములు. ఈ ప్రక్క పటము, నాలుగు గోడలను ఒకే ఆయతమున కనబరచి, పై సంకేతసూత్రము ఎట్లు పుట్టినదో విశదీకరించుచున్నది.



పటము 58.

పొడుగుగోడల భూఫలము $= 2 \times L \times H$.

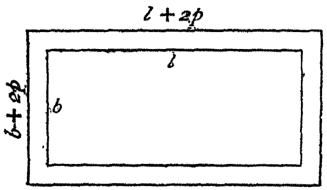
వెడల్పు ,, ,, $= 2 \times B \times H$.

∴ నాలుగు గోడలయొక్కయు భూఫలము $= 2\,LH + 2\,BH$
$= 2\,H\,(L + B)$.

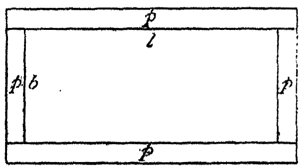
లేక

నాలుగు ఆయతముల మొత్తము = ఒకే ఆయతము. (దీనియొక్క భుజములలో ఒకటి, పొడుగు + వెడల్పు + పొడుగు + వెడల్పు; రెండవది H.) కాబట్టి, నాలుగు గోడలయొక్కయు భూఫలము $= (L+B+L+B)\,H = (2\,L + 2\,B)\,H = 2\,H\,(L+B)$.

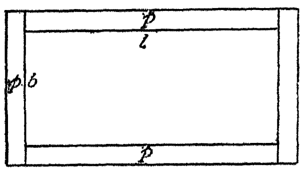
66. వరాండాలయొక్క (వసారాలయొక్క) యు నడవలయొక్కయు భూఫలము.



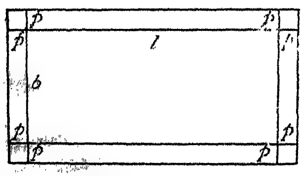
పటము 59.



పటము 60.



పటము 61.



పటము 62.

l అ. పొడుగును, b అ. వెడల్పును గల ఒక ఆయతభూమికి చుట్టును **వెలుపల**నున్న p అ. అడ్డముగల దారియొక్క భూఫలము (చదరపు అడుగులలో.)

(1) 59-వ పటమునుబట్టి, $(l+2p)(b+2p)-lb$.

(2) 60-వ పటమునుబట్టి, $(l+2p)p + 2\,bp$.

(3) 61-వ పటమునుబట్టి, $2(b+2p)p + 2\,lp$.

(4) 62-వ పటమునుబట్టి, $2\,(l+b)p + 4\,p^2$.

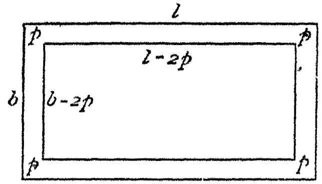
l అ. పొడుగును, b అ. వెడల్పును గల ఒక ఆయతభూమికి చుట్టును **లోపల**నున్న p అ. అడ్డముగల దారియొక్క భూఫలము (చదరపు అడుగులలో.)

(1) 63-వ పటమునుబట్టి, $lb-(l-2p)\,(b-2p.)$

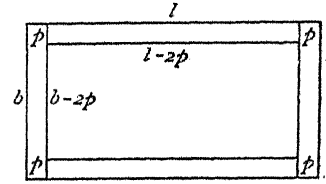
(2) 64-వ పటమునుబట్టి, $2\,(l-2p)p + 2\,bp$.

(3) 65-వ పటమునుబట్టి, $2\,(b-2p)p + 2\,lp$.

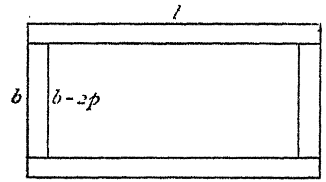
(4) 66-వ పటమునుబట్టి, $(2l-2p)p + 2\,(b-2\,p)\,p + 4\,p^2$.



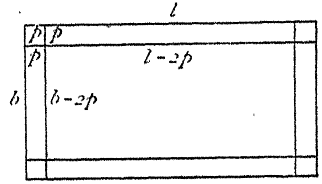
పటము 63.



పటము 64.



పటము 65.



పటము 66.

పై ఒక్కొక్క సందర్భములోని దారియొక్క భూఫలమునకు నాలుగేసి సమాసములు చెప్పబడియున్నవి. అవి నాలుగేసి పద్ధతులను సూచించునే కాని, వాటిని అన్వయించునప్పుడు ప్రాప్తించు ఫలము, ఒకేఫలము.

అభ్యాసము 16.

1. ఒక ప్రయోగశాలయొక్క పొడుగు 93 అ., వెడల్పు 35 అ. దాని భూఫలము కట్టుము. దానియొక్క మాదిరి గీయుము. (ప్రమాణము: 10 అ. = 1 సెం.మీ.)

2. ఒక్కొక్కటి $3'\,6''\times 6'$ ఉన్న రెండు తలుపులును, ఒక్కొక్కటి $3'\times 4'\,6''$ ఉన్న 3 కిటికీలును, ఒక గదికి గలవు. గాలి వెలుగు సదుపాయమునకై గోడలలో ఎంత భూఫలము కేటాయింపు అయినది?

3. ఒక వీధిపొడుగు 1 ఫ. 22 గ. దాని వెడల్పు 24 అ. దాని భూఫలము ఎంత?

4. ఒక వార్తాపత్రికను తెప్పించువారి సంఖ్య 8,000. ఆ పత్రికయొక్క ప్రతిరోజు సంచికలోను మూడేసి టావులుండునుగాని, ఆదివారమునాడు మాత్రము ఒకటే టావు ఉండును. ఒక్కొక్క టావు $3'\times 2'$. ఒక వారములో అగు కాగితపు భూఫలము కట్టుము.

5. 13·5 గొలుసుల పొడుగును, 10·5 గొలుసుల వెడల్పునుగల ఒక ఆటస్థలముయొక్క మాదిరి గళ్లకాగితముమీద గీయుము. (ప్రమాణము,

1 అం.=1·5 గొలుసులు.) ఆటస్థలముయొక్క భూఫలము మాదిరిలో ఎంత? మాదిరిలో 1 చ. అం. ఎంత అసలు భూమికి చిహ్నముగానున్నది?

6. ఒక మాదిరి పటములో 1 అంగుళమనగా 10 మైళ్లు. 1,94,000 ఎకరముల భూఫలముగల ఒక జిల్లా తాలూకు మాదిరియొక్క వైశాల్యము ఎంత?

7. $\dfrac{\text{చిహ్నముగా ఉన్న పొడుగు}}{\text{అసలు పొడుగు}}$ (1 : n అనెడి రూపమున) **"చిహ్నభిన్నము"** అనబడును. (చి. భి.) 5-వ, 6-వ ప్రశ్నలలోని (చి. భి.) కట్టుము.

8. ఒక చతురస్రపు చెరువుయొక్క భుజము 186′. పైనుండి 8 మెట్ల క్రిందివరకు నీరు తగులదు. మెట్టుయొక్క వెడల్పు 1 అ. 2 అం. నీరు నిలిచిన భూమియొక్క ఫలము కట్టుము.

9. ఆయతమగు ఒక దొరువునకు చుట్టును కట్టిన ఒక దడి మొత్తమున 180 అ. ఉన్నది. ఆ దొరువుయొక్క పొడుగు, వెడల్పునకు రెట్టింపు. దడి ఆవరించిన భూమియొక్క ఫలము కట్టుము.

10. ఒక తాలింఖానాయొక్క పొడుగు, వెడల్పుకంటె 500 అ. హెచ్చున్నది. పొడుగు వెడల్పుల నిష్పత్తి 7 : 3. దాని భూఫలము కట్టుము.

11. 10½ మైళ్ల పొడుగును గమనించినచో, రైలుపట్టాలమధ్య భూమియొక్క ఫలము 7 ఎకరములు. రైలుపట్టాల ఎడము కట్టుము. (వంపులు లేవనుకో.)

12. ఒక ఆయతభూమియొక్క ఫలము 17,625 చ. అ. దాని వెడల్పు 75 అ. పొడుగు ఎంత?

13. ఆయతమగు ఒక బీడుయొక్క పొడుగు 85 అ., భూఫలము 2,975 చ. అ. వెడల్పు ఎంత?

14. 20 అ. పొడుగున్న ఒక గదియొక్క నేలను 1,440 రాతిపలకలు పరవవచ్చును. దాని వెడల్పు ఎంత?

15. 15 అ. ఎత్తున్న ఒక గోడకు, 210 అ. పొడుగును 2½ అ. వెడల్పును గల కాగితమును కోసి అంటించుటకు స్థలమున్నది. ఆ గోడయొక్క పొడుగు కట్టుము.

16. ఒక గది మరియొక గదికి రెట్టింపు విశాలముగనున్నది. చిన్న గదియొక్క పొడుగు వెడల్పుల నిష్పత్తి 9 : 7; చుట్టుకొలత 64 అ. పెద్ద గది పొడుగు 27 అ. అయినచో, వెడల్పు కట్టుము.

17. ఒక గదియొక్క పొడుగు 24 అ., వెడల్పు 6 అ. మరియొక గదియొక్క పొడుగు వెడల్పులు క్రమమున, మొదటిదాని పొడుగులో $\frac{1}{2}$ ను, వెడల్పులో $\frac{4}{3}$ ను. రెండవదాని ఆకారము ఏ క్షేత్రము? రెండు గదుల భూఫలములను పోల్చుము.

18. ఒక బల్ల పొడుగు 5′ 8″, వెడల్పు 3′ 6″. దీని పొడుగుకంటె మరియొక బల్ల పొడుగు 2′ 4″ హెచ్చు, దీని భూఫలములో $\frac{6}{7}$ ఆ మరియొక బల్లయొక్క భూఫలము. మొదటిబల్ల వెడల్పు రెండవబల్ల వెడల్పుకంటె ఎంత హెచ్చు?

19. 8 గ. పొడుగును 1 గ. వెడల్పునుగల "చెక్క" గుడ్డనుండి, ఒకొక్కటి 2′ × 1½′ ఉన్న తుడుపుగుడ్డలు ఎన్ని తీయవచ్చును?

20. 20′ పొడుగు, 16′ వెడల్పు, 12′ ఎత్తునుగల ఒక గది తాలూకు నాలుగు గోడలయొక్కయు భూఫలము కట్టుము.

21. 24′ × 18′ ఉన్న ఒక గదిలో కడపరాళ్లు పరపించుటకు, 100 చ. అడుగులకును 35 రూ. చొప్పున, ఎంత అగును? రాళ్లు నలుచదరములై 1 అ. 6 అం. భుజముగలవైయైనచో అట్లు పరచుటకు ఎన్ని కావలెను? 2′ 3″ × 1′ 6″ ఉన్న రాతిపలకలను ఆ గదిలోనే పరచినచో, అవెన్ని సరిపోవును?

22. 45′ × 36′ × 10′ ఉన్న ఒక హాలునకు వెల్లవేయుటకు 100 చ. అడుగులకును 6 అ. చొప్పున, ఎంత అగును?

23. పై ప్రశ్నలో, ఒకొక్కటి 3′ 6″ × 6′ 6″ ను గల తలుపులు 6 ను, ఒకొక్కటి 2′ 9″ × 4′ 6″ నుగల కిటికీలు 3 ను ఉండినచో, అదేరేటున, వెల్లకు ఎంత అగునో కట్టుము.

24. 22-వ ప్రశ్నలో, గోడలమందము 1′ 6″ అయినచో, లోపలను వెలుపలను కూడ వాటికి రంగువేయుటకు ఏమగునో కట్టుము.

25. 36′ × 24′ ఉన్న ఒక ప్రయోగశాలలోని గోడలకు 5′ ఎత్తువరకు ఒక రంగువేయవలెను. శాలకు, ఒకొక్కటి 4′ × 7′ ఉన్న తలుపులు 6 ను,

ఒకొక్కటి 3′ 4″ × 5′ 6″ ఉన్న కిటికీలు 6 ను గలవు. నేల మట్టమునకు కిటికీలు 3′ ఎత్తున ఉన్నచో, రంగువేయుటకున్న మేర ఎంత?

26. ఒక బడిలోని గదిగోడ పొడుగు 20 అ. దానికి, నేలమట్టము పైన 3′ నుండి 6′ 6″ వరకు మసిరంగు వేయవలెను. నేల మట్టమునకు 2′ 9″ ఎత్తున 3′ × 4′ 6″ ఉన్న కిటికీలు రెండును, 3′ 6″ × 6′ 6″ ను ఉన్న తలుపు ఒకటియు, దానికి గలవు. రంగువేసిన మేర ఎంత?

27. ఒక షాపుయొక్క ముఖములలో నొకటి పూర్తిగ అద్దపుది. ఆ ముఖము యొక్క అంచులలో అడుగుది తప్ప కడమవన్నియు 2′ వెడల్పుగల రంగు అద్దములును, తక్కినది యావత్తును సాదా అద్దమును అయినచో, రంగు అద్దము ఖరీదు సాదాదానికి 1·2 రెట్లు అని తెలిసి, రెండు రకముల అద్దములకును అయిన ఖర్చులను పోల్చుము.

28. 18′ 6″ × 14′ 6″ × 10′ ఉన్న ఒక గదియొక్క గోడలలో ఒక అడ్డపుగోడ మినహాయించి కడమ మూడు గోడలకును సున్నమైనను చేయవలెను, (పోర్టలెండు) సిమెంటైనను చేయవలెను. తలుపులును, కిటికీలును కలిపి 60 చ. అ. ఆక్రమించును. సున్నమైతే 100 చ. అ. కు రూ. 5—12—0 ను, సిమెంటైతే 100 చ. అ. కు 14 రూ. ను అగును. రెండింటికిని అయ్యెడి ఖర్చులలో తేడా కట్టుము.

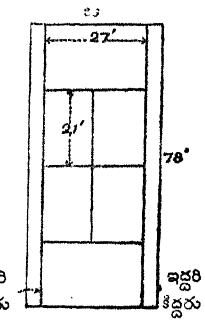
29. ఒక గదియొక్క నేల 100 చ. అ. కు 15 రూ. చొప్పున సిమెంటు మరమ్మతు చేయించుటకు రూ. 40—8—0 అగును. ఆ గది పొడుగు 18 అ. ను, ఎత్తు 12 అ. ను అయినచో, 100 చ. అ. కును 6 రూ. చొప్పున ఆ గది గోడలకు లోపలివైపున సున్నము చేయుటకు ఎంత అగునో కట్టుము.

30. ఒక హాలుయొక్క సరంబీ అలంకరించుటకు చ. అ. 1-కి రూ. 2—8—0 చొప్పున 3,500 రూ. అగును, గోడలమీద రంగుబొమ్మలు వేయించుటకు చ. అ. 1-కి రూ. 1—8—0 చొప్పున 4,500 రూ. అగును. ఆ హాలు వెడల్పు 35′ అయినచో, దాని పొడుగును, ఎత్తును కట్టుము.

31. $12\frac{1}{2}'$ ఎత్తున్న ఒక గదియొక్క గోడలకు కాగితము అంటింపవలయునన్న, 440′ పొడుగును $2\frac{1}{2}'$ వెడల్పునుగల ఒక కాగితపుచుట్ట సరిపోవును. ఆ గదియొక్క పొడుగు, వెడల్పునకు $1\frac{1}{2}$ రెట్లున్నచో, చ. అ. 1-కి 4 అణాలచొప్పున గది నేలపై తివాసీపరచుటకు ఎంత అగును?

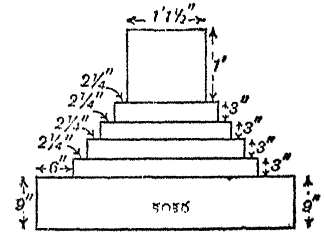
32. 18′ 6″ పొడుగును $12\frac{1}{2}'$ ఎత్తునుగల ఒక గోడయావత్తును $2\frac{1}{2}'$ వెడల్పుగల ఒక కాగితపుచుట్ట అతికించవలెను. కాగితపుచుట్ట విప్పినచో ఎంత పొడుగుండును? చ. అ. 1-కి 1 అణా చొప్పున కాగితపు ఖర్చు ఎంత?

33. 67-వ పటమగు ఒక మామూలు టెన్నిసు కోర్టుయొక్క మాదిరిలో, సింగిల్సు (ఒకరికొకరు) ఆటలో ఎంతమేర మినహాయింపు అగునో కట్టుము. తోలిబంతి, రూల్సుప్రకారము, కొకరు ఎంతమేరలో పడవచ్చునో కూడ కట్టుము.



పటము 67.

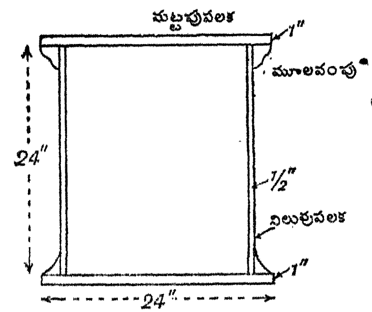
34. ఈ ప్రక్కబొమ్మ (పటము 68.) ఒక గోడ తాలూకు పునాదియొక్క ఛేదమునకు మాదిరి. (a) కంకరభాగపు ఛేదముయొక్కయు, (b) కంకరకు పైనున్న నాలుగు మెట్ల తాలూకును ఛేదముయొక్కయు, (c) మెట్లపైనున్న అసలు గోడ తాలూకు ఛేదముయొక్కయు భూఫలములను కట్టుము.



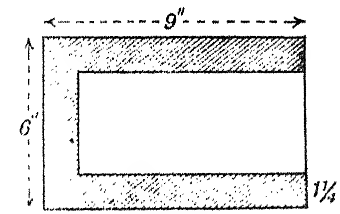
పటము 68.

35. (పటము 69.) ఒక ఇనుపపెట్టెయొక్క ఛేదము. మూలవంపులు మినహాయించి, పెట్టె తాలూకు నిలువు పలకలయొక్కయు, మట్టపు పలకలయొక్కయు ఛేద భూఫలమును కట్టుము.

36. 70-వ పటములో గీసి ఉన్న భాగపు భూఫలమును కట్టుము.

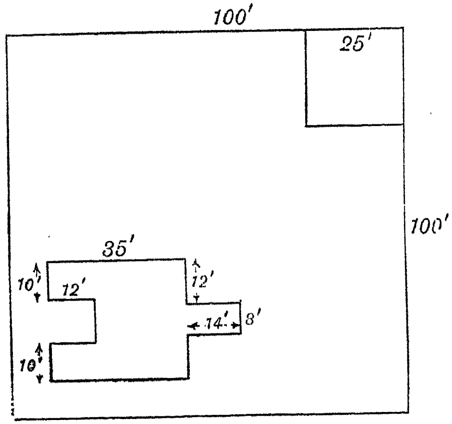


పటము 69.



పటము 70.

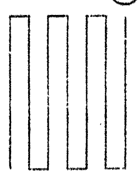
37. 71-వ పటము ఒక భవనమును నలుచదరపు గొయ్యియు ఇమిడి ఉన్న ఒక ఆవరణయొక్క మాదిరి. ఆ ఆవరణలోని తక్కిన మేరయొక్క భూఫలమును కట్టుము.

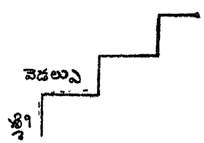


పటము 71.

38. 30′ × 22′ ను గల ఒక దొడ్డికి మధ్యగా 8′×6′ గల ఒక దిబ్బగలదు. దిబ్బ మట్టుకు సిమెంటు చేసి, చుట్టు నున్న భూమిని నలుచదరపు రాళ్లు పరచినచో, ఎంతగునో కట్టుము. నలుచదరపు రాళ్లు 100 చ. అ. ను 34 రూ., సిమెంటు పని 100 చ. అ. కు 15 రూ.

39. నూట ఇరవై గజముల "హార్డిల్" (ఆటంకపు) పందెములో, ప్రతి పోటీదారుయొక్కయు దారిలో 2′ 6″ ఎడమున, పొడుగునను త్రాళ్లు కట్టియున్నవి. 72-వ పటములోవలె ఆ త్రాడు ఒకేత్రాడై, ఆటంకముయొక్క పొడుగు 15 అ. అయినచో, మొత్తపు పొడుగు ఎంత గలిగిన త్రాడు సరిపోవును? ఒకొక్క పరుగువానికి ఎంత మేర ఇచ్చినట్లు?


పటము 72.

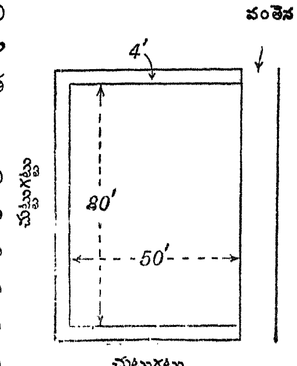


పటము 73.

40. ఒక మెట్లవరుసమీద నడచిపోవుటకు గుడ్డ పరచినారు. ప్రతి మెట్టుయొక్కయు వెడల్పు 12″, ఎత్తు 7″. 32 మెట్లకు ఎంత పొడుగుగల గుడ్డ సరిపోవును? అది ఎంతమేర ఆక్రమించును?

41. ఒక వంతెన తయారగుచున్న సందర్భమున రాధారీ అడ్డకుండ ఆయాతాకారమున (ప. 74) ఒక గట్టుపోసినారు ఆ గట్టు వెడల్పు 4′ అయినచో, నడకకు ఎంతమేర కేటాయింపు చేయడమైనది?

42. ఒక వంతెనయొక్క పొడుగు 400′, వెడల్పు 72′. దానికి ఇరు ప్రక్కలను 9′ 6″ వెడల్పున ఎత్తుచేసిన కాలి దారులున్నవి. మధ్య, 12′ వెడల్పున "ట్రాం" బళ్లకు అట్టే పెట్టియున్నది. వంతెనమీద ఎంత భూమి బళ్లనిమిత్తము కేటాయించినారు?



పటము 74.

43. 450′×250′ ను గల ఒక ఆయతపు చెరువుచుట్టును ఒక అగ్రహారము (బ్రాహ్మణ గృహములవరుస) ఉన్నది. చెరువుచుట్టును 25′ వెడల్పున రోడ్డు ఉన్నచో, దానిని 4″ లోతునకు కంకరిచేయుటకు ముక్కరాయి ఎంత కావలెను? (దిమ్మిసాలో 5 ఘ. అం. లోని రాయి, 4 ఘ. అంగుళములలో ఇరుకునని అనుకో.)

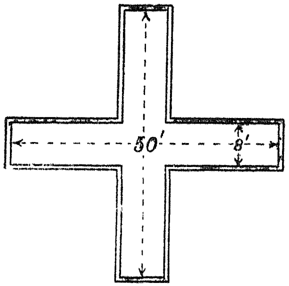
44. 24′×16′ ను (వెలుపలి కొలతలుగా) గల ఒక గదికి చుట్టును 8 అ. వెడల్పు వసారా ఉన్నది. ఆ వసారాను 6″ చదరపు పలకలతో చప్టాచేసినచో, 100 చ. అ. కు 34 రూ. ప్రాప్తికి, ఎంత అగును? ఎన్ని పలకలు పట్టును.

45. 12′ 6″×8′ 6″ గల ఒక గదిలో చాపపరచుటకు రూ. 26—9—0 అయినచో, అట్టిదే పరచుటకు 20′ $7\frac{1}{2}$″×18′ 6″ గల మరియొక గదికి ఏమగును?

46. ఒక గోడకు రంగువేయుటకు రూ. 7—14—0 అగును. అంతే ఎత్తుండి, మరి 12 అ. పొడుగుగల మరియొక గోడకు వేయుటకు రూ. 22—8—0 అగును. ఈ గోడ పొడుగెంత? ఆ గోడదెంత?

47. రెండు ఇంటికప్పుల వాలు ఎత్తులు సమములేకాని, ఒకటి రెండవదానికంటె 5 అ. ఎక్కువ పొడుగుండుటవల్ల, అది 150 చ. అ. ఎక్కువ ఆక్రమించినది. ప్రతిదాని వాలు ఎత్తును కట్టుము.

48. 100 చ. అ. ను 34 రూ. ఖరీదున్న గట్టిపెంకులు ఒక నేలను పరచుటకు 73·44 రూ. అగును. దాని పొడుగు వెడల్పుల నిష్పత్తి 3 : 2. మరి 6 అ. పొడుగును మరి 4 అ. వెడల్పునుగల మరియొక నేలను అట్టివే పరచుటకు ఎంత అగును?



పటము 75.

49. 75-వ పటము ఒక పూల మడియొక్క ఆకారము. 1 ఘ. అ. కంకర 6 చ. అ. మేరకు సరిపోయినచో మడిచుట్టును కంకరదారి వేయుటకు ఎంత కంకర పట్టును?

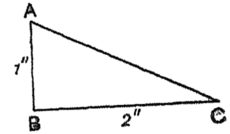
50. p'' పొడుగు, q'' వెడల్పు, r'' ఎత్తును గల ఒక పెట్టె తయారుచేయుటకు (a) మూత ఉన్నప్పుడు, (b) మూతలేనప్పుడును, ఎంతెంత గట్టి అట్టకావలయును? ఇచ్చియున్న కొలతలు మూత ఉన్నప్పటివే అని అనుకొని, అట్టమందము S అంగుళములని తీసికొని, పెట్టె వెలుపల ఎంత భూఫలముగల కాగితమును అంటించవచ్చునో కట్టుము.

51. ఒక భోజనపు హాలు పొడుగు 40′. చుట్టును, 2′ వెడల్పున, చ. అ. 1-కి 1 రూ. చొప్పున ఖర్చుతో అది సాలగచ్చుచేసి ఉన్నది. ఆ వెడల్పును 1½ రెట్లు చేసినచో, 130 రూ. ఎక్కువ ఖర్చు అగును. ఆ హాలు వెడల్పు కట్టుము.

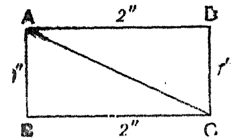
52. 46′ × 36′ గల ఒక ఆయతాకారపు తోటలో చుట్టును, మధ్య నిలువు అడ్డములును, 2′ వెడల్పున కంకరదారి ఉన్నది. ఆయతములగు భాగములలో ఒకొక్కదాని మధ్య, 7′ వ్యాసార్థముగల వృత్తాకారపు పూలమడి ఉన్నది. తక్కినదానిపై పచ్చికబెల్లులు వేసినారు. చ. అ. 1-కి 1 అ. చొప్పున కంకరచేయుటకు ఖర్చును, చ. గ. 1-కి 1 అ. 6 పై. చొప్పున బెల్లులు వేయుటకు ఖర్చును కట్టుము. [వృత్తముయొక్క భూఫలము = $\frac{22}{7}$ × (వ్యాసార్థము)^2.]

53. ఒక గది 18′ × 16′ ఉన్నది. మధ్యభాగము (అది చతురస్రము) ఒక రకపు నగిషీరాతితోను, దానికి చుట్టునున్న భాగము మరియొక రకపు నగిషీరాతితోను అలంకరించినారు. మధ్యనున్న రకము 100 చ. అ. కును 4 రూ. చొప్పునను, చుట్టునున్న రకము దానికి 1½ రెట్లు చొప్పునను ఖరీదులుగలిగి, మధ్యభాగముకంటె చుట్టుభాగమునకు 2·78 రూ. ఎక్కువ ఖర్చు పడినచో, ఆ చతురస్రముయొక్క భుజమును కట్టుము.

67. త్ర్యస్రముయొక్క భూఫలమును కట్టుట.



పటము 76.



పటము 77.

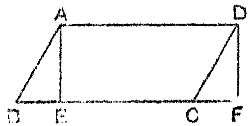
ABC ఒక త్రిభుజము, B అనునది సమకోణము. AB=1″, BC=2″. A నుండి BC కి సమానాంతరముగ ఒక రేఖ గీయుము. C నుండి AB కి సమానాంతరముగ CD అను రేఖ గీయుము. ABCD అను క్షేత్రము ఒక ఆయతము. AC అను కర్ణము వెంట ఆయతమును కత్తిరించి, జనించెడి త్రిభుజములలో ఒకటి రెండవదానిపై పెట్టి వాటికి సంపూర్ణాచ్ఛాదన ఉండుట గమనించి, AC అను కర్ణము ఆయతమును రెండు సమభాగములు చేయుట గ్రహింపవచ్చును.

∴ △ ABC = ½ ఆయతము ABCD.

= ½ BC. AB. (= ½. 2.1 = 1 చ. అం.)

= సమకోణభుజముల లబ్ధములో సగము.

68. సమానాంతర చతుర్భుజముయొక్క భూఫలమును కట్టుట.



పటము 78.

ABCD అనునది ఒక సమానాంతర చతుర్భుజము. A నుండి BC కి లంబముగ AE గీయుము. ABE అను త్ర్యస్రమును కత్తిరించి DCF అను స్థానమున, AB అను భుజము సమానాంతరపు భుజములలో నొకటియగు DC తో సరాసరియగునట్లు పెట్టుము. అప్పుడు AEFD అను క్షేత్రము, సమానాంతరచతుర్భుజపు భూఫలమేగల ఆయతమగును.

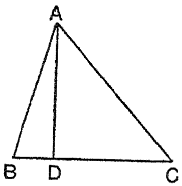
∴ సమానాంతర చతుర్భుజముయొక్క భూఫలము

= వచ్చిన ఆయతముయొక్క భూఫలము.

= AD. AE.

∴ సమానాంతర చతుర్భుజముయొక్క భూఫలము = భూమి × ఉన్నతాంశము.

69. త్రిభుజముయొక్క భూఫలమును కట్టుట.



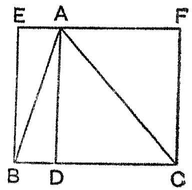
పటము 79.

ABC అనునది ఒక త్రిభుజము. A నుండి BC కి లంబముగ AD గీయుము.

అప్పుడు, △ ABC = △ ABD + △ ADC
= ½ BD.AD + ½ DC.AD.
= ½ AD (BD + DC).
= ½ AD.BC.
= ½ భూమి × ఉన్నతాంశము.

లేక పై పటములో A మీదుగా, BC కి సమానాంతరముగ, EAF గీసి, దానికి B, C లనుండి BE, CF అను లంబములు గీయుము.

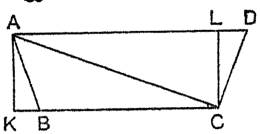
అప్పుడు, △ ABD = ½ × EBDA అను ఆయతము.
గాక, △ ADC = ½ × ADCF.
∴ △ ABD + △ ADC = ½ (EBDA + ADCF).
అనగా, △ ABC = ½ EB.BC
= ½ BC.AD.



పటము 80.

70. విషమ చతుర్భుజముయొక్క భూఫలము.

షరా. ఒక చతుర్భుజమునకుగల ప్రతిముఖ భుజయుగ్మములలో ఒకటిమాత్రమే సమానాంతరమై తక్కినది కాకుండిన, అట్టి క్షేత్రమునే విషమచతుర్భుజమందురు.



పటము 81.

ABCD ఒక విషమచతుర్భుజము—AD, BC లు సమానాంతరములు, AB, CD లు అసమానాంతరములు. ఈ విషమచతుర్భుజమునకు ABC, ACD అను త్రిభుజములు భాగములు. A, C లనుండి AC, BD లకు, క్రమమున AK, CL లు లంబాత్మకముగ గీయుము.

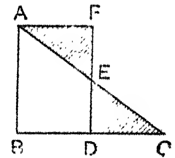
అప్పుడు, △ ABC = ½ BC.AK.
△ ACD = ½ AD.CL.
పైగా, AK = CL.
∴ △ ACD = ½ AD.AK.

∴ △ ABC + △ ACD = ½ BC.AK + ½ AD.AK.
= ½ AK (BC + AD).
= సమానాంతర భుజయుగ్మపు మొత్తములో సగము × వాటి ఎడము.

అభ్యాసము 16 (తరువాయి.)

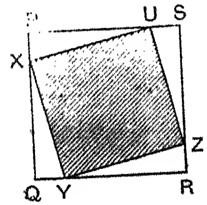
54. ఈ క్రింది భుజములతో త్రిభుజములను రచింపుము:—(*a*) 3″, 4″, 5″. (*b*) 9″, 12″, 15″. (*c*) 5 సెం.మీ., 12 సెం.మీ., 13 సెం.మీ. (*d*) 2·4″, 2·5″, ·7″. అవి సమకోణత్రిభుజము లేమో సరిచూడుము. తద్వారా, వాటి భూఫలములు కట్టుము.

55. ∠ B = 90°, AB = 3·5″, BC = 1·5″ ను గల ABC అను త్రిభుజము కలదు. BC ని D వద్ద సమద్విఖండన చేయుము. D నుండి AB కి సమానాంతరముగ DF గీయుము. A నుండి BC కి సమానాంతరముగ AF గీయుము. EDC అను త్రిభుజమును కత్తిరించి, తీసి, దానిని AFE అను త్రిభుజముపై పెట్టి ఆ రెంటిను సర్వథాసమములని నిరూపింపుము. ఆపైని, ఈ సమకోణత్రిభుజముయొక్క భూఫలము ABDF అను ఆయతపు భూఫలమునకు సమమని నిరూపింపుము.



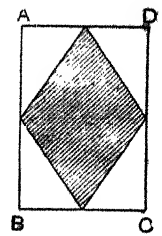
పటము 82.

56. PQRS అనునది 15 గ. భుజముగల ఒక నలుచదరపు పచ్చిక బయలు. PX = QY = RZ = SU = 3 గ. అయ్యెడు స్థితిగా, PQ, QR, RS, SP లలో X, Y, Z, U లు బిందువులు. XUZY అనునది ఆ బయలులో జలము నిల్చిన మేర. దాని భూఫలము కట్టుము.

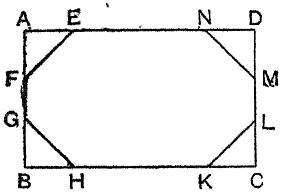


పటము 83.

57. ABCD అనునది 90′ × 12′ గల ఒక ఆయతాకారపు పొలమునకు నూదిరి. భుజములయొక్క మధ్యబిందువులు కలుపగా వచ్చు భాగము పాలగచ్చుచేసి ఉన్నది. దాని భూఫలము కట్టుము.

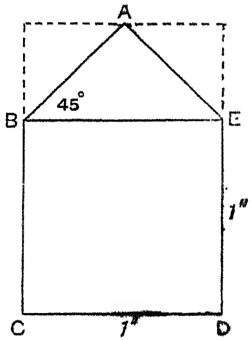


పటము 84.



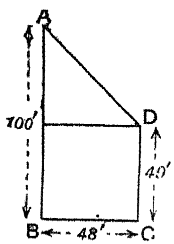
పటము 85.

58. ABCD అనునది 80″ × 51·2″ గల ఒక ఆయతాకారపు ఇనుపరేకు. నాలుగు మూలల నుండియు నాలుగు త్రిభుజాకారపు ముక్కలు, పటములోవలె, కొట్టివేయడమైనది. AE = AF = BG = BH = CK = CL = DM = DN = 1 అ. మిగిలెడి ముక్కయొక్క భూఫలము కట్టుము. (పటము సప్రమాణముగ గీసినది కాదు.)



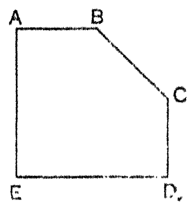
పటము 86.

59. ABCDE అనునది $\frac{1}{144}$ అను ప్రమాణమున, అనగా 1 అం. 4 గజములకు ప్రమాణముగ, గీసియున్న ఒక మాదిరి. దానిని ఆ ఆయతము యొక్కయు ఆ ముక్కలు పెట్టిన రెండు సమకోణ త్రిభుజములయొక్కయు వేడాగా గమనించి, దాని భూఫలమును కట్టుము.



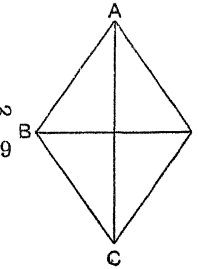
పటము 87.

60. 87-వ పటము ఒక పెంకుటింటి తాలూకు ప్రక్క గోడయొక్క మాదిరి. దానిని (*a*) ఒక ఆయతముయొక్కయును ఒక సమకోణ త్రిభుజముయొక్కయును మొత్తముగను, (*b*) ఒక ఆయతముయొక్కయును ఒక సమకోణ త్రిభుజముయొక్కయును భేదాగను, గమనించి, దాని భూఫలము కట్టుము.



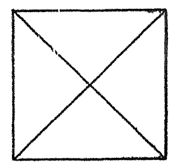
పటము 88.

61. ABCDE అనునది (పటము 88) ఒక మూల ఒక త్రిభుజాకారపు ముక్క కోసివేసిన ఒక కాగితము. దాని భూఫలము సూక్ష్మముగ ఎట్లు కట్టవచ్చు? అది 1″ = 13⅓ అ. అను ప్రమాణమున గీసి ఉన్నచో, దాని భూఫలము కట్టుము.



పటము 89.

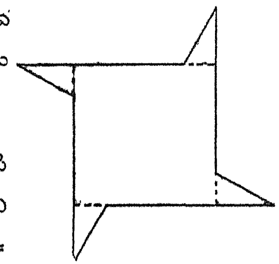
62. రెండు కర్ణములును గీయగా నాలుగు భాగములు అగుటను వాడి, ఈ ప్రక్కక్షేత్రము నెం. 89 యొక్క భూఫలమును కట్టుము.



పటము 90.

63. 1″ = 1⅓″ అను ప్రమాణమున గీసి ఉన్న ఈ ప్రక్క (పటము 90) నున్న చతురస్రపు భూఫలము కట్టుము. కర్ణములవల్ల ఏర్పడిన నాలుగు భాగముల భూఫలములను కలిపి కూడ దానిని కట్టుము. రెండు ఫలితములకును వార అసలున్నదా? ఏమాత్రము?

64. ఒకవేళ గుండ్రటి బెజ్జములున్నచో లేవ నుకొని, నీకు గల మూలమట్టముల భూఫలములు కట్టుము.



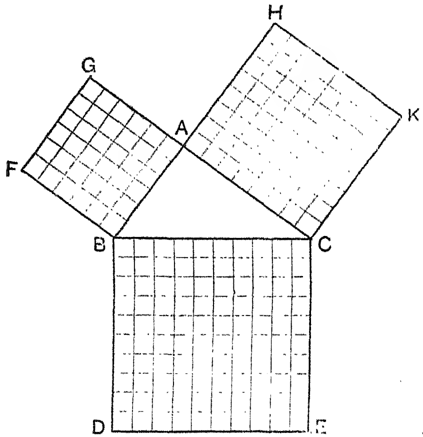
పటము 91.

65. ఈ ప్రక్కపటము సప్రమాణముగ గీసి ఉన్నది. చుక్కల గీతలు ఆధారము చేసికొని దాని భూఫలము కట్టుము. ప్రమాణము 1″ = 100 గజములు.

71. "పైతాగోరాస్" సిద్ధాంతము: దానికి వ్యావహారిక ఉపపత్తి.

AB, AC, BC లు, క్రమమున ·6 అం., ·8 అం., 1 అం. నుగల ABC అను సమకోణ త్రిభుజమును రచింపుము. AB, AC, BC లమీద, క్రమమున, ABFG, ACKH, BCED అను చతురస్రములను రచింపుము. వాటి భూఫలములను గమనింపుము.

చతురస్రమగు ABFG = ·36 చ. అం. [∵ AB = ·6 అం. ∴ $AB^2 = ·6 \times ·6 = ·36$.]



పటము 92.

చతురస్రమగు AHKC = ·64 చ. అం. [∵ AC = ·8 అం. ∴ $AC^2 = ·8 \times ·8 = ·64$.]

∴ చతురస్రమగు ABFG + చతురస్రమగు AHKC = ·36 + ·64 = 1·00......(1).

పైగా, చతురస్రమగు BCED = 1·00 చ. అం. [∵ BC = 1 అం. ∴ $BC^2 = 1 \times 1 = 1$]......(2).

(1), (2) లనుబట్టి విశదమగునది ఏమనగా,

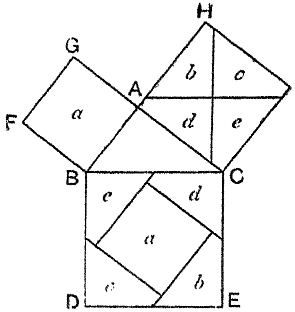
క్షే. BCED = క్షే. ABFG + క్షే. ACKH అనగా, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

సూచన.—చిన్న గళ్లు లెక్కపెట్టినను కూడ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ అను సంగతి విశదమే. ఏమన, BC^2 లో 100 గళ్లును, AB^2 లో 36 ను, AC^2 లో 64 ను కలవు. 100 = 36 + 64 అని తెలిసినదే.

భుజములపొడుగులు వివిధములు గలిగిన సమకోణత్రిభుజములను అనేకమును రచించి, ప్రతి సందర్భమునను ఈ ధర్మమును పరిశోధింపవచ్చును:— **సమకోణత్రిభుజ విషయములో, కర్ణముమీది (అనగా, సమకోణమునకు ప్రతిముఖ భుజముమీది) చతురస్రము, సమకోణాధార భుజములమీది చతురస్రముల మొత్తమునకు సమానము.** ఈ ధర్మమును సిద్ధాంతముచేసినది "పైతాగోరాస్" అగుటచే, దీనిని "**పైతాగోరాస్ సిద్ధాంతము**" అని వాడుదురు.

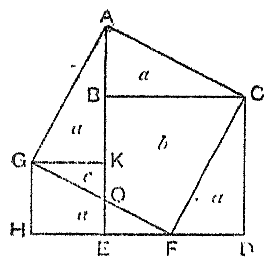
72. ఈ క్రింద ఇచ్చి ఉన్న క్షేత్రములు ఈ ధర్మమునే ఉదాహరించును వీటిలో మనము, పై పద్ధతిలోవలె గళ్లు లెక్కపెట్టము. చతురస్రములను ముక్కలక్రింద ఖండించి, ఆ ముక్కలయొక్క రచనచే, కర్ణచతురస్రము

తక్కిన రెండు భుజములమీది చతురస్రముల మొత్తమునకును సమమని బుజువు చేయుదుము. ఈ కాండను "**ఖండన పద్ధతి**" అందురు. 93-వ పటములో, చిన్న చతురస్రములలో ఒకటియగు ACKH యొక్క మధ్యబిందువుమీదుగా (అనగా, దాని కర్ణముల ఖండన బిందువుమీదుగా), కర్ణభుజమగు BC కి సమానాంతరముగ ఒక రేఖయు, BC కి లంబాత్మకముగ ఒక రేఖయు గీసి ఉన్నవి. ఈ రేఖలు ఆ చతురస్రమును, పటములో సూచించి ఉన్నట్లు, b, c, d, c అను నాలుగు ముక్కలుగ చేయును. ఈ నాలుగు ముక్కలను, "a" అని సూచింపబడిన చతురస్రమును తీసి, పటములో సూచించి ఉన్నట్లు BCED అను చతురస్రము జనించునట్లు రచింపవచ్చును.



పటము 93.

94-వ పటములో, ABC అనునది ఒక సమకోణత్రిభుజము. BC మీద BCDE అను చతురస్రము రచించి ఉన్నది. CF అనునది AC కి లంబాత్మకముగ గీయగా, ED ని F వద్ద ఖండించుచున్నది. A, F ల నుండి, CF, AC లకు, క్రమమున సమానాంతరముగ, AG, FG లు గీయబడినవి. ACFG అనునది ఒక చతురస్రమగును. FE యొక్క పొడిగింపునకు లంబముగ GH గీయుము.



పటము 94.

△ABC, △CDF, △GHF, △AGK— ఇవన్నియు సమములు. అందువల్ల ప్రతిదియు "a" చేత సూచింపబడినది.

BCFO అను చతుర్భుజము b చేతను, △GKO c చేతను సూచింపబడినవి.

AC^2 = క్షే. ACFG.

= △ABC + △AGK + △GKO + చతుర్భుజమగు BCFO.

$= a + a + c + b$.

$=$ చతుర్భుజమగు BCFO $(b)+\Delta FDC\ (a)+\Delta HGF\ (a)+\Delta GKO\ (c)$.

$=$ క్షే. BCFO $+\Delta DFC+\Delta OEF+$ క్షే. GHEO $+\Delta GKO$.

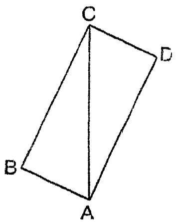
$=$ క్షే. BCDE $+$ క్షే. HEKG.

$=BC^2+GK^2$.

$=BC^2+AB^2$.

ఇట్లే, అనేకములగు ఇతరవిధముల, ఒక సమకోణత్రిభుజ విషయములో, $(\text{కర్ణము})^2=(\text{లంబము})^2+(\text{భూమి})^2$ అని నిరూపింపవచ్చును.

మాదిరి నెం. (1) ఒక ఆయతపు భుజములలో ఒకదానికొలత 12′, రెండవదానిది 9′. దాని కర్ణమును కట్టుము.



పటము 95.

ABCD అనునదిగనే ఆ ఆయతము అనుకో. అయినచో, AD=12, DC=9.

ADC అనునది సమకోణత్రిభుజము కాబట్టి,

$\therefore AC^2=AD^2+DC^2$.
$=12^2+9^2$.
$=144+81$.

$\therefore AC^2=225$.
$\therefore AC=\sqrt{225}=\sqrt{25\times 9}=5\times 3=15$.
$\therefore AC=\underline{15}$ అ.

మాదిరి నెం. (2) ఒక ఆయతాకారపు దొడ్డియొక్క ఐమూలకొలత 10 మైళ్లు, పొడుగు 8 మైళ్లు. వెడల్పు కట్టుము.

మాదిరి నెం. 1 లోని పటమునే ఉపయోగించినచో, ఇక్కడ AC=10 అనియు, AD=8 అనియు బోధపడును. DC కట్టవలయును.

ADC అనునది సమకోణ త్రిభుజమగుటచే,

$\therefore AD^2+DC^2=AC^2$.

$\therefore DC^2=AC^2-AD^2$.

$=10^2-8^2$.

$=100-64$.

$=36$.

$\therefore DC=6$.

$\therefore$ వెడల్పు 6 మైళ్లు.

అభ్యాసము 16 (తరువాయి.)

66. ఇచ్చిన కొలతలు రెండును సమకోణాధార భుజముల పొడుగులైనచో, ఈ క్రింద ప్రతి సమకోణత్రిభుజ సందర్భములోను, కర్ణముయొక్క పొడుగు కట్టుము:—

(a) 18 అ., 24 అ.; (b) 25 అ., 60 అ.; (c) 108 గ., 144 గ.; (d) *$2ab$ అ., (a^2-b^2) అ.; (e) *2K అ., (K^2-1) అ.

67. ఒక నిచ్చెన ఒక గోడకు జేరవేసియున్నది. దానియొక్క క్రిందికొన గోడకు 5′ ఎడమునను, పైకొన నేలకు 12 అ. ఎత్తునను ఉన్నవి. దాని పొడుగు కట్టుము.

68. 80′ పొడుగున ఒక స్తంభము నిటారుగనున్నది. దానియొక్క పైకొనకు 100 అ పొడుగుగల త్రాడు ముడివేసియున్నది. స్తంభముయొక్క మొదలునుండి ఆ త్రాటియొక్క రెండవచివర ఎంత ఎడమున పాతినచో త్రాడు బిగియును?

69. నేలపై ఒక సమకోణము గీయగలందుకు నీకు ఒక "టేపు" ముక్క ఇచ్చినారు. ఎట్లు గీయుదువు? (ఇతర పరికరములు ఏమియు నల్లకాదు.)

70. సన్నిహిత భుజములు 30′ ను, 40′ ను గల ఒక ఆయతముయొక్క కర్ణము పొడుగెంత?

71. ∠C సమకోణముగచేసి, ABC అను సమకోణ త్రిభుజము గీయుము. AB పై CD అను లంబము గీయుము. (a) AD. BD యొక్కయు, (b) AD. AB యొక్కయు, (c) BD. AB యొక్కయును విలువలు కట్టి అవి క్రమమున CD^2, AC^2, BC^2 లకు సమములని నిరూపింపుము.

72. ABCD అను పొలము B, D ల వద్ద సమకోణాత్మకము. దాని భుజములగు AB, BC, CD, DA లు క్రమమున, 153 గ., 204 గ., 120 గ., 225 గ. దాని భూఫలము కట్టుము.

73. ఒకచోట రైలు బద్దలమీద 30° వాలున ట్రాంబద్దలున్నవి. రైలు బద్దల ఎడము 5′ 6″, ట్రాంబద్దల ఎడము 3′ 3″. వీటి వాటి మధ్యనున్న నేలకు భూఫలము కట్టుము.

74. 40′ వెడల్పుగల ఒక ప్రవాహముపైనున్న ఒక రోడ్డు దానితో 45° కోణము చేయుచున్నది. ఆ వంతెన వెడల్పు 25′ అయినచో, దాని భూఫలము కట్టుము. ఏదో నీలగు ప్రమాణమునకు గీయుము.

* ఇవి బీజగణిత సంగిణ సూత్రములు నేర్చినపిదప చేయనగును.

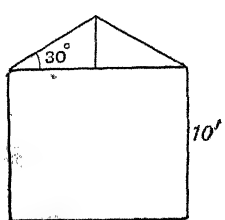
75. ఒక్కొక్కటి 3′ 6″ పొడుగుగల నాలుగు కర్రముక్కలకు ఒక చతుర్భుజాకారము వచ్చునట్లు మరలు త్రిప్పి ఉన్నవి. రెండు సన్నిహిత భుజముల మధ్య కోణము (a) 45°, (b) 60°, (c) 90°, (d) 120°, (e) 135° ను, అయినప్పుడు ఆ చతుర్భుజపు భూఫలమును కట్టుము. ఫలితములలో ఏదైన విశేషమును గమనింతువా?

76. AB = 2′ 6″, BC = 2′, ∠ BAC = 30°, AD = DC = 3·25′ గల ABCD అను చతుర్భుజమును రచింపుము. భుజములయొక్క మధ్య బిందువులను నిర్ణయింపుము. వాటిని సక్రమముగ కలుపుము. అట్లేర్పడు ఆకారమును రేఖాగణితమున ఏమందురు? దాని భూఫలము ఎంత? (ఉన్నతోదర చతుర్భుజమును విచారణచేసిన చాలును.)

77. ఒక సమచతుర్భుజముయొక్క కర్ణములలో ఒకటి 14′, ఒకటి 28′. దానిని రచించి, దాని భూఫలమును కట్టుము.

78. త్రిభుజాకారమునను్న ఒక పొలముయొక్క భుజములు, క్రమమున, 96 గ., 86 గ., 76 గ. ఆ పొలముయొక్క భూఫలము కట్టుము. ఏదో వీలగు ప్రమాణమునకు గీయుము.

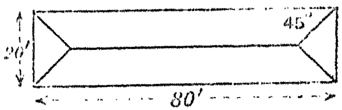
79. త్రిభుజాకారముగల ఒక పూలమడియొక్క శీర్షములలో ఒకటి, భుజము పొడుగు 100 అ. గల ఒక చతురస్రభుజములలో ఒకదాని మధ్య బిందువు. ఆ బిందువునకు ప్రతిముఖముగనున్న మూలలలో ఒకదానినుండి 20′ ఎడమున కర్ణముమీదనున్న బిందువు రెండవ శీర్షము. మిక్కిన మూల నుండి 20′ ఎడమున తక్కిన కర్ణముమీదనున్న బిందువు మూడవ శీర్షము. ఆ పూలమడియొక్క భూఫలము కట్టుము.



పటము 96.

80. 96-వ పటములోనున్న ఒక గది తాలూకు ప్రక్కగోడయొక్క భూఫలమును కట్టుము.

81. ఈ దిగువ ఇచ్చియున్నది ఒక ఇంటికప్పుయొక్క "ప్లాను." (పటము 97). త్రిభుజాత్మక భాగములయొక్కయు, విషమ చతుర్భుజాత్మక భాగములయొక్కయు భూఫలములను కట్టుము. వీటి భూఫలమును మరియొక పద్ధతినికూడ కట్టుము.



పటము 97.

82. AB = 8″, BC = 4″, CA = 6″ నుగల ABC అను త్రిభుజమును రచింపుము. A నుండి BC మీదను, B నుండి AC మీదను, C నుండి AB మీదను గీసిన లంబములను కొలువుము. ఈ లంబములు వాటి సంగత భుజములకు విలోమ నిష్పత్తిలోనున్నవని నిరూపింపుము.

83. రెండు త్రిభుజముల భూములు సమములు. వాటి ఉన్నతాంశములు 1·3″, 1·8″ ను: వాటి భూఫలములను పోల్చుము.

84. రెండు త్రిభుజముల ఉన్నతాంశములు సమములు. వాటి భూముల నిష్పత్తి 4 : 3. వాటి భూఫలములను పోల్చుము.

85. రెండు త్రిభుజముల భూఫలములు సమములు. వాటి భూముల నిష్పత్తి 6 : 5. వాటి ఉన్నతాంశములను పోల్చుము.

86. రెండు త్రిభుజముల భూఫలములు సమములు. వాటి ఉన్నతాంశముల నిష్పత్తి 3 : 5. వాటి భూములను పోల్చుము.

87. ABC అను ఏదో త్రిభుజము గీయుము. A మీదుగా BC కి సమాంతరముగ ఒక రేఖ గీయుము. దానిలో D అను ఏదో బిందువు తీసుకో. DB, DC కలుపుము. ఆ త్రిభుజము భూఫలమెంత? దాని భూఫలమును ABC యొక్క భూఫలమును పోల్చుము. తద్వారా, ఇది గ్రహింపుము: — **ఏకభూమిమీదగాని, లేక సమభూములమీదగాని ఉండి అవే సమాంతర రేఖల మధ్యనుండు త్రిభుజ భూఫలములు సమములు.**

88. ఒక త్రిభుజముయొక్క భూఫలము 4 చ. అం. దాని భూమి 3″. భూకోణములలో ఒకటి 30°. ఆ త్రిభుజమును రచింపుము.

89. ఒక త్రిభుజముయొక్క భూఫలము 16 చ. సెం.మీ. ఒక భుజము 8 సెం.మీ., మరియొకటి 5 సెం.మీ. ఆ త్రిభుజమును రచింపుము. ఆ త్రిభుజమును ఎన్ని మోస్తర్లుగ రచింపవచ్చును?

90. ఒక త్రిభుజము తాలూకు భుజములలో ఒకటి 6 సెం.మీ., మరియొకటి 10 సెం.మీ., భూఫలము 24 చ. సెం.మీ. ఆ త్రిభుజమును ఎన్ని మోస్తర్లుగ రచింపవచ్చును? వచ్చునది ఒక సమకోణ త్రిభుజమని నిరూపింపుము.

91. ABC అను ఏదో త్రిభుజము గీయుము. AB యొక్క మధ్య బిందువగు D ని నిర్ణయింపుము. దానిమీదుగా, BC కి సమానాంతరముగ, AC ని E వద్ద ఖండించెడి రేఖ గీయుము. కొలతచే E అనునది AC యొక్క మధ్యబిందువని నిరూపింపుము.

92. ABC అను ఏదో త్రిభుజము గీయుము. AB, AC లయొక్క మధ్యబిందువులగు D, E లను నిర్ణయింపుము. DE కలుపుము. అది BC కి సమానాంతరమని నిరూపింపుము.

93. పై ప్రశ్నలో BC యొక్క మధ్యబిందువగు F ను నిర్ణయింపుము. దానిని D, E లకు కలుపుము. BFED, DECF, FDAE లు సమానములగు సమానాంతర చతుర్భుజములని నిరూపింపుము. తద్వారా, $\triangle DEF = \frac{1}{4} \triangle ABC$ అని నిరూపింపుము.

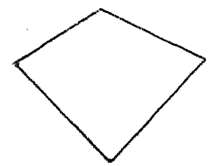
94. ABCD అను ఏదో సమానాంతర చతుర్భుజము గీయుము. BD అను కర్ణము గీయుము. దానిపై E అను ఏదో బిందువు తీసికొని దానిమీదుగా AB, BC లకు సమానాంతరముగ గీసిన రేఖలు సమానాంతర చతుర్భుజము తాలూకు భుజములను F, H, K, L ల వద్ద ఖండింపనిమ్ము. FK, HL అను సమానాంతర చతుర్భుజములు సమములని నిరూపింపుము. ఈ ఫలితమును $\frac{8{\cdot}3 \times 3{\cdot}6}{4{\cdot}8}$ అనుదాని విలువను కట్టుటకు, నీవు ఎట్లు ఉపయోగింతువు? [సమానాంతర చతుర్భుజము బదులు ఆయతమును గీసి లెక్క ప్రారంభింపుము.]

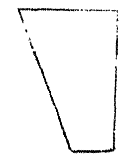
95. సమత్రిబాహు త్రిభుజములు అనేకము గీయుము. ఉన్నతాంశమును భుజపదములలో చెప్పి, ప్రతి సందర్భమునను, భూఫలము కట్టుము. తద్వారా,

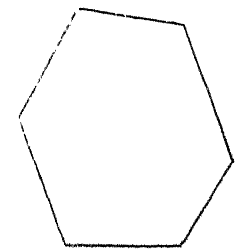
"a" అను భుజముగల సమత్రిబాహు త్రిభుజముయొక్క భూఫలము $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ అని నిరూపింపుము.

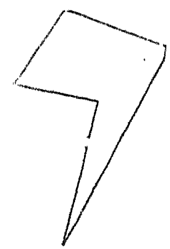
96. ఈ క్రింద ఇచ్చిన క్షేత్రములకు త్రిభుజాకారము జనింపజేసి, వాటి భూఫలములు కట్టుము:—

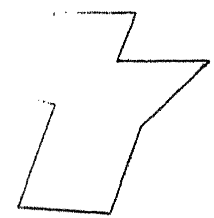
(ప్రమాణము 1 అం.=500 గ.)


పటము 98.


పటము 99.

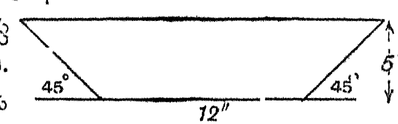

పటము 100.


పటము 101.


పటము 102.

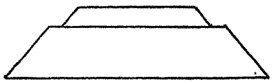
97. ఒక కాలువయొక్క అట్టడుగు వెడల్పు 40′. గట్లు, మట్టము 1 అయినప్పుడు నిలువు 2 అయ్యెడి రీతిని స్లోపుగనున్నవి. కాలువ లోతు 10′ అయినచో, కాలువ తాలూకు మధ్యచ్ఛేదముయొక్క భూఫలమును కట్టుము.

98. 103-వ పటము ఒక తొట్టె యొక్క మధ్యచ్ఛేదమునకు మాదిరి. మధ్యచ్ఛేదముయొక్క భూఫలమును కట్టుము.



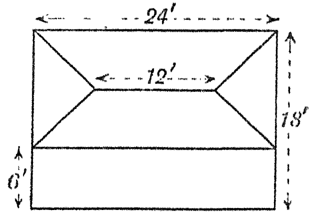
పటము 103.

99. ఒక గట్టుయొక్క పై వెడల్పు 18 అడుగులు. ఈ ప్రక్కను ఆ ప్రక్కను, ఆ గట్టు మట్టము 1 అయినప్పుడు నిలువు $1\frac{1}{2}$ అగు రీతిని స్లోపుగనున్నది. ఉపరి భాగమునకు 12 అ. క్రింద సమభూమి **తగు**లును. ఈ గట్టుమీద మధ్యభాగమును **ఒక** **శాశ్వత**పథము తాలూకు పరికరములు 12 అ. వెడల్పున ఆక్రమించి ఉన్నవి. ఆ పథముయొక్క స్లోపు 1 : 1. మరి, దాని ఎత్తు 1 అ. గట్టుయొక్కయు, పథముయొక్కయు మధ్యచ్ఛేదము తాలూకు భూఫలమును కట్టుము.



పటము 104.

100. 105-వ పటము ఒక ఇంటికిప్పు తాలూకు "ప్లాను." ఒకొక్క భాగమునకే భూఫలము కట్టి, తద్వారా, మొత్తము ఆ ప్లానుయొక్క భూఫలమును కట్టుము.



పటము 105.

అధ్యాయము XVII.

73. బీజగణితపు గుణకార భాగహారములు.

మాదిరి నెం. (1) $a+b$ ని $a+b$ చే గుణింపుము.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$\therefore (a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2.$

లేక $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2$ ....**(1)**

మాదిరి నెం. (2) $a-b$ ని $a-b$ చే గుణింపుము.

$$\begin{array}{l} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ \quad -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

$\therefore (a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$

లేక $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2-2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2$ ....**(2)**

మాదిరి నెం. (3) $a+b$ ని $a-b$ చే గుణింపుము.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ \quad -ab-b^2 \\ \hline a^2 \qquad -b^2 \end{array}$$

$\therefore (\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$..........**(3)**

మాదిరి నెం. (4) $x+3$ ని $x+5$ చే గుణింపుము.

$$\begin{array}{l} x+3 \\ x+5 \\ \hline x^2+3x \\ \quad +5x+15 \\ \hline x^2+(5+3)x+15 \end{array}$$

$x^2+(5+3)x+15$, లేక $x^2+8x+15.$

మాదిరి నెం. (5) $x+a$ ని $x+b$ చే గుణింపుము.

$$\begin{array}{l} x+a \\ x+b \\ \hline x^2+ax \\ \quad +bx+ab \\ \hline x^2+(a+b)x+ab. \end{array}$$

$\therefore (\mathbf{x}+\mathbf{a})(\mathbf{x}+\mathbf{b})=\mathbf{x}^2+(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{x}$
$+\mathbf{ab}$..............................**(4)**

మాదిరి నెం. (6) $x+a,\ x+b,\ x+c$ లను గుణింపుము.

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

$\therefore x^2+(a+b)x+ab$ ని $x+c$ చే గుణించిన సరి.

$$\begin{array}{l} x^2+(a+b)x+ab \\ x+c \\ \hline x^3+(a+b)x^2+abx \\ \quad +cx^2+c(a+b)x+abc \\ \hline x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc \end{array}$$

$\therefore (\mathbf{x}+\mathbf{a})(\mathbf{x}+\mathbf{b})(\mathbf{x}+\mathbf{c})=\mathbf{x}^3+\mathbf{x}^2(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})+\mathbf{x}$
$(\mathbf{ab}+\mathbf{ac}+\mathbf{bc})+\mathbf{abc}$..............................**(5)**

వ్యా.—(1), (2), (3), (4), (5) అని గుర్తింపబడిన ఫలితములు సంకేత సూత్రములు. కాబట్టి అవి స్మరణీయములు.

మాదిరి నెం. (7) $2x+3$ ని $3x-4$ చే గుణింపుము.

$$\begin{array}{l} 2x+3 \\ \underline{3x-4} \\ 6x^2+9x \\ \quad\;\; \underline{-8x-12} \\ 6x^2+(9-8)x-12, \text{ లేక } 6x^2+x-12. \end{array}$$

లేక న్యాసము ఇట్లుండవచ్చును:—

$$\begin{array}{l} 2+3 \\ \underline{3-4} \\ 6+9 \\ \;\; \underline{-8-12} \\ 6+1-12. \end{array}$$

ఈ పద్ధతిలో గుణకములు విడిగా వ్రాయబడినవి. లబ్ధములో x యొక్క మహత్తమ ఘాతము x^2 అను మాట విశదమే. ∴ 6 అనునది $6x^2$, 1 అనునది $1x$ లేక మామూలుగా వ్రాయునటుల x, -12 అనునది x తో నిమిత్తములేని స్వతంత్ర పదము.

మాదిరి నెం. (8) $6x^2+3$ ని $3x^2-4x+5$ చే గుణింపుము.

మోస్తరు 1.

$$\begin{array}{l} 6x^2 \qquad +3 \\ \underline{3x^2-4x+5} \\ 18x^4 \qquad +9x^2 \\ \quad -24x^3 \quad -12x \\ \qquad +30x^2 \qquad\qquad +15 \\ \hline 18x^4-24x^3+39x^2-12x+15 \end{array}$$

మోస్తరు 2.

$$\begin{array}{l} 3x^2-4x+5 \\ \underline{6x^2 \qquad +3} \\ 18x^4-24x^3+30x^2 \\ \qquad\qquad +9x^2-12x+15 \\ \hline 18x^4-24x^3+39x^2-12x+15. \end{array}$$

(1) గుణించుటకిచ్చిన రెండు సమాసములలోను దేనిని గుణకముచేసి తక్కినదానిని గుణ్యముచేసినను ఫలితమున మార్పు లేదని తేలుచున్నది.
(2) 1-వ మోస్తరులో x ను కలిగియున్న పదము లేదు కావున దాని స్థానమును ఖాళీగా ఉంచినాము. ప్రత్యేక గుణకముల పద్ధతిని ఈ ప్రశ్నయొక్క న్యాసము ఇట్లుండును:—

$$\begin{array}{r} 6+\;0+\;3 \\ \underline{3-\;4+\;5} \\ 18+\;0+\;9 \\ -24-\;0-12 \\ \underline{+30+\;0+15} \\ 18-24+39-12+15. \end{array}$$

గుణ్యములోని x యొక్క మహత్తమ ఘాతమును గుణకములోని x యొక్క మహత్తమ ఘాతమును గుణింపగా వచ్చెడి లబ్ధమువల్ల, కోరిన లబ్ధములోని x యొక్క మహత్తమ ఘాతము తేలును గావునను, రెండు సమాసములును నీచక్రమమున ఉన్నవి గావునను,

కోరిన లబ్ధము $=18x^4-24x^3+39x^2-12x+15$.

ఋజువు.

సమాసములలో $x=1$ ఆదేశించుము.

$$\left.\begin{array}{l} 6x^2+3=6\cdot1^2+3=9 \\ 3x^2-4x+5=3.1^2-4.1+5=4 \end{array}\right\} \text{ అనగా, } 36 \ldots\ldots\ldots (1)$$

∴ వీటి లబ్ధము : 9×4

$$\begin{aligned} 18x^4-24x^3+39x^2-12x+15 &= 18.1^4-24.1^3+39.1^2 \\ &\quad -12.1+15. \\ &= 18-24+39-12+15. \\ &= 18+39+15-24-12. \\ &= 72-36 \\ &= 36 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{aligned}$$

(1), (2) లు సమములు. కాబట్టి, గుణకారము సరి.

మాదిరి నెం. (9) $7x^2-3xy-2y^2$ ని $6x^2-2xy+4y^2$ చే గుణింపుము.

మామూలు పద్ధతి.

$$\begin{array}{l} 7x^2-3xy-2y^2 \\ \underline{6x^2-2xy+4y^2} \\ 42x^4-18x^3y-12x^2y^2 \\ \quad -14x^3y+6x^2y^2+4xy^3 \\ \qquad\qquad \underline{+28x^2y^2-12xy^3-8y^4} \\ 42x^4-32x^3y+22x^2y^2-8xy^3-8y^4 \end{array}$$

ప్రత్యేక గుణకముల పద్ధతి.

$$\begin{array}{r} 7-\;3-\;2 \\ \underline{6-\;2+\;4} \\ 42-18-12 \\ -14+\;6+4 \\ \underline{+28-12-8} \\ 42-32+22-8-8 \end{array}$$

x యొక్క మహత్తమ ఘాతము x^4. తరువాత, వరుస పదములు x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4. x యొక్క ఘాతములు నీచక్రమములోను, y యొక్క ఘాతములు ఉన్నక్రమములోను ఉన్నవనికూడ గమనింపుము.

∴ లబ్ధము $=42x^4-32x^3y+22x^2y^2-8xy^3-8y^4$.

ఋజువు.

సమాసములలోను, లబ్ధములోను $x=1, y=1$ ఆదేశించుము.

గుణ్యము $=7-3-2=2$.

గుణకము $=6-2+4=8$.

∴ వీటి లబ్ధము $=2\times 8=16$.

వచ్చిన ఫలితము $=42-32+22-8-8=42+22-32-8-8=64-48=16$.

∴ గుణకారము సరి.

మాదిరి నెం. (10) $x^2+x+1,\ x^2+x-1,\ x^2-x-1$: **వీటి** ఏకలబ్ధమును కట్టుము. $x=2$ ఆదేశించి ఫలితమును సరిచూడుము.

మామూలు పద్ధతి.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & x^2 & +x & +1 & \\
 & & & x^2 & +x & -1 & \\
\hline
 & & x^4 & +x^3 & +x^2 & & \\
 & & & +x^3 & +x^2 & +x & \\
 & & & & -x^2 & -x & -1 \\
\hline
 & & x^4 & +2x^3 & +x^2 & & -1 \\
 & & & x^2 & -x & -1 & \\
\hline
x^6 & +2x^5 & +x^4 & & -x^2 & & \\
 & -x^5 & -2x^4 & -x^3 & & +x & \\
 & & -x^4 & -2x^3 & -x^2 & & +1 \\
\hline
x^6 & +x^5 & -2x^4 & -3x^3 & -2x^2 & +x & +1
\end{array}
$$

ప్రత్యేక గుణకముల పద్ధతి.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
1 & +1 & +1 & & & & \\
1 & +1 & -1 & & & & \\
\hline
1 & +1 & +1 & & & & \\
 & +1 & +1 & +1 & & & \\
 & & -1 & -1 & -1 & & \\
\hline
1 & +2 & +1 & +0 & -1 & & \\
1 & -1 & -1 & & & & \\
\hline
1 & +2 & +1 & +0 & -1 & & \\
 & -1 & -2 & -1 & -0 & +1 & \\
 & & -1 & -2 & -1 & -0 & +1 \\
\hline
1 & +1 & -2 & -3 & -2 & +1 & +1.
\end{array}
$$

గుణకములను ఘాతములకు చేర్చి వ్రాసినచో, లబ్ధము $x^6+x^5-2x^4-3x^3-2x^2+x+1$ అని వచ్చును.

ఋజువు. $x=2$ ఆదేశించుము.

గుణ్యము $=4+2+1=7$.

గుణకము $=4+2-1=5$.

మరియొక గుణకము $=4-2-1=1$.

∴ వీటి లబ్ధము $=35$.

ఫలితము $=2^6+2^5-2.2^4-3.2^3-2.2^2+2+1$.

($2^5=2.2^4$ కాబట్టి)

$=64-24-8+2+1$

$=35$.

∴ గుణకారము సరి.

ఇట్లు సరిచూచుకొనుటలో, సంబంధరాశికి ఏ విలువనైనను సరే, ఆదేశము చేయవచ్చును.

మాదిరి నెం. (11) $P=2a+b$, $Q=2a-b$ అయినచో, (1) $3P+4Q$, (2) $2P-5Q$, (3) $(3P+4Q)(2P-5Q)$, (4) $(4P+3Q)(3Q-4P)$ అనువాటిని కట్టుము.

(1) $3P+4Q=3(2a+b)+4(2a-b)$
$=6a+3b+8a-4b$
$=6a+8a+3b-4b$
$=14a-b$.

ఋజువు.
$a=1, b=1$ ఆదేశించుము.
అప్పుడు, $P=2.1+1=3$.
$Q=2.1-1=1$.
∴ $3P+4Q=3.3+4.1=13$.
$14a-b=14.1-1=13$.
కాబట్టి, ఫలితము సరి.

(2) $2P-5Q=2(2a+b)-5(2a-b)$.
$=4a+2b-10a+5b$.
$=-6a+7b$.

ఋజువు. $2P-5Q=2.3-5.1=1$.
$-6a+7b=-6.1+7.1=1$.
∴ ఫలితము సరి.

(3) $3P+4Q=14a-b$ ...(1) ని బట్టి
$2P-5Q=-6a+7b$ ...(2) ను బట్టి
$\therefore (3P+4Q)(2P-5Q)=(14a-b)(-6a+7b)=-84a^2+104ab-7b^2$.

$$\begin{array}{r} 14a-b \\ -6a+7b \\ \hline -84a^2+6ab \\ +98ab-7b^2 \\ \hline -84a^2+104ab-7b^2. \end{array}$$

ఋజువు. $(3P+4Q)(2P-5Q)=13\times 1=13.$
$-84a^2+104ab-7b^2=-84.1^2+104.1.1-7.1^2.$
$=-84+104-7.$
$=13.$ కాబట్టి, సరి.

(4) $4P+3Q=4(2a+b)+3(2a-b)$
$=8a+4b+6a-3b$
$=14a+b.$
$3Q-4P=3(2a-b)-4(2a+b)$
$=6a-3b-8a-4b$
$=-2a-7b.$
$\therefore (4P+3Q)(3Q-4P)=(14a+b)(-2a-7b)$
$=-28a^2-100ab-7b^2.$

$$\begin{array}{r} 14a+b \\ -2a-7b \\ \hline -28a^2-2ab \\ -98ab-7b^2 \\ \hline -28a^2-100ab-7b^2 \end{array}$$

ఋజువు. $(4P+3Q)(3Q-4P)=(4.3+3.1)(3.1-4.3).$
$=15\times -9=-135.$
$-28a^2-100ab-7b^2=-28.1^2-100.1.1-7.1^2.$
$=-28-100-7.$
$=-135.$ కాబట్టి, సరి.

మాదిరి నెం. (12) $1+2x+3x^2+4x^3$ ని $1-x-3x^2$ చే x^3 వరకు గుణింపుము.

$$\begin{array}{r} 1+2+3+4 \\ 1-1-3 \\ \hline 1+2+3+4 \\ -1-2-3 \\ -3-6 \\ \hline 1+1-2-5 \end{array}$$

$\therefore$ కోరిన లబ్ధము $=1+x-2x^2-5x^3.$

మాదిరి నెం. (13) $(3x^2+6x+5)(9x^2-3x+2)$ లో x^2 యొక్క గుణకము కట్టుము.

లబ్ధములో x^2 సంభవించెడి పదములు మాత్రము ఎవ్వియనగా: $3x^2\times 2$, $9x^2\times 5$, $+6x\times -3x$ ను. అనగా, $+6x^2$, $+45x^2-18x^2$.

$\therefore$ కోరిన గుణకము $=+6+45-18=33$. లేక, ప్రత్యేక గుణకముల పద్ధతిలో, కోరిన గుణకము, నిలువుగడిలోనుండు ఆ యా గుణకముల మొత్తమని గమనింపవచ్చును.

$$\begin{array}{r} 3+6+5 \\ 9-3+2 \\ \hline 45 \\ -18 \\ +6 \\ \hline 33 \end{array}$$

మాదిరి నెం. (14) $6x^3+3x^2+4x-5$ యొక్కయు $3x^3-9x^2-6x-7$ యొక్కయు లబ్ధములో, x^3, x ల గుణకములు కట్టుము.

x^3 సిద్ధించెడి పదములు: $6x^3\times -7$, $3x^2\times -6x$, $4x\times -9x^2$, $-5\times 3x^3$. అనగా, $-42x^3$, $-18x^3$, $-36x^3$, $-15x^3$., అనగా, $-111x^3$.

x సిద్ధించెడి పదములు: $4x\times -7$, $-5\times -6x$. అనగా, $-28x+30x$. అనగా, $+2x$.

$\therefore$ x^3, x ల గుణకములు క్రమమున -111, 2 లు.

ఇదియు, ప్రత్యేక గుణకముల పద్ధతిని:—

$$\begin{array}{llllll} x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 6+3+4-5 \\ 3-9-6-7 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{rr} -15 & \\ -36 & \\ -18 & +30 \\ -42 & -28 \\ \hline -111 & +2. \end{array}$$

అభ్యాసము 17 (A)

ఈ క్రింది గుణకారములు చేయుము. చేసి, $x=1$, $y=-2$, $z=3$, $a=2$, $b=-1$, $m=-5$, $p=4$, $q=-3$ ను ఆదేశించి, ప్రతి సందర్భమునను ఫలితమును సరిచూడుము:—

1. $2a+3b$ ని $3a$ చే.
2. $7a-4b$ ని $3b$ చే.
3. $6a-4b$ ని $3c$ చే.

4. $3a+4b-2c$ ని $-3a$ చే.
5. $(2x+y-z)$ ని $-3z$ చే.
6. $(2x-4y+3z)$ ని $-6x^2$ చే.
7. (x^2y+xy^2-x-y) ని x^2y చే.
8. $(5a^2+b^2+c^2)$ ని $-8ab$ చే.
9. $(10xy-10xz+y^2)$ ని $-9xyz$ చే.
10. $(3a^3b+6ab^3-5a^2b^2)$ ని $-11a^2b$ చే.
11. $a+b+c$ ని $a-b$ చే.
12. $3x+6y$ ని $4x-3y$ చే.
13. $4x+6y-8z$ ని $3x-2y$ చే.
14. a^2+ab+b^2 ని $a-b$ చే.
15. (a) a^2-ab+b^2 ని $a+b$ చే.
(b) $2x^2-3xy+4y^2$ ని $3x-4y$ చే.
16. (a) a^2-ab+b^2 ని a^2+ab+b^2 చే.
(b) $4x^2+3xy-8y^2$ ని $4x+5y$ చే.
17. $3x^3+4x^2-5x-6$ ని $2x-3$ చే.
18. $6x^2-5xy+2y^2$ ని $9x^2-3xy+4y^2$ చే.
19. $4x^3-3x^2-2x-5$ ని x^2+x+1 చే.
20. $50m^2+10m+1$ ని $50m^2-10m+1$ చే.
21. $6x^3-2x^2+5x-4$ ని $2x^2+3x-6$ చే.
22. $6x^4+3x^3-9x-2$ ని $9x-1$ చే.
23. $9x^3-3x^2+2x-1$ ని $4x^2+2x+3$ చే.
24. $3x^3-4x^2-8x+3$ ని $3x^3-2x-1$ చే.
25. $x+1$, $x+2$, $x+3$ లను.
26. $x-1$, $x-2$, $x-3$ లను.
27. $x+1$, $x-2$, $x+3$ లను.
28. $2x+1$, $3x+2$, $4x-5$ లను.
29. $3p+2q$, $4p-q$, $p+2q$ లను.
30. $4x-2y$, $3x+2y$, $3x-2y$ లను.
31. $2a-b$, $2a+b$, $4a^2+b^2$ లను.
32. $3x-1$, $3x+1$, $9x^2+1$ లను.

33. $2a-b$, $4a^2+2ab+b^2$, $64a^6+8a^3b^3+b^6$ లను.
34. a^2+ab+b^2, a^2-ab+b^2, $a^4-a^2b^2+b^4$ లను.
35. $2a-3b$, $2a+3b$ $16a^4+36a^2b^2+81b^4$ లను.

$P=2x+3$, $Q=2x-3$ అగునప్పుడు ఈ క్రిందివాటి విలువలు కట్టుము:—

36. $3P+5Q$.
37. $3P-5Q$.
38. $4P\,(2P+3Q)$.
39. $5Q\,(3P-2Q)$.
40. $(2P-5Q)\,(2P+3Q)$.
41. $(3P-5Q)\,(4P-2Q)$.
42. $(P+2Q)^2$.
43. $(2P-Q)^2$.
44. $(3P+2Q)\,(3P-2Q)$.
45. $2P^2+3PQ+2Q^2$.

ఈ క్రిందివాటిని సూక్ష్మము చేయుము:—

46. $(a+b)^2-2\,(a^2+b^2)+(a-b)^2$.
47. $(2p+3q)^2+3\,(5p^2+6q^2)+(2p-3q)^2$.
48. $(x-1)\,(x-2)+(x-2)\,(x-3)+(x-3)\,(x-4)$.
49. $(a+2b)^2-(2b+3a)\,(3b-2a)+(b+2a)^2$.
50. $(a+b)^3-(a-b)^3$.
51. $(p+2q)^3+(p-2q)^3$.
52. $(3a+4b)^2+3\,(3a+4b)\,(4a+3b)+2\,(4a+3b)^2$.

గుణకారము చేయకుండ, ఈ క్రింది లబ్ధములలో కోరిన గుణకములను కట్టుము:—

53. $(3x^2-4x+1)\,(2x-3)$ లోని x యొక్క గుణకము.
54. $(6x^2-3x+2)\,(3x^2+4x-5)$ లోని x^2 యొక్క గుణకము.
55. $(5x^2-7x+3)\,(x^3-3x^2-8x-3)$ లోని x^3 యొక్క గుణకము.

56. $1+2x-3x^2+4x^3$ ని $1+8x+9x^2-10x^3$ చే x^3 వరకు ఉండు పదములు వచ్చునట్లు గుణింపుము.

57. $1-3x+3x^2-x^3$ ని $1+3x+3x^2+x^3$ చే x^2 వరకు ఉండు పదములు వచ్చునట్లు గుణింపుము.

58. ఒక ఆయతాకారపు పొలము తాలూకు పొడుగు $(3x-4y+5z)$ గజములు, వెడల్పు $(2x+3y-4z)$ గ. ఆ ఆయతముయొక్క భూఫలమునకు మానము కట్టుము.

59. ఆయతాత్మకమగు ఒక కర్రదిమ్మయొక్క కొలతలు; క్రమమున, $x+y-z$, $z+x-y$, $y+z-x$ ఏకాంశములు. దానియొక్క ఘనఫలమును తెలిపెడి సమాసమును కట్టుము.

60. $(6a-2b+3c)$ గ. పొడుగును, $(2a+3b+9c)$ గ. వెడల్పునుగల ఒక ఆయతాకారపు పొలములో $3a-c$ అంగుళముల వర్షము కురిసినచో, వాననీటియొక్క ఘనఫలమును కట్టుము.

74. భాగహారము.

మాదిరి నెం. (1) $m^2 n^3$ ని mn^2 చే భాగింపుము.

$$\frac{m^2n^3}{mn^2}=m^{2-1}n^{3-2}=mn. \left[a^m \div a^n = a^{m-n} \text{ కాబట్టి}\right]$$

మాదిరి నెం. (2) $(a^2bc)^3$ ని abc^2 చే భాగింపుము.

$$(a^2bc)^3=a^6b^3c^3.$$
$$\therefore \frac{a^6b^3c^3}{abc^2}=a^{6-1}\ b^{3-1}\ c^{3-2}=a^5b^2c.$$

మాదిరి నెం. (3) $3a^2+6ab$ ని a చే భాగింపుము.

$$\frac{3a^2+6ab}{a}=\frac{3a^2}{a}+\frac{6ab}{a}=3a+6b.$$

మాదిరి నెం. (4) $10a-6b-4c$ ని -2 చే భాగింపుము.

$$\frac{10a-6b-4c}{-2}=\frac{10a}{-2}-\frac{6b}{-2}-\frac{4c}{-2}=-5a+3b+2c.$$

మాదిరి నెం. (5) $a^2xy+ab^2xz+abxl$ ని $-ax$ చే భాగింపుము.

$$\frac{a^2xy+ab^2xz+abxl}{-ax}=\frac{a^2xy}{-ax}+\frac{ab^2xz}{-ax}+\frac{abxl}{-ax}$$
$$=-ay-b^2z-bl.$$

మాదిరి నెం. (6) $6a^3-3a^2+5a-5$ ని $2a-3$ చే భాగింపుము.

$$
\begin{array}{l}
2a-3)6a^3-3a^2+5a-5(3a^2+3a+7 \\
\quad\ \ 6a^3-9a^2 \\
\qquad\quad +6a^2+5a \\
\qquad\quad +6a^2-9a \\
\qquad\qquad\quad 14a-5 \\
\qquad\qquad\quad 14a-21 \\
\qquad\qquad\qquad\ 16
\end{array}
$$

$\therefore$ భాజితము $=3a^2+3a+7.$

శేషము $=16.$

భాజ్యములోని మొదటి పదమును భాజకములోని మొదటి పదముచే భాగింపగా, అనగా $6a^3$ ని $2a$ చే భాగింపగా, $3a^2$ వచ్చును. దానిని మనము భాజితములో వ్రాసి దానిచే భాజకమునందలి ప్రతి పదమును గుణింతుము. ఆ లబ్ధమును భాజ్యముక్రింద వ్రాసి దానిని భాజ్యములోనుండి తీసివేయుదుము. భాజ్యములోని తరువాతి పదమును, అంకగణితములోవలెనే, మిగిలిన దానిలో జేర్చుకొందుము. ఇట్లు చేయగా, $6a^2+5a$ అనునది ఏర్పడును. ఇప్పుడు $6a^2$ ని భాజకములోని మొదటి పదముచే భాగింతుము. ఆ వచ్చిన ఫలితమును అనగా $3a$ ని భాజితమున చేర్చుకొని, దానిచే భాజకములోని ప్రతి పదమును గుణించి ఆ లబ్ధమును $6a^2+5a$ క్రింద వ్రాసి, తీసివేయుదుము. ఇట్లు మరియొకసారి చేయగా, శేషము 16 అని తేలును.

ఈ రీతిగ, భాజితము $3a^2+3a+7$ అనియు, శేషము 16 అనియు వచ్చును.

ఋజువు (1)

$$
\begin{array}{l}
3+3+7 \\
2-3 \\
\hline
6+6+14 \\
\quad -9-9-21 \\
\hline
6-3+5-21
\end{array}
$$

భాజ్యము $=$ భాజకము $\times$ భాజితము $+$ శేషము.

$$=(3a^2+3a+7)\ (2a-3)+16$$
$$=6a^3-3a^2+5a-21+16$$
$$=6a^3-3a^2+5a-5$$

$\therefore$ భాగహారము సరి.

ఋజువు (2) విలువల ఆదేశముచే.

భాజ్యమగు $6a^3-3a^2+5a-5$ లో $a=1$ వేయుము.

వచ్చునది, $6-3+5-5$, అనగా, 3.

పిదప, $(3a^2+3a+7)\ (2a-3)+16$ లో $a=1$ వేయుము.

వచ్చునది, $(3+3+7)\ (2-3)+16$, అనగా, $13\times-1+16$ లేక 3.

రెండు పక్షములును సమములైనవి కాబట్టి, భాగహారము సరి.

భాగహారమును ప్రత్యేకగుణకముల పద్ధతినికూడ చేయవచ్చును. ఇట్లు:—

$$
\begin{array}{l}
2-3)6-3+5-5(3+3+7 \\
\quad\ \ 6-9 \\
\qquad\ \ 6+5 \\
\qquad\ \ 6-9 \\
\qquad\quad\ 14-5 \\
\qquad\quad\ 14-21 \\
\qquad\qquad\ 16
\end{array}
$$

భాజితమున మొదటి పదమున a^2 ఉండి తీరవలయును. ∴ భాజితము $3a^2+3a+7$, శేషము 16.

మాదిరి నెం. (7) a^5-1 ని $a-1$ చే భాగింపుము.

$$
\begin{array}{l}
a-1)a^5-1(a^4+a^3+a^2+a+1.\\
\quad a^5-a^4\\
\qquad a^4-1\\
\qquad a^4-a^3\\
\qquad\quad a^3-1\\
\qquad\quad a^3-a^2\\
\qquad\qquad a^2-1\\
\qquad\qquad a^2-a\\
\qquad\qquad\quad a-1\\
\qquad\qquad\quad a-1
\end{array}
$$

$\therefore a^5+1=(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)$.

ఋజువు.—భాజ్యములో $a=2$ వేయుము.

వచ్చునది, 2^5-1 లేక $32-1$ లేక 31.

పిదప, $(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)$ లో $a=2$ వేయుము.

వచ్చునది, $(2-1)(2^4+2^3+2^2+2+1)$
$=1.\ (16+8+4+2+1)$
$=31.$

రెండు పక్షములును సమములయ్యె గావున, భాగహారము సరి.

పై ప్రశ్నయే ప్రత్యేకగుణకముల పద్ధతిని:—

$$
\begin{array}{l}
1-1)1+0+0+0+0-1(1+1+1+1+1\\
\quad 1-1\\
\qquad 1+0\\
\qquad 1-1\\
\qquad\quad 1+0\\
\qquad\quad 1-1\\
\qquad\qquad 1+0\\
\qquad\qquad 1-1\\
\qquad\qquad\quad 1-1\\
\qquad\qquad\quad 1-1
\end{array}
$$

$=a^4+a^3+a^2+a+1.$

షరా.—ఇచ్చిన ప్రశ్నలో లోటుగా ఉన్న ఘాతములుండెడి పదముల గుణకములకు 0 వేసికొని చేయుము.

అభ్యాసము 17 (B)

ఈ భాగహారములు చేయుము:—

1. $16a^2b$ ని $2ab$ చే.
2. $32a^4b^2$ ని $4a^3b$ చే.
3. $(2x)^3$ ని $2x^2$ చే.

4. $-48x^6a^2$ ని $(-12x^3a)^2$ చే.
5. $48a^3b^2c^2x^4$ ని $12a^2bcx$ చే.
6. $(-6x^2yz)^3$ ని $-(2xy)^3$ చే

ఇవి సూక్ష్మము చేయుము:—

7. $(8a+4b)\div 4$.
8. $\dfrac{3x+6y-9z}{3}$.
9. $\dfrac{12x^2-6xy-8xz}{2x}$.
10. $\dfrac{4x^3-12x^2y+8x^2z}{4x^2}$.
11. $\dfrac{3ab+5ac-4ad}{a}$.
12. $\dfrac{5a^2bc+10ab^2c+15abc^2}{5abc}$.
13. $\dfrac{6x^2yz-12xy^2z-18xyz^2}{-6xyz}$.
14. $\dfrac{4a^3-8a^2bx+2a^2cy-16a^2dz}{-4a^2}$.
15. $\dfrac{2p^2q-4pq^2-6pqr}{-2p}$.

ఈ భాగహారములు చేయుము:—

16. $3a^2+6a-5$ ని $a-2$ చే.
17. $4x^2+6x-10$ ని $x-1$ చే.
18. $a^3+6a^2+11a-8$ ని $a+4$ చే.
19. $x^3+10x^2-5x-42$ ని $x+2$ చే.
20. $12x^2+8x+1$ ని $6x+1$ చే.
21. $8x^3-6x^2+3x-8$ ని $2x-1$ చే.
22. $12l^3-6l^2+4l-8$ ని $3l-1$ చే.
23. $a^8+a^4b^4+b^8$ ని $a^4+a^2b^2+b^4$ చే.
24. a^4+4b^4 ని $a^2-2ab+2b^2$ చే.
25. $64x^6-1$ ని $4x^2-1$ చే.
26. $x^4+11x^3+26x^2-21x+3$ ని x^2+5x-1 చే.

27. x^8-1 ని x^2-1 చే.

28. $x^{12}+1$ ని x^4+1 చే.

16 లగాయతు 28 దాకను, ఈ క్రిందివాటిని, ప్రత్యేక గుణకముల పద్ధతిని చేయుము:—

29. $x^4-x^3-7x^2+4x+6$ ని x^2-2x-2 చే.

30. $x^5+5x^4-7x^2+17x-6$ ని x^2+2x-1 చే.

31. a^6-b^6 ని $a-b$ చే.

32. a^7+b^7 ని $a+b$ చే.

33. $x^4-19x^2y^2+25y^4$ ని $x^2-3xy-5y^2$ చే.

34. $9p^2+9p-6$ ని $3p-2$ చే.

35. $12k^4-11k^3+9k^2-4k+3$ ని $3k^2-2k+1$ చే.

36. ఒకానొక భాగహారములో, భాజితము $3x^2+4x-5$, భాజకము $5x-2$, శేషము -21. భాజ్యమును కట్టుము. దత్తవిషయములలో ఏదైన అనవసరమా?

37. ఒకానొక భాగహారములో, భాజితము $6x^3-7x^2+8x-5$, భాజకము x^2+x-1, శేషము $2x-3$. భాజ్యమును కట్టుము. దత్తవిషయములలో ఏదైన అనవసరమా?

38. ఒకానొక భాగహారములో, భాజ్యము $6x^3+8x^2+9x-7$, భాజితము $6x^2+26x+87$, శేషము 254. భాజకమును కట్టుము. దత్తవిషయములలో ఏదైన అనవసరమా!

39. భాజ్యము $8x^3+3x^2+4x-5$, భాజితము $8x-13$, శేషము $54x-44$. భాజకమును కట్టుము. దత్తవిషయములలో ఏదైన అనవసరమా?

40. $x^5-x^4-x^3-4x^2-12x-2$ ని x^2-2x+1 చే భాగింపగా, వచ్చెడి శేషము $-22x+3$. భాజితమును కట్టుము. దత్తవిషయములలో ఏదైన అనవసరమా?

41. $42x^4+50x^3-39x^2-24x+12$ ని $7x^2+6x-5$ చే భాగింపగా, వచ్చెడి శేషము $4x-3$. భాజితమును కట్టుము. దత్తవిషయములలో ఏదైన అనవసరమా?

42. $3x^3-22x^2-8x-5$ నుండి ఏమి తీసివేసినచో ఆ ఫలితమును $3x^2+2x+1$ అనునది నిశ్శేషముగ భాగించును?

43. $6x^3-13x^2+12x-9$ కి ఎంత కలిపినచో, ఆ ఫలితమును $6x^2+5x+1$ అనునది నిశ్శేషముగ భాగించును?

44. రెండు సమాసముల లబ్ధము $4x^3-10x^2-11x+15$. వాటిలో ఒకటి $x-3$. రెండవదానిని కట్టుము.

45. మూడు సమాసముల లబ్ధము $x^3+2x^2-9x-18$. వాటిలో రెండు $x+2$, $x+3$ లు, మూడవదానిని కట్టుము.

46. రెండు సమాసముల లబ్ధము $2x^5+7x^4+10x^3-9x^2-9x+5$. వాటిలో ఒకటి $2x^2+x-1$. రెండవదానిని కట్టుము.

47. $x(8x^2+3x-5)$, $-10(2x-3)$ ల మొత్తమును $4x^2-x+3$ చే భాగింపుము.

48. $12(x^2+3x-4)$, $13(x^2+9x+20)$ ల తేడాను $x+4$ చే భాగింపుము.

49. $3a^2+5a+2$ ని a^2-1 చే గుణించి ఆ లబ్ధమును a^2+2a+1 చే భాగింపుము.

50. $a^4+a^2b^2+b^4$ ని a^2-b^2 చే గుణించి ఆ లబ్ధమును a^2-ab+b^2 చే భాగింపుము.

51. $16(x+3)^2-12(x+3)(2x-5)+8x-21$ ని $4x-2$ చే భాగింపుము.

52. $2(x+3)^2-4(x+3)(5x+4)+6(x-3)^2$ ని $3x-5$ చే భాగింపుము.

అధ్యాయము XVIII.

సులభమైన బీజగణిత సంకేతసూత్రములు—వాటి ప్రయోగము.

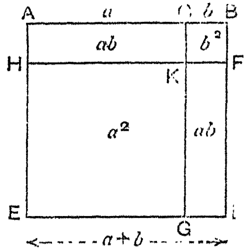
75. బీజగణితములో, కొన్ని కొన్ని సమాసములను గుణించి, గుణింపగా వచ్చెడు ఫలితములను, మరల అట్టి ఆకారము గల సమాసములు తటస్థించినప్పుడు గుణించుకొనుచు కూర్చుండవలసిన అవసరములేకుండ, జ్ఞప్తియందు ఉంచుకొందురు. అందుచే వీలుగ, మూలసమాసములనుండి, గుణకార అనవసరము లేకయే, లబ్ధమును ఊహించుటకు తోడ్పడు నూతనపద్ధతులు నెలకొలిపి

నారు. అట్టి పద్ధతులు, అప్రయత్నముగ లబ్ధములను వ్రాయుటకు సాధనము లైన **సంకేతసూత్రములకు** దారి చూపినవి. ఇవి స్థిరసత్యములైనవి.

కేవల గుణకారమువల్ల మనము ఇదివరకే,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{..................} (1)$$

అని ఎరుగుదుము. $a^2+2ab+b^2$ అనునది $(a+b)^2$ యొక్క విస్తరణము అనబడును. a, b అను **రెండు పదముల మొత్తముయొక్క వర్గమునకు సమానమేమన, ఆ పదములయొక్క వర్గముల మొత్తముతో, పదలబ్ధపు రెట్టింపును కూడగా వచ్చునది.**



పటము 106.

పై సంకేతసూత్రమునకు లేఖ్య దృష్టాంతము.

ఈ క్రింది ఉదాహరణలు పై సంకేతసూత్రము యొక్క ప్రయోగమును తెలుపును:—

మాదిరి నెం. (1) $(p+5)^2$ ని విస్తరింపుము.

$(p+5)^2 = p^2+5^2+2\cdot p\cdot 5 = p^2+25+10p$ లేక $p^2+10p+25$.

మాదిరి నెం. (2) $(2x+3y)^2$ ని విస్తరింపుము.

$$(2x+3y)^2 = (2x)^2+(3y)^2+2(2x)(3y) = 4x^2+9y^2+12xy.$$

మాదిరి నెం. (3) 101^2 ని విస్తరింపుము.

$$101^2 = (100+1)^2 = 100^2+1^2+2\times 100\times 1 = 10000+1+200 = 10201.$$

మాదిరి నెం. (4) $380^2 = 144400$ అని తెలిసి, 381^2 కట్టుము.

$381^2 = (380+1)^2 = 380^2+1^2+2.380.1 = 144400+1+760 = 145161.$

మాదిరి నెం. (5) $(10n+5)^2 = 100n^2+100n+25 = 100n(n+1)+25.$

ఉదా. $85^2 = (10\cdot 8+5)^2 = 100\cdot 8\,(8+1)+25 = 7225.$

పదుల స్థానములో ఉన్న 8 ని, దాని తరువాత పై అంకెయగు 9 చే గుణించి, వచ్చెడి లబ్ధమునకు కుడిప్రక్క 25 వ్రాయుము. ఇది 5 అంతమందుగల సంఖ్యలన్నింటికిని వర్తించును.

మాదిరి నెం. (6) 111^2 ని విస్తరింపుము.

$$111^2 = (100+10+1)^2 = 100^2+10^2+1^2+2.100.10+2.100.1+2.10.1.$$
$$= 10101+2220$$
$$= 12321.$$

అభ్యాసము 18 (A)

ఈ క్రిందివాటి వర్గ వ్రాయుము:—

1.	$3a+2b.$	16.	$x+y+3.$
2.	$2p+3q.$	17.	35.
3.	$4x+5y.$	18.	45.
4.	$6x+1.$	19.	135.
5.	$1+3m.$	20.	195.
6.	$2+4ab.$	21.	155.
7.	$7a^2+9b^2.$	22.	202.
8.	$50m+1.$	23.	303.
9.	$11a^2+13b^2.$	24.	2501.
10.	$2a+3b+4c.$	25.	38.
11.	$3a+2b+5c.$	26.	501.
12.	$2p+3q+r.$	27.	1008.
13.	$5a+3b+2c.$	28.	131.
14.	$a+b+2.$	29.	165.
15.	$p+q+3r.$	30.	212.

31. $8076^2 = 65221776$ అని తెలిసి, 8077^2, 8078^2, 8079^2, 8080^2 ల విలువలు కట్టుము.

32. ఒక నిర్దిష్ట సంఖ్యయొక్క వర్గమునకు, ఆ సంఖ్యను, దాని తరువాత పై సంఖ్యనుకూడ కలిపి, వచ్చెడి మొత్తము ఒక వర్గని నిరూపింపుము. పై సూత్రమును సంధించి, (a) $1024^2 = 1048576$ అని తెలిసి, 1025^2 ను, (b) $976^2 = 952596$ అని తెలిసి, 977^2 ను, (c) $205^2 = 42025$ అని తెలిసి, 206^2 ను, (d) $999^2 = 998001$ అని తెలిసి, 1000^2 ను కట్టుము.

33. $a^2+2ab+b^2$ యొక్క ఆకారములో ఈ క్రింద ఇచ్చిన సమాసములను $(a+b)^2$ అను ఆకారములో చెప్పుము:—

(a) $4p^2+q^2+4pq.$	(f) $100d^2+20d+1.$
(b) $9m^2+4n^2+12mn.$	(g) $a^2+\frac{1}{4}+a.$
(c) $16a^2+9b^2+24ab.$	(h) $25x^2+36y^2+60xy.$
(d) $36a^2+16b^2+48ab.$	(i) $3600x^2+1+120x.$
(e) $49m^2+25+70m.$	(j) $144x^4+169x^2+312x^3.$

34. ఈ క్రిందివాటిలో a^2+b^2 అను పదములకు సంగతములగునవి ఇచ్చి ఉన్నవి. వాటికి $2ab$ వంటి పదము కలిపి, ప్రతిదానిని $(a+b)^2$ ఆకారమున చెప్పుము:—

(a) p^2+4q^2.	(f) $\frac{1}{4}a^2+b^2$.
(b) $4p^2+9q^2$.	(g) $6\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2$.
(c) $25x^2+64y^2$.	(h) $\frac{25}{9}x^2+4y^2$.
(d) $144m^2+81n^2$.	(i) $1600m^4+25n^4$.
(e) $100m^4+1$.	(j) $9c^2a^2+49a^2b^2$.

35. a^2+2ab అనువాటికి సంగతములుగ ఈ క్రింద కొన్ని ఇచ్చి ఉన్నవి. b^2 ఆకారముగల పదము వాటికి కలిపి, ప్రతిదానిని $(a+b)^2$ ఆకారమున చెప్పుము:—

(a) $4x^2+4xy$.	(f) $64p^4q^2+32p^3q$.
(b) $9m^2+12mn$.	(g) $16a^4b^2c^2+24a^3b^2c$.
(c) $25m^2+10ma$.	(h) a^2c^2+2ac.
(d) $36a^2+48ac$.	(i) x^2+x.
(e) $49a^2b^2+56ab$.	(j) $42\frac{1}{4}x^2+26xy$.

36. ఏదో సంఖ్య వేయుము. దానిని దాని తరువాతి పై సంఖ్యచే గుణింపగా వచ్చిన లబ్ధమును 4 చే గుణించి ఆ ఫలితమునకు 1 కలుపుము. ఇది ఒక సంపూర్ణ వర్గము అని నిరూపింపుము. అసలు సంఖ్య a అయినచో, నీకు ఏ సంకేతసమాసము వచ్చును?

37. ఒక నలుచదరపు పొలముయొక్క భుజము 2 మై. 40 గ. ఉన్నది. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ అను సంకేతసూత్రమును ప్రయోగించి, దాని భూఫలమును (a) ఇన్ని చ. మైళ్లీ ఇన్ని చ. గజములు అనియు, (b) ఇన్ని చ. మైళ్లీ ఇంత భిన్నమనియు కట్టుము.

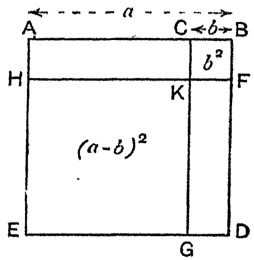
38. (5 అ. 7 అం.)^2 ను మిశ్రమరాశిగా చెప్పుము, అనగా చ. అడుగులలోను, చ. అంగుళములలోను. సూక్ష్మతమ పద్ధతిని చేయుము.

39. 196 మంది బిచ్చగాండ్రు ఉన్నారు. ఒక్కొక్క బిచ్చగానికి, బిచ్చగాండ్ర సంఖ్యన్ని పైసలు ముట్టినవి. అతిసూక్ష్మపద్ధతిని, మొత్తము ఎంత పంచి పెట్టబడినది?

40. ఒక నలుచదరముయొక్క భుజము పొడుగు x గ. దానిని **మరి 4 అం.** పెంచినారు. అతిసూక్ష్మపద్ధతిని, భూఫలములో వృద్ధికట్టుము.

76. రేఖాగణిత దృష్టాంతము. $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$.

క్షే. EK = క్షే. AD + క్షే. CF — క్షే. AF — క్షే. CD అంటే, $(a-b)^2=a^2+b^2-ab-ab$. (107-వ పటము చూడుము.)



పటము 107.

కేవల గుణకారమువల్ల $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ అని ఇదివరకే ఎరుగుదుము. అదియుగాక, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ అను తాదాత్మ్యము యొక్క రెండు పక్షములలోను $+b$ ఉండుచోట $-b$ వేసినను ఈ సంకేతసూత్రము వచ్చును. ఎట్లనగా:—

$$(a-b)^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

$a^2-2ab+b^2$ అనునది $(a-b)^2$ యొక్క విస్తరణము అందురు.

a, b అను రెండు పదములతేడాయొక్క వర్గు దేనికి సమమనగా, ఆ పదముల వర్గుల మొత్తమునుండి పదలబ్ధముయొక్క రెట్టింపును తగ్గింపగా వచ్చుదానికి. ఈ సంకేతసూత్రముయొక్క ప్రయోగము ఈ క్రింది ఉదాహరణలలో తెలిసి నచ్చును:—

మాదిరి నెం. (8) $(p-5)^2$ ని విస్తరింపుము.

$$(p-5)^2=p^2+5^2-2p.5=p^2+25-10p \text{ లేక } p^2-10p+25.$$

మాదిరి నెం. (9) $(2x-3y)^2$ ని విస్తరింపుము.

$(2x-3y)^2=(2x)^2+(3y)^2-2.(2x)(3y).=4x^2+9y^2-12xy$ లేక $4x^2-12xy+9y^2$ (x యొక్క నీచక్రమఘాతములలో.)

మాదిరి నెం. (10) 99^2 విస్తరింపుము.

$99^2=(100-1)^2=100^2+1^2-2.100.1=10000+1-200=9801$.

మాదిరి నెం. (11) $380^2=144400$ అని తెలిసి, 379^2 కట్టుము.

$379^2=(380-1)^2=380^2+1^2-2.380.1=144400+1-760=143461$.

మాదిరి నెం. (12) $(a+b-c)^2$ ని విస్తరింపుము. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ అను సంకేతసూత్రములను వాడుము.

$$(a+b-c)^2=\{a+(b-c)\}^2=a^2+(b-c)^2+2a(b-c).$$
$$=a^2+b^2+c^2-2bc+2ab-2ac.$$
$$=a^2+b^2+c^2-2bc+2ab-2ac.$$

లేక $(a+b+c)^2$ యొక్క విస్తరణమున $+c$ ఉండుచోట $-c$ వేసినను ఇది వచ్చును. ఎట్లన:—

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$
$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+(-c)^2+2ab+2a(-c)+2b(-c).$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc.$$

మాదిరి నెం. (13) $(a-b-c)^2$ ని విస్తరింపుము.

$$(a-b-c)^2=\{a-(b+c)\}^2=a^2+(b+c)^2-2a(b+c).$$
$$=a^2+b^2+c^2+2bc-2ab-2ac.$$

లేక $(a+b+c)^2$ యొక్క విస్తరణమున $+c$ కి బదులు $-c$, $+b$ కి బదులు $-b$ యు వేసినను ఇది వచ్చును. ఎట్లన:—

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$
$$(a-b-c)^2=a^2+(-b)^2+(-c)^2+2a(-b)+2a(-c)+2(-b)(-c).$$
$$=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc.$$

అభ్యాసము 18. (B)

ఈ క్రిందివాటి వర్గు వ్రాయుము:—

1.	$3a-2b$.	14.	$3a-2b-5c$.
2.	$2p-3q$.	15.	$2p-3q-r$.
3.	$4x-5y$.	16.	$5a-3b+2c$.
4.	$6x-1$.	17.	$a+b-2$.
5.	$1-3m$.	18.	98.
6.	$2-4ab$.	19.	197.
7.	$7a^2-9b^2$.	20.	296.
8.	$50m-1$.	21.	499.
9.	$11a^2-13b^2$.	22.	992.
10.	$2a+3b-4c$.	23.	2495.
11.	$2a-3b+4c$.	24.	39.
12.	$2a-3b-4c$.	25.	773.
13.	$3b+4c-2a$.	26.	9980.

27. $8076^2=65221776$ అని తెలిసి, 8075^2, 8074^2, 8073^2, 8072^2 లను కట్టుము.

28. ఏదో సంఖ్యయొక్క వర్గుసుండి, ఆ సంఖ్యతో దాని తరువాత క్రింది సంఖ్యను కలపగా వచ్చెడి మొత్తమును తీసివేసి, ఫలితము ఒక సంపూర్ణవర్గము అని నిరూపింపుము.

(a) $1024^2=1048576$ అని తెలిసి, పై సూత్రముచే, 1023^2 కట్టుము.

(b) $976^2=952576$ అని తెలిసి, అట్లే, 975^2 కట్టుము.

(c) $205^2=42025$ అని తెలిసి, అట్లే, 204^2 కట్టుము.

(d) $999^2=998001$ అని తెలిసి, అట్లే, 998^2 కట్టుము.

29. ఈ క్రిందివాటిని $(a-b)^2$ ఆకారములో చెప్పుము:—

(a) $4p^2+q^2-4pq$.	(f) $100d^2-20d+1$.
(b) $9m^2+4n^2-12mn$.	(g) $a^2+\frac{1}{4}-a$.
(c) $16a^2+9b^2-24ab$.	(h) $25x^2+36y^2-60xy$.
(d) $36a^2+16b^2-48ab$.	(i) $3600x^2+1-120x$.
(e) $49m^2+25-70m$.	(j) $144x^4+169x^2-312x^3$.

30. a^2+b^2 ఆకారములో ఈ క్రింద ఇచ్చి ఉన్న పదములకు $-2ab$ వంటి పదము కలిపి ఫలితమును $(a-b)^2$ ఆకారమున చెప్పుము:—

(a) p^2+4q^2.	(f) $\frac{1}{4}a^2+b^2$.
(b) $4p^2+9q^2$.	(g) $6\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2$.
(c) $25x^2+64y^2$.	(h) $\frac{25}{9}x^2+4y^2$.
(d) $144m^2+81n^2$.	(i) $1600m^4+25n^4$.
(e) $100m^4+1$.	(j) $9c^2d^2+49a^2b^2$.

31. a^2-2ab ఆకారములో ఈ క్రింద ఇచ్చి ఉన్న పదములకు b^2 వంటి పదము కలిపి ఫలితమును $(a-b)^2$ ఆకారమున చెప్పుము:—

(a) $4x^2-4xy$.	(f) $64p^4q^2-32p^3q$.
(b) $9m^2-12mn$.	(g) $16a^4b^2c^2-24a^3b^2c$.
(c) $25m^2-10ma$.	(h) a^2c^2-2ac.
(d) $36a^2-48ac$.	(i) x^2-x.
(e) $49a^2b^2-56ab$.	(j) $42\frac{1}{4}x^2-26xy$.

32. ఏదో సంఖ్యవేసి, దానిని దాని తరువాత క్రింది సంఖ్యచే గుణింపగా వచ్చెడిలబ్ధమును 4 చే గుణించి, ఆ ఫలితమునకు 1 కలుపుము. ఈ ఫలితము ఒక సంపూర్ణవర్గము అని నిరూపింపుము. అసలు సంఖ్య a అయినచో, నీకు ఏ సంకేతసమాసము వచ్చును?

33. ఒక నలుచదరముయొక్క భుజము 2 మైళ్లకును 20 గ. తక్కువ. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ అను సంకేతసూత్రమును ప్రయోగించి, దాని భూఫలమును (a) ఇన్ని చ. మైళ్లు ఇన్ని చ. గజములనియు, (b) ఇన్ని చ. మైళ్లు ఇంత భిన్నమనియు కట్టుము.

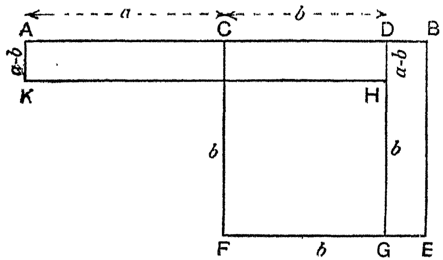
34. (5 అ. 11 అం.)^2 ని ఒక మిశ్రమరాశిగా చెప్పుము. (అనగా, చ. అడుగులలోను చ. అంగుళములలోను), అతిసూక్ష్మపద్ధతిని చేయుము.

35. 190 మంది బిచ్చగాండ్రు ఉన్నారు. ప్రతి బిచ్చగానికిని బిచ్చగాండ్ర సంఖ్యన్ని పైసలు ఇచ్చినారు. అతిసూక్ష్మపద్ధతిని, మొత్తము ఎంత పంచిపెట్టినారో కట్టుము.

36. x గజముల పొడుగు భుజముగల ఒక నలుచదరము తాలూకు ఒకొక్క భుజమును 4 అం. తగ్గించినారు. అతిసూక్ష్మపద్ధతిని, భూఫలములోని తరుగును కట్టుము.

77. $a^2-b^2=(a+b)\ (a-b)$. కేవల గుణకారమువల్ల $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ అని మనము ఎరుగుదుము. a^2-b^2 అనునది $(a+b)(a-b)$ యొక్క విస్తరణము అందురు.

a, b అను రెండు పదముల వర్గాలయొక్క తేడాకు సమము ఏమనగా, ఆ పదముల మొత్తమును $(a+b)$ ని ఆ పదముల తేడాచే $(a-b)$ చే గుణింపగా వచ్చెడి లబ్ధము.

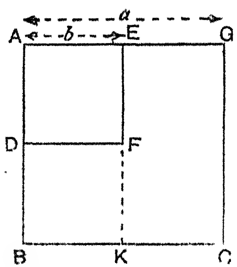


పటము 108.

$AC=CB=a$, $CD=b$.

$\therefore\ AD=a+b$,
$DH=DB=a-b$.

$\therefore\ (a+b)\ (a-b)=AH=CH+KC$
$=CH+DE$
$=CE-FH$
$=a^2-b^2$.



పటము 109.

లేక

$a^2-b^2=AC-AF$.
$=DK+EC$.
$=b(a-b)+a\ (a-b)$.
$=(a-b)\ (a+b)$.

మాదిరి నెం. (14) $(2x+3y)\ (2x-3y)$ ని విస్తరింపుము.

$(2x+3y)\ (2x-3y)=(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$.

మాదిరి నెం. (15) $(p+3)\ (p-3)$ ని విస్తరింపుము.

$(p+3)\ (p-3)=p^2-(3)^2=p^2-9$.

మాదిరి నెం. (16) $(1+a+b)\ (1-a+b)$ ని విస్తరింపుము.

$(1+a+b)\ (1-a+b)$.
$=\{(1+b)+a\}\ \{(1+b)-a\}$.
$=(1+b)^2-a^2=1+2b+b^2-a^2$.

మాదిరి నెం. (17) 98^2-96^2 ని సూక్ష్మముచేయుము.

$98^2-96^2=(98+96)\ (98-96)$ $\{\because a^2-b^2=(a+b)(a-b)\}$.
$=194\times 2=388$.

మాదిరి నెం. (18) $(1{\cdot}6354)^2-(1{\cdot}5384)^2$.

$(1{\cdot}6354)^2-(1{\cdot}5384)^2=(1{\cdot}6354+1{\cdot}5384)(1{\cdot}6354-{\cdot}1{\cdot}5384)$.
$=3{\cdot}1738\times{\cdot}097$.
$=3{\cdot}1738\ ({\cdot}1-{\cdot}003)$
$={\cdot}31738-{\cdot}0095214$
$={\cdot}3078586$.

78. రెండు ఏవైన సంఖ్యలయొక్క లబ్ధమును రెండు వర్గాల తేడాగా చెప్పవచ్చును.

మాదిరి నెం. (19) 35×27 ని రెండు వర్గుల తేడాగా చెప్పుము.

$35=x+y$ (అనుకో)................................(1)
$27=(x-y)$................................(2)
(1), (2) లు కలపగా, $62=2x$.
$\therefore\ 31=x$.
ఇప్పుడు (1) ని బట్టి, $31+y=35$.
$\therefore\ y=4$.
$\therefore\ 35\times 27=(x+y)\ (x-y)$
$=(31+4)\ (31-4)$
$=31^2-4^2$.

దీనినిబట్టి, సర్వసామాన్యముగా, $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. దీనికి

ఉపపత్తి ఇట్లు:—

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$................................(1)
$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$................................(2)

(1) నుండి (2) ను తీసివేయగా,

$$4\,ab=(a+b)^2-(a-b)^2.$$

$$\therefore\ ab=\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

$$\therefore\ 35\times 27=\left(\frac{35+27}{2}\right)^2-\left(\frac{35-27}{2}\right)^2=31^2-4^2.$$

అభ్యాసము 18. (C)

ఈ క్రిందివాటిని విస్తరింపుము:—

1. $(p+2)(p-2)$.
2. $(a+4)(a-4)$.
3. $(2a+3b)(2a-3b)$.
4. $(3c+4d)(3c-4d)$.
5. $(5c+6e)(5c-6e)$.
6. $(7a^2+3b^2)(7a^2-3b^2)$.
7. $(5xy+6)(5xy-6)$.
8. $(a+b+c)(a+b-c)$.
9. $(a-b+c)(a+b-c)$.
10. $(b+c-a)(-b+c+a)$.
11. $(a+b+c+d)(a-b+c-d)$.
12. $(1+x+y+xy)(1-x-y+xy)$.

ఈ క్రిందివాటికి విలువలు కట్టుము:—

13. $(50+8)(50-8)$.
14. $(100+9)(100-9)$.
15. $(150+25)(150-25)$.
16. $(200+15)(200-15)$.
17. $(1000+15)(1000-15)$.
18. $(800+60)(800-60)$.
19. $(1+\cdot 25)(1-\cdot 25)$.
20. $(\cdot 35+\cdot 25)(\cdot 35-\cdot 25)$.
21. $(2+\cdot 125)(2-\cdot 125)$.
22. $(30+\cdot 75)(30-\cdot 75)$.
23. $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$.
24. $(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})$.
25. $(\frac{3}{4}+\frac{1}{8})(\frac{3}{4}-\frac{1}{8})$.
26. $(\frac{7}{8}+\frac{1}{3})(\frac{7}{8}-\frac{1}{3})$.

ఈ క్రింద ఇచ్చిన సంఖ్యాలబ్ధములలో ప్రతిదానిని రెండు వర్గుల తేడాగా చెప్పి, దానికి విలువకట్టుము:—

27. 990×1010.
28. 1090×910.
29. 720×680.
30. 108×92.
31. 112×88.
32. $100\frac{1}{2}\times 99\frac{1}{2}$.
33. 9998×9996.
34. 5002×5001.
35. 25 (దీనిని 25×1 అనుకో).
36. 47 ($=47\times 1$).
37. 83 ($=83\times 1$).
38. 117 ($=117\times 1$).

ఈ క్రిందివాటిలో ప్రతిదానిని రెండు సంఖ్యల లబ్ధముగా వ్రాసి, దాని విలువ కట్టుము:

39. $(1006)^2-(1002)^2$.
40. $(1728)^2-(1726)^2$.
41. $(3\cdot 1428)^2-(3\cdot 1412)^2$.
42. 865^2-135^2.
43. 71^2-69^2.
44. 402^2-388^2.

45. ఒక చతురస్రపు పొలముయొక్క భుజము 1 మై. 60 గజములు, మరియొక చతురస్రపు పొలముయొక్క భుజము 1 మై. 30 గ. అతిసూక్ష్మ పద్ధతిని, వాటి భూఫలములలో తేడా కట్టుము.

46. ఒక ఆయతాకారపు భూమియొక్క పొడుగు 1,750 గ., వెడల్పు 250 గ. ఈ ఆయతపు భూఫలమునకు సమమైన భూఫలము తేడాగాగల చతురస్రముల కొలతలు కట్టుము.

47. రెండు వృత్తముల వ్యాసములు క్రమమున, 3·45 సెం.మీ., 3·55 సెం.మీ. ను వృత్తముయొక్క భూఫలము $3\frac{1}{7}\times r^2$ (r అనునది వ్యాసార్థమగునప్పుడు) అని తెలిసి, వాటి భూఫలములలోని తేడా కట్టుము.

48. 1 మీ. = 39·37 అం. అతిసూక్ష్మపద్ధతిని, ఒక చ. మీటరునకును ఒక చ. గజమునకును తేడా చ. అంగుళములలో కట్టుము.

49. రెండు కలప పలకలు ఘనాకారము గలిగియున్నవి. ఒకదాని అంచు 3·29 అం., రెండవదానిది 5·37 అం. అతిసూక్ష్మపద్ధతిని, వాటి ఉపరిభాగముల భూఫలములకు తేడా కట్టుము.

50. ఈ క్రింది వర్గసంఖ్యలలో ప్రతిదానిని రెండు వర్గుల తేడాగా చెప్పుము:—

(a) 6^2, (b) 10^2, (c) 15^2, (d) 18^2.

79. కేవల గుణకారమువల్ల ఇవి తెలియును:—

$$(x+3)(x+4)=x^2+7x+12.$$
$$(x+4)(x+5)=x^2+9x+20.$$
$$(x+4)(x-5)=x^2-x-20.$$
$$(x-7)(x-8)=x^2-15x+56.$$

పై ఉదాహరణలనుబట్టి, x అనునది మొదటి పదముగాగల రెండు ద్విపద సమాసములను గుణించునప్పుడు, విస్తరణమునందు మూడు పదములుండును. వాటిలో మొదటిది x^2. రెండవది, ఇచ్చిన సమాసములలోని ద్వితీయ పదముల మొత్తమును గుణకముగాగల x. మూడవది, ఆ ద్వితీయ పదముల లబ్ధము. ఈ క్రింద ఇచ్చియున్న ప్రశ్నలు పై నియమముల ప్రయోగమును చూపును:—

$$(x+8)(x+6)=x^2+(8+6)\,x+8\cdot 6=x^2+14x+48.$$

$$(x-8)(x+3)=x^2+(-8+3)\,x+(-8).\,3=x^2-5x-24.$$

$(x-9)(x-20)=x^2+(-9-20)x+(-9)(-20)=x^2-29x+180.$

అట్లే, $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

$(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab.$

$(x-a)(x+b)=x^2+(-a+b)x-ab=x^2-(a-b)x-ab.$

$(x-a)(x-b)=x^2+(-a-b)x+(-a)(-b)=x^2-(a+b)x+ab.$

అట్లే, $(2x+3)(2x+4)=(2x)^2+2x(3+4)+3\cdot4=4x^2+14x+12.$

$(3x-1)(3x+5)=(3x)^2+3x(5-1)-5=9x^2+12x-5.$

$(4x-8)(4x+3)=(4x)^2+4x(-8+3)-24=16x^2-20x-24.$

$(5x-4)(5x-8)=(5x)^2+5x(-4-8)+32=25x^2-60x+32.$

$(ax+b)(ax-c)=(ax)^2+ax(b-c)-bc=a^2x^2+a(b-c)x-bc.$

$(ax+b)(ax+b)=(ax)^2+ax(b+b)+b^2=a^2x^2+2axb+b^2.$

80. $(2x+4)(3x+1)=2x(3x+1)+4(3x+1)$

$$=2x.3x+2x.1+4.3x+4.1.$$
$$=6x^2+2x+12x+4.$$
$$=6x^2+14x+4.$$

$(ax+b)(cx+d)=ax(cx+d)+b(cx+d).$

$$=ax.cx+ax.d+b.cx+b.d.$$
$$=acx^2+adx+bcx+bd.$$
$$=acx^2+(ad+bc)x+bd.$$

చేసేసియున్న పై రెండు ఉదాహరణలను బట్టియు తేలునవి:—

(1) లబ్ధములోని x^2 యొక్క గుణకము ఎంత అనగా, గుణింపవలసిన సమాసములలోని x ల యొక్క గుణకముల లబ్ధము.

(2) లబ్ధములోని x యొక్క గుణకము ఎంత అనగా, గుణింపవలసిన సమాసములలో మొదటిదాని ప్రథమ పదగుణకమును రెండవదాని స్వతంత్ర పదముచే గుణింపగా వచ్చెడి లబ్ధమును, మొదటిదాని స్వతంత్ర పదమును రెండవదాని ప్రథమ పదగుణకముచే గుణింపగా వచ్చెడి లబ్ధమును కలిపిన మొత్తము.

(3) లబ్ధములోని స్వతంత్రపదము రెండిటి ద్వితీయ పదముల యొక్కయు లబ్ధము.

మాదిరి నెం. (20) 34×36 నకు విలువ, సంకేతసూత్రమూలముగ కట్టుము.

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

కావున, $34\times36=(30+4)(30+6).$

$$=30^2+30(4+6)+4.6.$$
$$=900+300+24.$$
$$=1224.$$

మాదిరి నెం. (21) $1{\cdot}21\times1{\cdot}25$ విలువ ఎంత?

$1{\cdot}21\times1{\cdot}25=(1{\cdot}2+{\cdot}01)(1{\cdot}2+{\cdot}05).$

$$=(1{\cdot}2)^2+1{\cdot}2\times{\cdot}06+{\cdot}0005.$$
$$=1{\cdot}44+{\cdot}072+{\cdot}0005.$$
$$=1{\cdot}5125.$$

మాదిరి నెం. (22) $40\tfrac{1}{2}\times40\tfrac{1}{4}=(40+\tfrac{1}{2})(40+\tfrac{1}{4})$

$$=1600+40\times\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{8}.$$
$$=1630\tfrac{1}{8}.$$

మాదిరి నెం. (23) $820\times815=(800+20)(800+15).$

$$=800^2+800{\cdot}35+300.$$
$$=640000+28000+300.$$
$$=668300.$$

మాదిరి నెం. (24) $640\times58=(600+40)(50+8)$

$$=600\times50+40\times50+600\times8+40\times8.$$
$$=30000+2000+4800+320.$$
$$=37120.$$

81 కేవల గుణకారమువల్ల, $(x+a)(x+b)(x+c)$ అనుదానికి సమము $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$ అనియు, $(x-a)(x-b)(x-c)$ అనుదానికి సమము $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$ అనియు నిరూపింపవచ్చును. ఈ విస్తరణములలో గమనింపవలసిన విషయము లెవ్వియనగా:

(1) రెండు లబ్ధములలోను x యొక్క ఘాతములు తగ్గు క్రమమున వ్రాసియున్నవి;

(2) మొదటి లబ్ధము x^3;

(3) రెండవ పదములో x^2 ఉన్నది. దాని గుణకము అసలు సమాసములలోని ద్వితీయ పదముల మొత్తము;

(4) మూడవ పదములో x ఉన్నది. దాని గుణకము అసలు సమాసములలోని ద్వితీయ పదములను రెండేసిచొప్పున తీసికొని గుణింపగా వచ్చెడి సమస్త లబ్ధములయొక్కయు మొత్తము;

(5) చివర పదములో x లేదు. అది అసలు సమాసములలోని ద్వితీయ పదములన్నిటియొక్కయు లబ్ధము.

మాదిరి నెం. (25) $(x+1)(x+2)(x+3)$ ని విస్తరింపుము.

$$\text{కోరిన విస్తరణము} = x^3 + (1+2+3)x^2 + (1.2+2.3+3.1)x + 1.2.3.$$
$$= x^3 + 6x^2 + 11x + 6.$$

మాదిరి నెం. (26) $(x+2)(x+3)(x-1)$ ని విస్తరింపుము.

$$\text{కోరిన విస్తరణము} = x^3 + (2+3-1)x^2 + \{2\cdot3 + 2.(-1) + 3.(-1)\}x + 2.3.(-1).$$
$$= x^3 + 4x^2 + x - 6.$$

మాదిరి నెం. (27) $(x-2)(x-3)(x-4)$ ని విస్తరింపుము.

$$\text{కోరిన విస్తరణము} = x^3 + (-2-3-4)x^2 + \{(-2).(-3) + (-2).(-4) + (-3).(-4)\}x + (-2).(-3).(-4).$$
$$= x^3 - 9x^2 + 26x - 24.$$

షరా. — గుణింపవలసిన ద్విపద సమాసములన్నిటిలోను కూడ ద్వితీయ పదములు ఋణాత్మకములగునపుడు, విస్తరణములోని పదములు ఒకటి విడిచి ఒకటి ధనాత్మకములును, ఋణాత్మకములును అని గమనింపుము.

అభ్యాసము 18 (D)

ఈ క్రిందివి విస్తరింపుము:—

1. $(x+1)(x+1)$.
2. $(x+3)(x-1)$.
3. $(x+4)(x-5)$.
4. $(x-3)(x+6)$.
5. $(x-8)(x+9)$.
6. $(x-3)(x-4)$.

7. $(x-8)(x-12)$.
8. $(x+9)(x-11)$.
9. $(2x+5)(2x-6)$.
10. $(3x-4)(3x+7)$.
11. $(4x-5)(4x+6)$.
12. $(2x-3)(2x+3)$.
13. $(3x+5)(3x-5)$.
14. $(4x+3)(4x+3)$.
15. $(6x+2)(3x-1)$.
16. $(4x+8)(3x-6)$.
17. $(9x-3)(8x-1)$.
18. $(7x-2)(6x-5)$.
19. $(5x+3)(5x-4)$.
20. $(10x-5)(9x+6)$.
21. $(11x-3)(12x+1)$.
22. $(7x+8)(16x-3)$.
23. $(5x-4)(15x+3)$.
24. $(16x-5)(3x-4)$.
25. 43×47.
26. 69×68.
27. 103×110.
28. 363×372.
29. 458×460.
30. 225×36.
31. 486×82.
32. 632×78.

33. ఒక సంఖ్యకు 3 కలపగా వచ్చిన మొత్తము, సంఖ్యకంటె 2 తగ్గున్న సంఖ్యచే గుణింపబడినది. వచ్చెడి లబ్ధమును సంఖ్యరూపేణ చెప్పుము.

34. $x+5$ మంది మనుష్యులున్నారు. వారిలో ప్రతివాడును $(x-2)$ రూ. ఆర్జించెను. వీరి సంపాదన మొత్తము ఎంత? $x=10$ అయినప్పుడు నీ ఫలితమును సరిచూడుము.

35. ఒక పొలముయొక్క పొడుగు $(7x+3)$ గజములు; వెడల్పు $(3x-4)$ గజములు. చ. గజములలో భూఫలము కట్టుము. $x=20$ వేసి నీ ఫలితమును సరిచూడుము.

36. ఒక తోటలో $4x+3$ వరుసలును, ప్రతి వరుసలోను $2x-5$ చెట్లునున్నచో, తోటలో ఉన్న చెట్లు మొత్తము ఎన్ని? $x=20$ వేసి నీ ఫలితమును సరిచూడుము.

37. $1085\times1173=1272705$ అని తెలిసి, (*a*) 1083×1171, (*b*) 1083×1178, (*c*) 1087×1171, (*d*) 1088×1174 ల విలువలు కట్టుము.

38. $1{\cdot}23\times1{\cdot}38=1{\cdot}6974$ అని తెలిసి, (*a*) $1{\cdot}22\times1{\cdot}37$, (*b*) $1{\cdot}21\times1{\cdot}40$, (*c*) $1{\cdot}26\times1{\cdot}35$, (*d*) $1{\cdot}27\times1{\cdot}42$ ల విలువలు కట్టుము.

82. గుణకారముచే ఈ క్రింది వి నిరూపింపవచ్చును:—

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad = a^3+b^3+3ab\,(a+b) \qquad (1)$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \quad = a^3-b^3-3ab\,(a-b) \qquad (2)$$

$$(a+b)\,(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \qquad (3)$$

$$(a-b)\,(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \qquad (4)$$

(1) విషయములో విస్తరణమున రెండు రూపములున్నవని తెలియ నగును. విస్తరణముయొక్క మొదటి రూపము = (మొదటి పదము)^3 + 3 (మొదటి పదము)^2 × రెండవ పదము + 3 (మొదటి పదము) (రెండవ పదము)^2 + (రెండవ పదము)^3. అది a యొక్క తగ్గు క్రమఘాతములలోను b యొక్క హెచ్చు క్రమఘాతములలోను రచింపబడియున్నది. ఇక, విస్తరణముయొక్క రెండవ రూపము: మొదటి, రెండవ పదములయొక్క ఘనముల మొత్తముతో రెండు పదములను వాటి మొత్తమును గుణింపగా వచ్చెడి లబ్ధమునను మూడు రెట్లు కలుపుటచే ఏర్పడినది.

(2) విషయములో కూడ విస్తరణమున రెండు రూపములున్నవి. విస్తరణముయొక్క మొదటి రూపము=(మొదటి పదము)^3 − 3 (మొదటి పదము)^2 × రెండవ పదము + 3 (మొదటి పదము) (రెండవ పదము)^2−(రెండవ పదము)^3. ఇదికూడ a యొక్క తగ్గు క్రమఘాతములలోను b యొక్క హెచ్చు క్రమఘాతములలోను రచింపబడియున్నది. ఇక, విస్తరణముయొక్క రెండవరూపము: మొదటి, రెండవ పదములయొక్క ఘనముల తేడానుండి రెండు పదములను వాటి తేడాను గుణింపగా వచ్చెడి లబ్ధమునను మూడు రెట్లు తీసివేయుటచే ఏర్పడినది.

(3) అను రూపమున, $a+b$ యొక్కయు a, b ల వర్గముల మొత్తమునుండి a, b ల లబ్ధమును తీసివేయగా వచ్చెడి దానియొక్కయు లబ్ధము, a^3+b^3 అని తెలియుచున్నది.

(4) అను రూపమున, $a-b$ యొక్కయు a, b ల వర్గముల మొత్తముతో a, b ల లబ్ధమును కలుపగా వచ్చెడి దానియొక్కయు లబ్ధము, a^3-b^3 అని తెలియుచున్నది.

మాదిరి నెం. (28) $(2a+5b)^3$ ని విస్తరింపుము.

$$(2a+5b)^3=(2a)^3+3\,(2a)^2\,(5b)+3.2a\,(5b)^2+(5b)^3.$$
$$=8a^3+3.4a^2.5b+3.2a.25b^2+125b^3.$$
$$=8a^3+60a^2b+150ab^2+125b^3.$$

రెండవ రూపమును బట్టి,

$$(2a+5b)^3=(2a)^3+(5b)^3+3.2a.5b\,(2a+5b).$$
$$=8a^3+125b^3+30ab\,(2a+5b).$$
$$=8a^3+125b^3+60a^2b+150ab^2.$$

మాదిరి నెం. (29) $(3a-2b)^3$ ని విస్తరింపుము.

$$=(3a)^3-3.(3a)^2.2b+3.(3a)\,(2b)^2-(2b)^3.$$
$$=27a^3-3.9a^2.2b+3.3a.4b^2-8b^3.$$
$$=27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3.$$

రెండవ రూపమును బట్టి,

$$(3a-2b)^3=(3a)^3-(2b)^3-3.3a.2b\,(3a-2b).$$
$$=27a^3-8b^3-18ab\,(3a-2b).$$
$$=27a^3-8b^3-54a^2b+36ab^2.$$

మాదిరి నెం. (30) $p^2-2pq+4q^2$ ని $p+2q$ చేత గుణించుటలో $(a+b)\,(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ అను సంకేతసూత్రమును వాడుము.

$$(p+2q)\,\{\,p^2-p.\,2q+(2q)^2\,\}\;=\;p^3+(2q)^3=p^3+8q^3.$$

(సంకేతసూత్రములోని a, b లకు బదులుగ $p, 2q$ లు ఉన్నవని గమనింపుము.)

మాదిరి నెం. (31) $(3l+m)\,(9l^2-3lm+m^2)$ ని విస్తరింపుము.

$$=(3l+m)\,\{\,(3l)^2-3l.m+m^2\,\}.$$
$$=(3l)^3+m^3=27l^3+m^3.$$

మాదిరి నెం. (32) $(4a-3b)\,(16a^2+12ab+9b^2)$ ని పై మాదిరినే విస్తరింపుము.

$$(4a-3b)\,\{\,(4a)^2+4a.3b+(3b)^2\,\}=(4a)^3-(3b)^3$$
$$=64a^3-27b^3.$$

మాదిరి నెం. (33) $7x-6y$ ని $49x^2+42xy+36y^2$ చే గుణింపుము.

$$(7x-6y)\{(7x)^2+(7x)(6y)+(6y)^2\}=(7x)^3-(6y)^3$$
$$=343x^3-216y^3.$$

మాదిరి నెం. (34) $(42)^3$ యొక్క విలువ కట్టుము.

$$(42)^3=(40+2)^3=40^3+3.40^2.2+3.40.2^2+2^3.$$
$$=64000+9600+480+8.$$
$$=74088.$$

42
42
168
84
1764
42
7056
3528
74088

మాదిరి నెం. (35) $(47)^3$ యొక్క విలువ కట్టుము.

$$(47)^3=(50-3)^3=50^3-3.50^2.3+3.50.3^2-3^3.$$
$$=125000-22500+1350-27.$$
$$=126350-22527=103823.$$

47
47
188
329
2209
47
8836
15463
103823

మాదిరి నెం. (36) 16^3+9^3 ను సూక్ష్మము చేయుము.

$$16^3+9^3=(16+9)(16^2-16.9+9^2)$$
$$=25(256-144+81).$$
$$=25\times193=\frac{19300}{4}=4825.$$

ఋజువు.

$16^3=256\times16=4096$
$9^3=81\times9=729$
4825

మాదిరి నెం. (37) 35^3-15^3 ను సూక్ష్మము చేయుము.

$$35^3-15^3=(35-15)\{35^2+35.15+15^2\}$$
$$=20(1225+525+225).$$
$$=20\times1975=39500.$$

మరొ.— $\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$$=(a-b)\{(a+b)^2-ab\}$$
$$\therefore 35^3-15^3=(35-15)\{(35+15)^2-35\times15\}$$
$$=20\times\{50^2-525\}$$
$$=20\times\{2500-525\}$$
$=20\times1975$, లోగడ వచ్చినదే.

ఋజువు.

$35^3=1225\times35=1225$
35
3675
6125
42875
$15^3=225\times15=3375$
39500

అభ్యాసము 18 (E)

ఈ క్రింది విస్తరింపుము:—

1. $(2a+3b)^3$.
2. $(4p+5q)^3$.
3. $(3a^2+2b^2)^3$.
4. $(4p^2+7x)^3$.
5. $(5p+2q)^3$.
6. $(3ab+1)^3$.
7. $(2p-3q)^3$.
8. $(3p-1)^3$.
9. $(9l-2m)^3$.
10. $(10m-3n)^3$.
11. $(7a^2-5b^2)^3$.
12. $(3lmn-2p^2q^2)^3$.
13. $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$.
14. $(2p-3q)(4p^2+6pq+9q^2)$.
15. $(3l+5m)(9l^2+15lm+25m^2)$.
16. $(x^3+y^3)(x^6-x^3y^3+y^6)$.
17. $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$.
18. $(a^4-b^4)(a^8+a^4b^4+b^8)$.
19. $(a^5+b^5)(a^{10}-a^5b^5+b^{10})$.
20. $(3p^2-4q^2)(9p^4+12p^2q^2+16q^4)$.
21. $(2m^2-3n^2)(4m^4+6m^2n^2+9n^4)$.
22. $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$.
23. $(2x+3)(4x^2-6x+9)$.
24. $(8x-5)(64x^2+40x+25)$.
25. $(1-2a)(1+2a+4a^2)$.
26. $(1+3x)(1-3x+9x^2)$.

ఈ క్రింది వాటి విలువలు కట్టుము:—

27. 73^3.
28. 98^3.
29. 103^3.
30. 997^3.
31. 1002^3.
32. $(820)^3$.
33. 27^3+13^3.
34. 17^3+8^3.
35. 65^3-15^3.
36. 43^3-13^3.
37. $(1018)^3-18^3$.
38. 985^3+15^3.
39. $(2\frac{1}{4})^3+(\frac{3}{4})^3$.
40. $(1\frac{3}{8})^3-(\frac{1}{8})^3$.

41. రెండు ఘనస్వరూపముల అంచులు క్రమమున, 1·267 మీ., 1·413 మీ. ను ఉన్నవి. వాటి ఘనఫలముల మొత్తమును, 6 దశాంశములకు సరిగ కట్టుము.

42. రెండు ఘనస్వరూపముల అంచులు 2·75 అం. ను, 1·25 అం. ను ఉన్నవి. వాటి ఘనఫలముల తేడా కట్టుము.

43. $(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1$ అని తెలిసి, 125^3 యొక్కయు 125^2 యొక్కయు విలువలను అతిసూక్ష్మపద్ధతిని ఊహించి, 126^3 యొక్క విలువ కట్టుము.

44. $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ అను సంకేతసూత్రమును వాడి, $66^3=287496$ అని తెలిసి, 67^3 యొక్క విలువ కట్టుము.

45. $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ అను సంకేతసూత్రమును వాడి, $66^3=287496$ అని తెలిసి, 65^3 యొక్క విలువ కట్టుము.

46. $(a+2)^3=a^3+8+6a(a+2)$ అను సంకేతసూత్రమును వాడి, $(303)^3=27818127$ అని తెలిసి, $(305)^3$ యొక్క విలువ కట్టుము.

47. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ అను సంకేతసూత్ర సాహాయ్యమున, 1001 అను సంఖ్య 11 చే భాజనీయమని నిరూపింపుము.

48. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ అను సంకేతసూత్రమును వాడి, 999 అను సంఖ్య 9 చే భాజనీయమని నిరూపింపుము

49. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ అను సంకేతసూత్రమును $a^3-b^3=(a-b)\times\{(a-b)^2+3ab\}$ అను రూపమున కూడ వ్రాయవచ్చును. ఈ రూపమును వాడి, $(1\cdot325)^3-(1\cdot225)^3$ యొక్క విలువ కట్టుము.

50. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ అను సంకేతసూత్రమును $a^3+b^3=(a+b)\times\{(a+b)^2-3ab\}$ అను రూపమున కూడ వ్రాయవచ్చును. ఈ రూపమును వాడి, $(1\cdot675)^3+(1\cdot325)^3$ యొక్క విలువ కట్టుము.

51. 1000001 ఎందువల్ల 101 చే నిశ్శేషముగ భాగింపబడునని చెప్పగలవు? భాజితమును కట్టుము.

అధ్యాయము XIX.

అవయవ విభజన.

83. రెండు నిర్దిష్ట సమాసములనుగాని, రాసులనుగాని గుణింపగా వచ్చెడు దానిని "**లబ్ధము**" లేక "**గుణజము**" అందురు. గుణింపబడిన సమాసములలోగాని, రాసులలోగాని ప్రతిదియు లబ్ధముయొక్క "**నిశ్శేష భాజకము**" అనియు "**అవయవము**" అనియు అనబడును. కొన్ని అవయవముల లబ్ధము తెలిసినపుడు దానినుండి ఆ అవయవములను కట్టుటను

"**అవయవ నిర్ధారణ**" అనియు "**అవయవ విభజన**" అనియు "**విభజన**" అనియు అందురు.

మాదిరి నెం. (1) $pq+pr$ ని అవయవములలోనికి విభజింపుము.

$pq+pr=p\times q+p\times r=p(q+r)$.

pq, pr అను పదములకు p అనునది సామాన్య అవయవము గావున, ఆ సామాన్య అవయవమును కుండలముల పూర్వము వ్రాసి, తక్కిన అవయవములను అవే సంజ్ఞలతో కుండలగర్భమున వ్రాయవచ్చును. దీనికి సబబు ఏమియనగా, $q+r$ ని p చే గుణించుటయు, q, r లలో ప్రతి పదమును p చే గుణించి ఆ లబ్ధములను కలుపుటయు సమములే.

మాదిరి నెం. (2) $pq+pr+ps$ ని అవయవములలోనికి విభజింపుము.

$pq+pr+ps=p(q+r+s)$.

మాదిరి నెం. (3) a^2-a ని విభజింపుము.

$a^2-a=a(a-1)$.

మాదిరి నెం. (4) a^3+6a^2-4a ని విభజింపుము.

$a^3+6a^2-4a=a(a^2+6a-4)$.

మాదిరి నెం. (5) a^2b+ab^2+abc ని విభజింపుము.

$a^2b+ab^2+abc=ab(a+b+c)$. [a, b లు అన్ని పదములలోను సామాన్య అవయవములన్న సంగతి గమనింపుము].

మాదిరి నెం. (6) $a^2+ab+ab+b^2$ ని విభజింపుము.

$$\begin{aligned}a^2+ab+ab+b^2&=(a^2+ab)+(ab+b^2).\\&=a(a+b)+b(a+b).\\&=(a+b)(a+b).\end{aligned}$$

ఈ సమాసములో, పదములన్నిటికిని సామాన్యమగు అవయవము లేదు. కాని, మొదటి రెండు పదములకును ఒక సామాన్య అవయవమును, తరువాత రెండు పదములకును మరియొక సామాన్య అవయవమును ఉన్నవి. అట్టిచో, ఒక సామాన్య అవయవముగలిగిన పదముల నన్నిటిని ఒక లాటుగను, మరియొక సామాన్య అవయవముగలిగినవాటిని మరియొక లాటుగను పుచ్చుకొనవలయును. ఈ రెండు లాటులను విభజించునపుడు, $a(a+b)$ అని ఒకదానికిని, $b(a+b)$ అని రెండవదానికిని వచ్చును. ఈ రెండును + సంజ్ఞచే సంధింపబడియుండును.

ఆ రెండు లాటులలోను, అప్పుడు ఒక సామాన్య అవయవము కనబడును. ఏదియన, $a+b$. కాబట్టి $a+b$ ని కుండలముల వెలుపల వ్రాసి, తక్కిన అవయవములగు a, b లను $+$ సంజ్ఞతో కుండలగర్భమున వ్రాయవచ్చును.

వి. రా.—సామాన్య అవయవములో రెండు పదములుండి, దానిని కుండలముల పూర్వము వ్రాయునపుడు దానికికూడ కుండలములు వేయవలెను.

మాదిరి నెం. (7) $a^2+ab+ac+bc$ ని విభజింపుము.

$$a^2+ab+ac+bc=(a^2+ab)+(ac+bc).$$
$$=a(a+b)+c(a+b).$$
$$=(a+b)(a+c).$$

మాదిరి నెం. (8) $a^3+a^2b-ac^2-bc^2$ ని విభజింపుము.

$$a^3+a^2b-ac^2-bc^2=(a^3+a^2b)-(ac^2+bc^2).$$
$$=a^2(a+b)-c^2(a+b).$$
$$=(a+b)(a^2-c^2).$$

అభ్యాసము 19 (A)

ఈ క్రిందివాటిని అవయవములలోనికి విభజింపుము:—

1. $ab+ac$.
2. $ab+ac+a^2$.
3. $pr+pq+p^2$.
4. $ab-ac$.
5. $ab+bc-b^2$.
6. $4p+4$.
7. $2q-2$.
8. a^2+a.
9. $3a^2-2a$.
10. x^3-x^2+x.
11. y^3+2y^2+3y.
12. $a^4+a^3b+a^3c$.
13. $3-12a$.
14. $9-9a^2$.
15. $5a^3b+15a^2b^2$.
16. $7a^3-14a^2y$.
17. $28x^2-55xy$.
18. $49x^4-63x^3y$.
19. $2x^4+4y^3x+6x^2y^2$.
20. $a^2bc+ab^2c^4+abc^2$.
21. $x^2yz+xy^2z+xyz^2$.
22. $6x^5+12x^2+9x^3$.
23. $a^4-2a^3b-3a^3c$.
24. $b^4+2b^3a+4b^2c$.
25. $a^3+6a^2b+3ab^2$.
26. $5a^3-6a^2c+6ac^2$.
27. $ax^4yz+bxy^4z+cxyz^4$.
28. $x^2yz+3x^4y-6x^3yz$.
29. $6x^4-12x^3y+24x^2y^2$.
30. $17a^2b^2-34a^2bc+51a^3b$.
31. $18x^4+36x^2y^2+54x^2z^2$.
32. $3a-18a^2+24a^3-48a^4$.
33. $b^3-b+a^3b-b^4$.
34. $c^3a+c^3b+c^4+c^3ab$.
35. $a^2bcd+b^2cad+c^2abd+d^2abc$.
36. $a^2+2ab+ac+2bc$.
37. $a^2-ab+ac-bc$.
38. $ab+ac+bd+cd$.
39. $ab-ac+bd-cd$.

40. $x^2+px+qx+pq$.
41. $x^2-px-qx+pq$.
42. $x^2+2px+qx+2pq$.
43. $x^2-2px+qx-2pq$.
44. $x^2+ax+bx+ab$
45. $x^2+ax-bx-ab$.
46. $x^2-ax+bx-ab$.
47. $x^2-ax-bx+ab$.
48. $a^2b+ab^2+acd+bcd$.
49. $a^2b-ab^2+acd-bcd$.
50. $a^2b+ab^2-acd-bcd$.
51. $a^2b-ab^2-acd+bcd$.
52. $pr+qr+ps+qs$.
53. $pr-qr+ps-qs$.
54. $pr+qr-ps-qs$.
55. $pr-qr-ps+qs$.
56. $l^2-lm+ln-mn$.
57. $l^2+lm+ln+mn$.
58. $2a(b+c)-5(b+c)+a^2(b+c)$.
59. $(x+1)^3-7(x+1)^2$.
60. a^3+a^2+a+1.
61. a^3+a^2-a-1.
62. $x^3-4x^2+3x-12$.
63. $m^3+m^2n-mn-n^3$.

84 (a). నియమిత సంకేతసూత్రముల మూలకముగ విభజన చేయుట.

$a^2+2ab+b^2$ అనెడి రూపముననున్న సమాసములను $(a+b)^2$ అనెడి రూపమునను, $a^2-2ab+b^2$ అను రూపముననున్న వాటిని $(a-b)^2$ అను రూపమునను పెట్టవచ్చును. కాబట్టి మనకిచ్చిన సమాసము త్రిపదమై, అందు రెండు పదములు a^2, b^2 లకు సంగతములగు పూర్ణవర్గములై, మూడవది ఆ పదముల లబ్ధమునకు రెట్టింపుదైన (ఏ సంజ్ఞయైనను సరె), ఆ సమాసపు అవయవములను, చూచి చెప్పవచ్చును. అట్టివి కొన్ని ఈనరకే చేసి యున్నాము.

మాదిరి నెం. (9) $4a^2+12ab+9b^2$ ని సర్వసామాన్య జ్ఞానముచే విభజింపుము.

$$^*4a^2+12ab+9b^2=4a^2+6ab+6ab+9b^2.$$
$$=2a(2a+3b)+3b(2a+3b).$$
$$=(2a+3b)(2a+3b).$$
$$=(2a+3b)^2.$$

పద్ధతి 2. సంకేతసూత్రమూలమున చూడగానే,

$$(2a)^2+(3b)^2+2.2a.3b=(2a+3b)^2.$$

[*వి. రా.—పూర్ణవర్గములైన త్రిపద సమాసములు ఒక రాశియొక్క హెచ్చు క్రమమునకుంగానీ, తగ్గు క్రమమునకుంగానీ వరుసగా వ్రాయబడినపుడు, వాటియొక్క మధ్యపదమును రెండు సమభాగములు చేసి వ్రాసి, ఒక భాగమును మొదటి పదముతోను రెండవ భాగమును మూడవ పదముతోను కలిపి లెక్కచేయవచ్చును.]

మాదిరి నెం. (10) $9k^2-24kl+16l^2$ ని సర్వసామాన్య జ్ఞానముచే విభజింపుము.

$$*\ 9k^2-24kl+16l^2=9k^2-12kl-12kl+16l^2.$$
$$=3k\,(3k-4l)-4l\,(3k-4l).$$
$$=(3k-4l)\,(3k-4l).$$
$$=(3k-4l)^2.$$

పద్ధతి 2. సంకేతసూత్రమూలమున చూడగా నే,

$$9k^2-24kl+16l^2=(3k)^2+(4l)^2-2.3k.4l.$$
$$=(3k-4l)^2.$$

అభ్యాసము 19 (B)

ఇవి విభజింపుము:—

1. $a^4+2a^2b^2+b^4$.
2. $a^4-2a^2b^2+b^4$.
3. $a^2-2ac+c^2$.
4. $a^2+2ac+c^2$.
5. $4m^2+9n^2-12mn$.
6. $4m^2+9n^2+12mn$.
7. $x^2+x+\frac{1}{4}$.
8. $x^2-x+\frac{1}{4}$.
9. $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$.
10. $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$.
11. $4x^2-4x+1$.
12. $4x^2+4x+1$.
13. $16x^2+8x+1$.
14. $16x^2-8x+1$.
15. $36p^2+24pq+4q^2$.
16. $36p^2-24pq+4q^2$.
17. $4a^2b^2-32ab+64$.
18. $(x+a)^2+2\,(x+a)\,b+b^2$.
19. $(x+a)^2-2\,(x+a)\,b+b^2$.
20. $25x^2+20xy+4y^2$.
21. $25x^2-20xy+4y^2$.
22. $16p^2q^2r^2+48pqr+36$.
23. $16p^2q^2r^2-48pqr+36$.
24. $9a^2b^2x^4+42ab^2cx^2y+49b^2c^2y^2$.
25. $9a^2b^2x^4-42ab^2cx^2y+49b^2c^2y^2$.
26. ఈ క్రిందివి ఎందువల్ల పూర్ణవర్గములు కావో, ఎట్లు మార్చిన అగునో చెప్పుము:—

(a) $a^4+a^2b^2+b^4$. (b) $36x^2+48xy+64y^2$.
(c) $25m^2+10mn-n^2$. (d) $2500m^4-50m^2+1$.

మాదిరి నెం. (11) a^2-b^2 ని సామాన్యజ్ఞానముచే విభజింపుము.

$$a^2-b^2=a^2+ab-ab-b^2.$$
$$=a\,(a+b)-b\,(a+b).$$
$$=(a+b)\,(a-b).$$

[*షరా — పూర్ణవర్గములైన త్రిపద సమాసములు ఒక రాశియొక్క హెచ్చు క్రమమార్గములోనో, తగ్గు క్రమమార్గములలోనో వరుసగా వ్రాయబడినపుడు, వాటియొక్క మధ్యపదములను రెండు సమభాగములు చేసి వ్రాసి, ఒక భాగమును మొదటి పదముతోను రెండవ భాగమును మూడవ పదముతోను తీసికొని లెక్కచేయవచ్చును.]

పద్ధతి 2. సంకేతసూత్రముచే ఒక్కపెట్టున నే, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

మాదిరి నెం. (12) $4m^2-9n^2$ ని విభజింపుము.

$$4m^2-9n^2=(2m)^2-(3n)^2$$
$$=(2m+3n)\,(2m-3n).$$

మాదిరి నెం. (13) $100x^2-1$ ని విభజింపుము.

$$100x^2-1=(10x)^2-(1)^2.$$
$$=(10x+1)\,(10x-1).$$

మాదిరి నెం. (14) $16a^2-25$ ని విభజింపుము.

$$16a^2-25=(4a)^2-(5)^2.$$
$$=(4a+5)\,(4a-5).$$

మాదిరి నెం. (15) $(a+b)^2-c^2$ ని విభజింపుము.

$$(a+b)^2-c^2=\{\,(a+b)+c\,\}\,\{\,(a+b)-c\,\}.$$
$$=(a+b+c)\,(a+b-c).$$

మాదిరి నెం. (16) $(a+b)^2-(c+d)^2$ ని విభజింపుము.

$$(a+b)^2-(c+d)^2=\{\,(a+b)+(c+d)\,\}\,\{\,(a+b)-(c+d)\,\}.$$
$$=(a+b+c+d)\,(a+b-c-d).$$

మాదిరి నెం. (17) $(x+y+z)^2-(x-z)^2$ ని విభజింపుము.

$$(x+y+z)^2-(x-z)^2=\{\,(x+y+z)+(x-z)\,\}\,\{\,(x+y+z)-(x-z)\,\}.$$
$$=(x+y+z+x-z)\,(x+y+z-x+z).$$
$$=(2x+y)\,(y+2z).$$

మాదిరి నెం. (18) a^4+4b^4 ని విభజింపుము.

$$a^4+4b^4=(a^2)^2+(2b^2)^2+2.a^2.2b^2-2.a^2.2b^2.$$
$$=(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2.$$
$$=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2.$$
$$=(a^2+2b^2+2ab)\,(a^2+2b^2-2ab).$$

షరా.—ఈ ప్రశ్నలోని రెండు పదములును పూర్ణవర్గములు. అవి a^2+b^2 రూపమున నున్నవి. ఇచ్చిన సమాసమును ఒక పూర్ణవర్గము చేయవలె నన్నదానికి $2ab$ అనెడి రూపమును కలుపవలెను. అట్లు కలిపినను సమాసము యొక్క విలువ మారకుండ ఎప్పటియట్ల నిలుచుటను కలిపినంత తీసివేయ వలెను.

మాదిరి నెం. (19) $2500m^4+1$ ని విభజింపుము.

$$2500m^4+1=(50m^2)^2+(1)^2.$$
$$=(50m^2)^2+(1)^2+2.50m^2.1-2.50m^2.1.$$
$$=(50m^2+1)^2-(10m)^2.$$
$$=(50m^2+1+10m)\ (50m^2+1-10m).$$

మాదిరి నెం. (20) x^4+2x^2+9 ని విభజింపుము.

$$x^4+2x^2+9=(x^2)^2+3^2+2x^2.3.-2x^2.3+2x^2.$$
$$=(x^2)^2+3^2+2x^2.3-6x^2+2x^2.$$
$$=(x^2+3)^2-4x^2.$$
$$=(x^2+3)^2-(2x)^2.$$
$$=(x^2+3+2x)\ (x^2+3-2x).$$
$$=(x^2+2x+3)\ (x^2-2x+3).$$

మాదిరి నెం. (21) $a^4+a^2b^2+b^4$ ని విభజింపుము.

$$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2+2.a^2.b^2.-2a^2b^2+a^2b^2$$
$$=(a^2+b^2)^2-a^2b^2.$$
$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2.$$
$$=(a^2+b^2+ab)\ (a^2+b^2-ab).$$
$$=(a^2+ab+b^2)\ (a^2-ab+b^2).$$

అభ్యాసము 19 (C)

ఇవి విభజింపుము:—

1. a^2-4.
2. $4a^2-25$.
3. $16m^4-1$.
4. $1-100x^2$.
5. $16x^2y^2-9$.
6. $49-x^2y^2$.
7. $81-16p^4q^4$.
8. $144x^2-169$.
9. $400a^2b^2-289$.
10. $256x^2y^2-9y^2z^2$.
11. $100m^4-16$.
12. x^4-1.
13. x^4-16.
14. x^6-81.
15. $(a+b)^2-4c^2$.
16. $(a^2+b^2)^2-4c^4$.
17. $(a+2b)^2-(b+2a)^2$.
18. $(4x+5y)^2-(5x-6y)^2$.
19. $16a^2-(3b-4c)^2$.
20. $4b^2-(9m-8n)^2$.
21. $(2a+3b+4c)^2-(3a+5b-6c)^2$.
22. $(a^2+b^2+c^2)^2-(ab+ac+bc)^2$.
23. $4\ (a+b-c)^2-9\ (b+a-c)^2$.
24. $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-4\ (ab-cd)^2$.
25. $(1+a)^2\ (1+b)^2-(ab)^2$.
26. $(1-a)^2\ (1-b)^2-(ab)^2$.
27. $(x+y)^2-(1+xy)^2$.
28. $(3a+2b-3c+4d)^2-(2a+3b+4c-d)^2$.
29. $(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2$.
30. $a^4-(a-1)^2$
31. p^4+4q^4.
32. $4m^4+81$.
33. $16a^4+4m^4$.
34. $36x^4+144y^4$.
35. $2500l^4+m^4$.
36. $196x^4+49y^4$.
37. x^4+3x^2+36.
38. $4x^4+4x^3+x^2-9$.
39. a^4-14a^2+1.
40. a^4-18a^2+1.
41. a^4-19a^2+9.
42. a^4-31a^2+9.
43. m^4-56m^2+16.
44. m^4-72m^2+16.
45. $x^4-6x^2y^2+y^4$.

మాదిరి నెం. (22) a^3+b^3 ని సామాన్య జ్ఞానముచే విభజింపుము.

$$a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b+b^3.$$
$$=a^2(a+b)-b\ (a^2-b^2).$$
$$=a^2(a+b)-b\ (a+b)\ (a-b).$$
$$=(a+b)\ \{\ a^2-b\ (a-b)\ \}.$$
$$=(a+b)\ (a^2-ab+b^2).$$

పద్ధతి 2. సంకేతసూత్రముచే సులువుగా $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab\times b^2)$.

మాదిరి నెం. (23) a^3-b^3 ని సామాన్య జ్ఞానముచే విభజింపుము.

$$a^3-b^3=a^3-a^2b+a^2b-b^3.$$
$$=a^2(a-b)+b\ (a^2-b^2).$$
$$=(a-b)\ \{\ a^2+b\ (a+b)\ \}.$$
$$=(a-b)\ (a^2+ab+b^2).$$

పద్ధతి 2. సంకేతసూత్రముచే సులువుగా $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

మాదిరి నెం. (24) $8a^3-b^3$ ని విభజింపుము.

$$8a^3-b^3=(2a)^3-b^3=(2a-b)\ \{\ (2a)^2+2a.b+b^2\ \}.$$
$$=(2a-b)\ (4a^2+2ab+b^3).$$

మాదిరి నెం. (25) $1000+a^3$ ని విభజింపుము.

$$1000+a^3=(10)^3+a^3.$$
$$=(10+a)\ (10^2-10a+a^2).$$
$$=(10+a)\ (100-10a+a^2).$$

మాదిరి నెం. (26) $27x^3+125y^3$ ని విభజింపుము.

$$27x^3+125y^3=(3x)^3+(5y)^3.$$
$$=(3x+5y)\ \{\ (3x)^2-3x.5y.+(5y)^2\ \}.$$
$$=(3x+5y)(9x^2-15xy+25y^2).$$

మాదిరి నెం. (27) $(a+b)^3-a^3$ ని విభజింపుము.

$$(a+b)^3-a^3=\{\ (a+b)-a\ \}\ \{\ (a+b)^2+(a+b)\ a+a^2\ \}.$$
$$=(a+b-a)\ (a^2+2ab+b^2+a^2+ab+a^2).$$
$$=b\ (3a^2+3ab+b^2).$$

అభ్యాసము 19 (D)

ఇవి విభజింపుము:—

1.	a^3+8.	11.	a^9-b^9.
2.	a^3-8.	12.	a^9+b^9.
3.	b^3+27.	13.	a^6+b^6.
4.	b^3-27.	14.	a^6-b^6.
5.	$8a^3-1$.	15.	$343\,(P+1)^3-1$.
6.	$8a^3-27$.	16.	$512\,z^3-8\,(x+y)^3$.
7.	$27l^3+64$.	17.	$a^{12}+b^{12}$.
8.	$27l^3-64$.	18.	$a^{12}-b^{12}$.
9.	l^3m^3+8000.	19.	$(a+b)^3-c^3$.
10.	$l^3m^3-27000$.	20.	$(b+c)^3-(a+d)^3$.

84 (b). వర్గసమాసములయొక్క అవయవ విభజన.

$4x^2+11x+6$ ని "వర్గసమాసము" అందురు. ఏలయన, దానిలో వచ్చెడి x యొక్క ఘాతములలో రెండవదే మహత్తమము. అట్టి సమాసములో x గల పదమును, x రహితమగు ఒక స్వతంత్ర పదమును కూడ ఉండును. కాబట్టి, అట్టి సమాసములో మొత్తము మూడు పదములుండును. అట్టి మోస్తరు సమాసముయొక్క విభజనకు ఒక "ఊహ" మార్గమే ఆధారము. ఈ సంగతి ఈ క్రింది ఉదాహరణలలో తేలును:—

మాదిరి నెం. (28) a^2+4a+3 ని విభజింపుము.

మొదటి పదముయొక్క గుణకమును, చివర పదముయొక్క గుణకముచే గుణింపవలెను. ఈ ప్రశ్నలో $+1$ ని, $+3$ చే గుణింపగా, లబ్ధము $+3$. ఇప్పుడు రెండు సంఖ్యలను ఊహింపవలెను, వాటి మొత్తము 4 అయియుండవలెను. వాటి లబ్ధము $+3$ (అనగా, మొదటి చివర పదముల గుణకముల లబ్ధము) అయియుండవలెను. అవి యేవియనగా, $+3$, $+1$ లు. ఏలయన కోరిన చొప్పున వాటి మొత్తము $+4$, వాటి లబ్ధము $+3$.

$$\therefore a^2+4a+3=a^2+3a+a+3.$$
$$=a\,(a+3)+1\,(a+3).$$
$$=(a+3)\,(a+1).$$

మాదిరి నెం. (29) $a^2+8a+15$ ని అవయవములలోనికి విభజింపుము.

మొదటి, చివర గుణకములగు $+1$, $+15$ లను గుణింపగా లబ్ధము $+15$. మొత్తము $+8$ ని, లబ్ధము $+15$ నును గల రెండు సంఖ్యలను ఊహింపుము.

అవి యేవియన, $+5$, $+3$ లు. $(+5)+(+3)=+8$ యు, $(+5)\times(+3)=+15$ నును గనుక.

$$\therefore a^2+8a+15=a^2+5a+3a+15.$$
$$=a\,(a+5)+3\,(a+5).$$
$$=(a+5)\,(a+3).$$

మాదిరి నెం. (30) $a^2+5a-14$ ని విభజింపుము.

దీనిలో మొదటి, చివర పదముల గుణకముల లబ్ధము $+1\times-14$, లేక -14. మొత్తము $+5$ ను, లబ్ధము -14 ను గల రెండు సంఖ్యలను ఊహింపుము. అవి ఏవియన, $+7$, -2 లు. ఏలయన వీటి మొత్తము కోరినట్లు, $+5$, వీటి లబ్ధము -14.

$$\therefore a^2+5a-14=a^2+7a-2a-14.$$
$$=a\,(a+7)-2\,(a+7).$$
$$=(a+7)\,(a-2).$$

మాదిరి నెం. (31) $a^2-18a+80$ ని అవయవములలోనికి విభజింపుము.

దీనిలో మొదటి, చివర పదముల గుణకముల లబ్ధము $=+80$. మొత్తము -18 యు, లబ్ధము $+80$ యు గల రెండు సంఖ్యలను ఊహింపుము. అవి -10, -8 లు. ఏలయన వీటి మొత్తము కోరినట్లు, -18, వీటి లబ్ధము 80.

$$\therefore a^2-18a+80=a^2-10a-8a+80.$$
$$=a\,(a-10)-8\,(a-10).$$
$$=(a-10)\,(a-8).$$

మాదిరి నెం. (32) $a^2-18a-40$ ని విభజింపుము.

మొదటి చివర పదముల గుణకముల లబ్ధము $=-40$. కాబట్టి, మొత్తము -18 యు, లబ్ధము -40 యు గల రెండు సంఖ్యలను ఊహింపుము. అవి యేవియన, -20, 2 లు. ఏలయన, వీటి మొత్తము -18, లబ్ధము -40.

$$\therefore a^2-18a-40=a^2-20a+2a-40.$$
$$=a\,(a-20)+2\,(a-20).$$
$$=(a-20)\,(a+2).$$

మాదిరి నెం. (33) $3a^2+14a+8$ ని విభజింపుము.

దీనిలో మొదటి, చివర పదముల గుణకముల లబ్ధము $+24$. మొత్తము 14 ను, లబ్ధము 24 ను గల సంఖ్యలు 12, 2 లు. ఏమంటే, $12+2=14$, $12\times2=24$.

$$\therefore 3a^2+14a+8=3a^2+12a+2a+8.$$
$$=3a\,(a+4)+2\,(a+4).$$
$$=(a+4)\,(3a+2).$$

మాదిరి నెం. (34) $6x^2-15x+9$ ని విభజింపుము.

$6\times9=54$. మొత్తము -15 ను, లబ్ధము 54 ను గల సంఖ్యలు -9, -6 లు. ఏమంటే, $(-9)+(-6)=-15$, $(-9)\times(-6)=54$.

$$\therefore\ 6x^2-15x+9=6x^2-9x-6x+9.$$
$$=3x(2x-3)-3(2x-3).$$
$$=3(2x-3)(x-1).$$

షరా.—3 అను అవయవమును ప్రథమముననే కేటాయించవచ్చును. ఇట్లు:—

$$6x^2-15x+9=3(2x^2-5x+3).$$

పిదప, $2x^2-5x+3$ ని $(2x-3)$, $(x-1)$ ల లోనికి విభజింపవచ్చును.

మాదిరి నెం. (35) $14x^2-17x+5$ ని విభజింపుము.

దీనిలో $14\times5=70$. కాబట్టి, మొత్తము -17 ను, లబ్ధము 70 యు గల రెండు సంఖ్యలను ఊహింపుము. అవి -10, -7 లు.

$$\therefore\ 14x^2-17x+5=14x^2-10x-7x+5.$$
$$=2x(7x-5)-1(7x-5).$$
$$=(7x-5)(2x-1).$$

మాదిరి నెం. (36) $5x^2+4x-64$ ని విభజింపుము.

ఇక్కడ $5\times-64=-320$. కాబట్టి, మొత్తము $+4$ ను, లబ్ధము -320 యు గల రెండు సంఖ్యలను ఊహింపుము. అవి $+20$, -16 లు.

$$\therefore\ 5x^2+4x-64=5x^2+20x-16x-64.$$
$$=5x(x+4)-16(x+4).$$
$$=(x+4)(5x-16).$$

మాదిరి నెం. (37) $9x^2-54x+17$ ని విభజింపుము.

$9\times17=153$. మొత్తము -54 ను, లబ్ధము $+153$ ను గల రెండు సంఖ్యలను ఏవియన -51, -3 లు.

$$\therefore\ 9x^2-54x+17=9x^2-51x-3x+17.$$
$$=3x(3x-17)-1(3x-17).$$
$$=(3x-17)(3x-1).$$

అభ్యాసము 19 (E)

ఇవి విభజింపుము:—

1.	x^2+5x+4.	34.	$x^2-30x+144$.
2.	x^2+4x+4.	35.	$l^2-18l-144$.
3.	$x^2+8x+12$.	36.	$k^2+18k-144$.
4.	$x^2+7x+12$.	37.	$d^2+19d+84$.
5.	$x^2+13x+12$.	38.	$h^2-19h+84$.
6.	x^2-5x+4.	39.	$a^2b^2-5ab-84$.
7.	x^2-4x+4.	40.	$c^2d^2+5cd-84$.
8.	$x^2-8x+12$.	41.	$y^2+25yz+84z^2$.
9.	$x^2-7x+12$.	42.	$y^2-25yz+84z^2$.
10.	$x^2-13x+12$.	43.	$b^2-17b-84$.
11.	$a^2+20a+96$.	44.	$m^2+17m-84$.
12.	$a^2+20a+91$.	45.	$2x^2+5x+3$.
13.	$a^2+20a+99$.	46.	$3a^2+8a+4$.
14.	$a^2+20a+75$.	47.	$4k^2+11k+6$.
15.	$a^2+20a+51$.	48.	$5m^2+18m+9$.
16.	$a^2-20a+96$.	49.	$6y^2+65y+31$.
17.	$a^2-20a+91$.	50.	$7m^2+55m+42$.
18.	$a^2-20a+99$.	51.	$8p^2+94p+23$.
19.	$a^2-20a+75$.	52.	$10z^2+37z+21$.
20.	$a^2-20a+51$.	53.	$11x^2-124x+33$
21.	$x^2+22x+105$.	54.	$12l^2-37l+28$.
22.	$x^2-22x+105$.	55.	$13m^2-32m+12$.
23.	$x^2+8x-105$.	56.	$13n^2-38n+24$.
24.	$x^2-8x-105$.	57.	$2x^2-10x+12$.
25.	$x^2+34x+120$.	58.	$3y^2-20y+32$.
26	$x^2-34x+120$.	59.	$6z^2-103z+50$.
27.	$x^2+26x+120$.	60.	$9m^2-34m+21$.
28.	$x^2-26x+120$.	61.	$6k^2-19kl-11l^2$.
29.	$x^2+23x+120$.	62.	$12m^2-40m-23$.
30	$x^2-23x+120$.	63.	$7a^2b^2-11ab-6$.
31.	$x^2+7x-120$.	64.	$12p^2+71pq-25q^2$.
32.	$x^2-7x-120$.	65.	$9a^2+23a-12$.
33.	$a^2-30a+144$.	66.	$100y^2z^2+4yz-23$.

85. అవయవ విభజన సాహాయ్యమున వర్గసామ్యములను సాధించుట.

ఒక సామ్యములోని అవ్యక్తరాశియొక్క మహత్తమఘాతము రెండు అగునపుడు ఆ సామ్యమును "వర్గసామ్యము" అందురు. ఉదా., x^2-3x

$+2=0$ అనునది ఒక వర్గసామ్యము. దానిలోని అవ్యక్తరాశి x. వర్గసామ్యమును సాధించుట అనగా, x నకు ఏ విలువలు ఆదేశించినచో సామ్యముయొక్క రెండు పక్షములును సమములగునో, ఆ విలువలను కట్టుట.

మాదిరి నెం. (38) $x^2-3x+2=0$ ని సాధింపుము.

ప్రశ్నకు అర్థమేమన, x యొక్క ఏ విలువలకు x^2-3x+2 అనునది 0 అగును? అని. అవయవ విభజనపద్ధతిని, x^2-3x+2 యొక్క అవయవములు $(x-1)$, $(x-2)$ లు.

$$\therefore\ x^2-3x+2=(x-1)(x-2).$$

x యొక్క ఏ విలువలు $(x-1)(x-2)=0$ చేయును!

$(x-1)$, $(x-2)$ ల లబ్ధము శూన్యమగుటకు వాటిలో ఒక అవయవము శూన్యముకావలయును.

$\therefore\ x-1$ శూన్యముకావచ్చు. అనగా, $x-1=0$. $\therefore\ x=1$.

లేక $x-2$ శూన్యముకావచ్చు. అనగా, $x-2=0$. $\therefore\ x=2$.

$\therefore\ x=1$ గాని, 2 గాని (ఫలితము).

ఋజువు. x^2-3x+2 అను సమాసములో $x=1$ వేయుము. అది ఏమగునన,

$$1^2-3\cdot1+2=1-3+2=0.$$

పిదప, $x=2$ వేయుము. అది ఏమగునన, $2^2-3\cdot2+2=4-3\cdot2+2=0$. కాబట్టి, ఈ రెండు విలువలకును సామ్యము సార్థకమగును.

మాదిరి నెం. (39) $3x^2-17x+10=0$ ని సాధింపుము.

$3x^2-17x+10$ యొక్క అవయవములు: $(3x-2)$, $(x-5)$ లు.

$3x^2-17x+10$ అనగా, $(3x-2)(x-5)=0$.

$\therefore\ 3x-2=0$ లేక $x-5=0$.

$\therefore\ x=\frac{2}{3}$ లేక 5.

ఋజువు. $3\cdot(\frac{2}{3})^2-17\cdot(\frac{2}{3})+10=\frac{3\times4}{9}-\frac{34}{3}+10=\frac{4}{3}-\frac{34}{3}+10=0.$

పైగా, $3\cdot5^2-17\cdot5+10=75-85+10=0$.

కాబట్టి, సాధింపబడిన x యొక్క విలువలు (వాటినే సామ్యముయొక్క "మూలములు" అందురు), సరి.

అభ్యాసము 19 (F)

ఈ క్రింది వర్గసామ్యములను సాధింపుము:—

1.	$x^2-23x+126=0$.	7.	$x^2+4x-96=0$.
2.	$x^2-9x+20=0$.	8.	$x^4-25x^2+144=0$.
3.	$3x^2-14x+8=0$.	9.	$18x^2+9x-2=0$.
4.	$6x^2-5x+1=0$.	10.	$x^2+x-72=0$.
5.	$4x^2-8x+3=0$.	11.	$x^2-x-132=0$.
6.	$12x^2-5x-2=0$.	12.	$13x^2-6x-7=0$.

13. ఒక సంఖ్యను కేవలము దాని పైదియగు సంఖ్యచే గుణించినచో, లబ్ధము 72. ఆ సంఖ్య ఏది? (ఒక సామ్యము నిర్మించి, దానిని సాధింపుము ఈ దిగువ ప్రశ్నలలో కూడ, అనగా 14 నుండి 18 ఆఖరికి, అదేవిధమున చేయుము).

14. ఒకానొక సంఖ్యను కేవలము దాని క్రిందిదియగు సంఖ్యచే గుణించినచో, లబ్ధము 90. ఆ సంఖ్య ఏది?

15. ఒక సంఖ్య కలదు దానిని 3 చే గుణింపగా వచ్చినదానికి 2 ను కలిపిన మొత్తమును, ఆ సంఖ్యనే 5 చే గుణింపగా వచ్చినదానిలో 3 ను తీసివేసిన శేషముచే గుణింపగా లబ్ధము 238. ఆ సంఖ్య కట్టుము.

16. ఒక తండ్రికి ఇద్దరు కొడుకులు. అతడు పెద్దవానికి n రూపాయలును, చిన్నవానికి n^2 రూపాయలును ఇచ్చెను. ఇద్దరికిని కలిపి ఇచ్చినది 110 రూ. అయినచో, ఎవనికెంత ఇచ్చెను?

17. ఒక గొల్లవాడు, మేక 1-కి $(n+2)$ రూపాయలచొప్పున n మేకలను 48 రూపాయలకు కొనెను. అతడు కొన్నవెన్ని?

18. ఒక గది పొడుగు $(n+3)$ అడుగులు, వెడల్పు n అడుగులు. దాని భూఫలము 270 చ. అ. దాని కొలతలు కట్టుము.

19. $(x+4)(x+1)\equiv x^2+5x+4$. ఈ సర్వథాసామ్యములో $x=10$ వేయుము. ఫలితమునుబట్టి నీకేమి బోధపడినది?

20. పై నియమప్రకారము, ఈ క్రింది సంఖ్యలకు కారణాంకములు కట్టుము:—

(a) 165, (b) 143, (c) 156, (d) 187, (e) 276, (f) 651, (g) 372, (h) 891.

21. 782 ను కారణాంకములలోనికి విభజించుటకు, $7x^2+8x+2$ ను విభజింపవచ్చునేమో చూడుము; వీలులేనిచో, $7x^2+8x+2$ ని $6x^2+$

$18x+2$ గా మార్చి వ్రాసికొనుము. (ఎలయన, $x^2=10x$; x అనగా 10 గనుక) అప్పుడు దానిని విభజింపుము. ఇప్పుడును వీలులేనిచో $6x^2+18x+2$ ని $6x^2+17x+12$ గా మార్చి వ్రాసి ($\because x=10$) అప్పుడు 782 యొక్క కారణాంకములు కట్టుము.

22. అట్లే (*a*) 552, (*b*) 1376, (*c*) 736, (*d*) 575 ల కారణాంకములు కట్టుము.

23. $1485\times2684=3985740$ అని తెలిసి, (*a*) 1486×2686, (*b*) 1484×2683, (*c*) 1487×2682, (*d*) 1484×2688 లను కట్టుము.

24. $999999999999=142857\times7000007$, అని తెలిసి, 142853×7000009 యొక్క విలువ కట్టుము.

25. కేవల గుణకారముల కాకుండ $1\cdot998\times1\cdot008$ యొక్క విలువ కట్టుము. దానినిబట్టి $1\cdot996\times1\cdot004$ యొక్క విలువ ఊహింపుము.

విషయానుసారము అమర్చియున్న రకరకాల ప్రశ్నలు.

1-వ శాఖ.—రాబడిపన్ను.

1. మనిషికి రాబడి 2,000 రూ. కు తగ్గి ఉండునపుడు, రాబడిపన్ను ఉండదు. కాని, మొత్తము రాబడి 2,000 రూ. గాని పైనగాని ఉండి 5,000 రూ. కు మించని పక్షమున, రూపాయకు 5 పైసలు పన్ను. ఒక ఉద్యోగియొక్క జీతపు క్రమము 150 రూ.—15—225. అతనికి 1924-వ సం॥ జనవరి నెలలో జీతము 150 రూ. అతని జీతము సాలీనా, పై క్రమమున హెచ్చినచో, అతడు 1926, 1929-వ సంవత్సరములలో ఎంత పన్ను కట్టెను?

2. ఒకానొకని స్థూలాదాయము సాలుకి 5,000 రూ. దానిలో ఒక భాగమునకు పన్ను లేదు, తక్కిన భాగముమీద రూపాయలకు అర్ధణాలు పన్ను. ఈ పన్ను రూ. 93—12—0. పన్నులేని భాగమెంత? రూపాయ 1-కి $\frac{3}{4}$ అణా చొప్పున దానిమీద పన్నెంత?

3. A, B లకు భూములమీద శిస్తులు, క్రమమున 10,000 రూ., 12,500 రూ. ను. ఇరువురకును కూడ రాబడులలో కొంత కొంత భాగములమీద పన్ను లేను. ఉన్న భాగములమీద, క్రమమున, రూపాయకు 6 పైసలు, 9 పైసలును పన్ను. పన్ను మొత్తములు, క్రమమున, 250 రూ., రూ. 468—12—0 ను. వారి రాబడులలో ఎంతెంతమీద పన్ను లేదు?

4. రూపాయకు 6 పైసలు పన్ను ప్పటికంటె, 4 పైసలైనప్పుడు ఒకడు రూ. 20—13—4 తక్కువగ పన్ను కట్టవచ్చును. అతని రాబడి కట్టుము.

5. ఒకని రాబడిమీద పన్ను రూపాయకు 4 పైసలుండెడిది, 8 పైసలు చేసినచో, అతడు రూ. 39—1—0 ఎక్కువగ చెల్లింపవలెను. అతని రాబడి కట్టుము.

6. ఒకని రాబడిలో సగముమీద రూపాయకు 6 పైసలును, తక్కిన సగముమీద రూపాయకు 9 పైసలును పన్ను. చెల్లించిన పన్ను మొత్తము రూ. 159—4—0. అతని రాబడి ఎంత?

7. ఒకడు తన రాబడిమీద రూపాయకు అణాలు రాబడిపన్ను కట్టి, మిగతలో ఒక భాగము ఇనాగపన్నులు కట్టగా, అతనికి రూ. 9,281—4—0 చేతిలో నుండెను. అతని స్థూలాదాయము ఎంత?

8. ఒకని స్థూలాదాయము 1,991 రూ. అతనికి పన్ను బాధ లేదు. మరియొకని ఆదాయము 2,000 రూ. కు మించియుండుటచే, అతడు రూపాయకు 5 పైసలు పన్ను చెల్లింపవలెను. పన్ను కట్టిన తరువాత, అతడు మునుపటివానితో తులతూగవలెనన్న, అతని స్థూలాదాయము 2,000 రూ. ను ఎంత మించవలెను?

9. స్థూలాదాయము 5,000 రూ. కు పైబడి 10,000 రూ. కు తగ్గి ఉండునప్పుడు పన్ను రూపాయకు 6 పైసలు. అది 10,000 రూ. గాని అంతకు పైనగాని ఉండి 20,000 రూ. కు తగ్గి ఉండునప్పుడు పన్ను రూపాయకు 9 పైసలు. ఇద్దరి స్థూలాదాయములు క్రమముగ 8,000 రూ., 12,000 రూ. ను. వారి నికరాదాయముల నిష్పత్తి కట్టుము.

10. 9-వ ప్రశ్నలోని రేట్లచొప్పున, ఒకని స్థూలాదాయము 9,920 రూ. ఇతడు తన పన్ను చెల్లించినపిదపను, 10,000 రూ. కు పై ఆదాయముగల మరియొకడు వాని పన్ను చెల్లించుకొనినపిదపను, ఇద్దరును తుల్యధనులు. ఆ మరియొకని స్థూలాదాయము కట్టుము.

11. అయిదువేల పదివేల సంగున నున్న ఒకని స్థూలాదాయము x రూపాయలు, పదివేల ఇరువైవేల సంగున నున్న మరియొకని స్థూలాదాయము y రూపాయలు. వారి నికరాదాయములు సమములైనప్పుడు, x, y లను బంధించు సామ్యము కట్టుము. x యొక్క ఏ విలువకు, y అధమము?

12. A, B లలో ఒకొక్కని స్థూలాదాయము, సాలునకు అయిదువేల పదివేల సంగున నుండుటచే, పన్ను రూపాయకు 6 పైసలు. వారి నికరా

దాయముల నిష్పత్తి 3 : 4. రెండు ఆదాయములును ఒకరివే అయినచో, రూపాయకు 9 పైసలు పన్నుండును, నికరాదాయము రూ. 13,343—12—0 ఉండును. A, B ల ఆదాయములు, క్రమమున ఎంతెంత?

13. ఒక హిందూ సమిష్టి కుటుంబముయొక్క సాలు రాబడి 40,000 రూ., రూపాయకు అణాన్నర పన్ను. ఆ కుటుంబములోని 10 మంది అన్నదమ్ములును వేర్లుపడి సమముగ పంచుకొనగా తలాక 4,000 రూ. రాబడియు వచ్చెను. రాబడి 4,000 రూ. అయినప్పుడు రూపాయకు 5 పైసలు పన్ను. పన్ను చెల్లించుకొనుట విషయములో వారు వేర్లుపడుట నయమా, కాదా? ఏమాత్రము?

14. ఒకడు మొదటి అరసాలులో పౌను 1-కి 4 పె. చొప్పునను, రెండవ అరసాలులో పౌను 1-కి 3 పె. చొప్పునను, పన్ను చెల్లింపగా, రెండవ అరసాలులో అతని రాబడి వృద్ధియగుటచే, అతడు మొదటిమాటు మొత్తము ఎంత చెల్లించెనో రెండవ మాటును అంతే చెల్లించినట్లు తేలెను. అతని స్థూలాదాయము సాలుకి 700 పౌ. అయినచో, నికరాదాయము కట్టుము.

15. ఒకడు మొదటి అరసాలులో పౌను 1-కి 5 పె. చొప్పునను, రెండవ అరసాలులో పౌను 1-కి 7 పె. చొప్పునను, పన్ను చెల్లింపగా, రెండవ అరసాలులో అతని రాబడి క్షయమగుటచే, అతడు మొదటిమాటు మొత్తము ఎంత చెల్లించెనో రెండవమాటును అంతే చెల్లించినట్లు తేలెను. అతని స్థూలాదాయము సాలుకి 3,000 పౌ. అయినచో, నికరాదాయము కట్టుము.

16. మొదటి అరసాలులో రూపాయకు 3 పై. ను, రెండవ అరసాలులో రూపాయకు 4 పై. ను పన్నుండి, రెండు అరసాలు ఆదాయములును సమములైయుండి, సాలు నికరాదాయము 1,131 రూ. గల ఒకని సాలు స్థూలాదాయమును కట్టుము.

17. మొదటి అరసాలులో పౌను 1-కి 4 పె. ను, రెండవ అరసాలులో పౌను 1-కి 7 పె. ను పన్నుండి, రెండు అరసాలు ఆదాయములును సమములైయుండి, సాలు నికరాదాయము 4,990 పౌ. గల ఒకని సాలు స్థూలాదాయమును కట్టుము.

18. ఒక ఊరి మొత్తపు రాబడియగు p రూ. మీద వసూలుకాబడిన పన్ను a రూ. 5,000 రూ. కు లోపు రాబడులమీద రూపాయకు c పైసలు చొప్పునను, 5,000 రూ. పై వాటిమీద రూపాయకు d పైసలు చొప్పునను,

పన్నైనచో, 5,000 రూ. కు పైనుండు రాబడుల మొత్తము ఎంత? $a = 50{,}000$, $p = 10{,}00{,}000$, $c = 6$, $d = 12$ అగునప్పుడు, నీ ఫలితపు విలువ కట్టుము.

2-వ శాఖ.—కాలక్రియలు.

1. ప్రత్యేకించి A 30 రోజులలోను, ప్రత్యేకముగ B 24 రోజులలోను ఒక పనిని ముగింపగలరు. ఒంటరిగ A ప్రారంభించి చేయుచుండిన కొన్నాళ్లకు B వచ్చి తోడగుటచే, ఆ పని మొదలుపెట్టిన 15 రోజులలో ముగిసెను. A, B లు కలిసి చేసినది ఎన్నాళ్లు?

2. A, B లు ఒక పనిని, క్రమమున $7\frac{1}{2}$ రోజులలోను, 9 రోజులలోను ముగింపగలరు. వారు కలిసి మొదలుపెట్టిన $1\frac{1}{2}$ రోజులకు, B వెళ్లిపోవును. తరువాత $1\frac{2}{3}$ రోజులకు C వచ్చి A కు తోడగుటచే పని 2 రోజులలో ముగియును. ఆ పని C ఒక్కడును ఎన్నాళ్లలో చేయును?

3. A అనువాడు B కి రెట్టింపును, C కి మూడురెట్లును పనివాడు. ముగ్గురును కూడినచో ఒక పని 20 రోజులలో ముగియును. ముగ్గురును కలిసియే ప్రారంభించిరిగాని, 6 రోజుల ఆఖరున A యు, మరి 10 రోజుల ఆఖరున B యు వెళ్లిపోయిరి. ఇంక ఎన్నిరోజులకు దానిని C ముగించును?

4. కొందరు పురుషులును మరికొందరు స్త్రీలును కలిసి ఒక పనిని 40 రోజులలో ముగింతురు. పురుషులు అందరు ఆపనిమీదనున్నచో పని 24 రోజులలోనే ముగియును. ప్రత్యేకము ఆ స్త్రీలు ఆ పనిని ఎన్నాళ్లలో ముగింపగలరు?

5. 30 రోజులలో ముగియవలసిన ఒక పనిమీద 18 మంది మనుష్యులను పెట్టినారు. అదనముగా జనములేనిచో ఆ పని మరి 10 రోజులలోగాని కాదు. ఆ పని 6 రోజులపాటు ముందరాలే ముగియుటకు 31 గురు అదనపు జనమును ఎప్పుడు పెట్టవలెను?

6. 20 రోజులలో ముగియవలసిన ఒక పనిమీద 27 మంది మనుష్యులను పెట్టినారు. అదనముగా జనములేనిచో ఆ పని $29\frac{1}{3}$ రోజులలోగాని కాదు. ఆ పని 4 రోజులపాటు ముందరాలే ముగియుటకు 54 గురు అదనపు జనమును ఎప్పుడు పెట్టవలెను?

7. 24 గురు ఒక పనిని కొన్నాళ్లలో చేయగలరు. అందులో పది మంది తగ్గినచో ఆ పని మరి 6 రోజులు పట్టును. 21 మందికి ఆ పని ఎన్నాళ్లు పట్టును?

8. కొందరు ఒక పనిని 24 రోజులలో ముగింతురు. అందులో, 8 మంది తగ్గినచో ఆ పని మరి 8 రోజులు పట్టును. మంది ఎందరు?

9. రెండు పోతమరలు ఒక తొట్టెను క్రమముగ, 20 నిమిషముల లోను, 24 నిమిషములలోను—తీతమర మూసి ఉంచినపుడు—నింపగలవు. తీతమర తీసి ఉంచినపుడు అవి రెండును తొట్టెను కలిసి నింపుటకు 30 నిమిషములు పట్టును. తొట్టె భర్తీగానున్నపుడు, పోతమరలను కట్టేసినచో, తీతమర తొట్టెను ఎంతట్లో ఖాళీచేయును?

10. ఒక పనిని, A 10 రోజులలోను, B 40 రోజులలోను వేర్వేరుగ ముగింపగలరు. C తోడైనచో వారు కలిసి ఆ పనిని 4 రోజులలోనే ముగింతురు. ప్రత్యేకముగ C దానిని ఎన్నాళ్లలో ముగించును?

11. ఒక పనిని రూ. 97—8—0 కు చేయుటకు A, B, C లను పెట్టినారు. ప్రత్యేకించి A 4 రోజులలోను, B 6 రోజులలోను, C 8 రోజుల లోను ఆ పనిని చేయగలరు. ముగ్గురును కలిసి దానిని ముగించినచో, సొమ్ము ఏట్లు పంచవలయును?

12. A, B లు కలిసి ఒక పనిని 3 రోజులలోను, A, C లు కలిసి దానినే 4 రోజులలోను, B, C లు కలిసి దానినే 6 రోజులలోను, ముగింపగలరు. అది 6 రూపాయల పని అయినచో, ఒక్కొక్క పనివాని రోజు కూలి ఎంత?

13. A, B లు కలిసి ఒక పనిని 5 రోజులలోను, B, C లు కలిసి దానినే $7\frac{1}{2}$ రోజులలోను, A, C లు కలిసి దానినే $12\frac{1}{2}$ రోజులలోను ముగింపగలరు. వారు కలిసి ప్రారంభించి 2 రోజులు చేసిన తరువాత A వెళ్లిపోగా B, C లు మాత్రము $2\frac{1}{2}$ రోజులు చేయగా, B కూడ వెళ్లిపోయెను. C ఆ పనిని ఎప్పటికి ముగించెను?

14. ఒక పనిని A ఒక్కడును $7\frac{1}{2}$ గంటలలో ముగించును. A $1\frac{1}{2}$ గంటలలో చేసినదే B 2 గంటలలో చేయును, B $2\frac{1}{2}$ గంటలలో చేసినదే C 3 గంటలలో చేయును. C ఒక్కనికిని ఆ పని ఎన్నాళ్లు పట్టును?

15. ఒక పనిని A ఒక్కడును 12 గంటలలోను, B ఒక్కడును 10 గంటలలోను, C ఒక్కడును 9 గంటలలోను చేయగలరు. వారందరును కలిసి ప్రారంభించినారు. ఆ పనిలో సాంతముగనుండినది A ఒక్కడే. అంతమునకు 4 గం. 20 నిమిషముల పూర్వము B యు, 3 గంటల పూర్వము C యు తప్పుకొనిరి. ఆ పని అంతము ఎప్పుడయ్యెను?

16. A, B, C లు కలిసి ఒక పనిని 30 రోజులలో చేయగలరు. మొదలు పెట్టి, వారు 5 రోజులు చేసినపిదప, A వెళ్లిపోగా B, C లు మాత్రము, యథాప్రకారము 10 రోజులు చేసిరి. అప్పుడు B వెళ్లిపోగా, C యథా ప్రకారముకంటె రోజునకు $\frac{1}{3}$ ఎక్కువ పనిచేసి మిగత పనిని 48 రోజులలో ముగించెను. యథాప్రకారము చేసినచో ఆ పని C కి 111 రోజులు పట్టును. B ఒక్కనికిని ఆ పని ఎన్నాళ్లు పట్టును?

17. A యొక్క పని రేటునకు B యొక్క పని రేటు 3 : 2. B రేటునకు C యొక్క రేటు 5 : 4. C రేటునకు D రేటు 7 : 6. 165 గంటలలో A ఒక్కడును చేయగల పనిని వారందరును కలిసి ఎన్ని గంటలలో ముగింతురు?

18. B $2\frac{1}{4}$ రోజులలో చేసినదే A $1\frac{1}{2}$ రోజులలోను, C 4 రోజులలో చేసినదే B 3 రోజులలోను, D 4 రోజులలో చేసినదే C 5 రోజులలోను చేయుదురు. A కి 24 గంటలు పట్టెడి పనిని D ఎన్ని గంటలలో ముగించును?

19. A, B, C లు ఒకరి తరువాత ఒకరు కొన్నిసి సమదినముల చొప్పున పనిచేయుటకు అప్పుకొనినారు. వాళ్ల పని రేటుల నిష్పత్తి 3 : 2 : 1. వారు 210 రూ. పని చేసినచో, సొమ్ము ఎట్లు పంచిపెట్టవలెను?

20. A, C లు ఒక పనిని 10 రోజులలోను; B, D లు దానినే $12\frac{1}{2}$ రోజులలోను; A, D లు దానినే 15 రోజులలోను ముగింపగలరు. A $6\frac{1}{2}$ రోజులును, B 5 రోజులును, C 4 రోజులును, D $7\frac{1}{2}$ రోజులును, E 1 రోజును, క్రమముగ చేయుచువచ్చినచో పని ముగియును. దానికి 6 రెట్లు పనిని ఈ 5 గురు మనుష్యులును కలిసి ఎన్నాళ్లలో ముగింతురు?

21. గడ్డికోతలో, $2\frac{1}{2}$ రోజులలో A $4\frac{1}{4}$ పోలములను, $2\frac{3}{4}$ రోజులలో B $7\frac{4}{7}$ పోలములను, $3\frac{1}{2}$ రోజులలో C $8\frac{3}{4}$ పోలములను కోయగలరు. A, B, C లు (a) ప్రత్యేకించియు, (b) కలిసియు కొన్ని సంపూర్ణదినములలో కోయగల గడ్డిపొలముల అధమ భూఫలములు కట్టుము.

22. 12 రోజులలో 20 మంది ఒక పనిని ముగింపగలరు. 5 రోజుల పాటు 6 గురు స్త్రీలను, మిక్కన కాలము 10 మంది స్త్రీలను తోడైనచో వారు దానిని 9 రోజులలోనే ముగింపగలరు. 28 మంది స్త్రీలు ఆ పనినే ఎంత కాలములో చేయగలరు?

23. 30 మంది పురుషులు, తాము 12 రోజులలో ముగింపగల ఒక పనిని ప్రారంభించి 4 రోజులు చేసిన తరువాత, వారిలో 18 మంది వెళ్లిపోయి

అందుకు బదులు 18 మంది స్త్రీలు వచ్చిరి. స్త్రీ పని పురుషుని పనిలో సగమైనచో, ఆ మిగిలిన పని ఎన్నాళ్లు పట్టెను?

24. ఇద్దరు పురుషులును, ముగ్గురు స్త్రీలును నలుగురు బాలురును కలిసి, ఒక పనిని 18 రోజులలోను; ముగ్గురు పురుషులును, ఇద్దరు స్త్రీలును ఒక బాలుడును కలిసి, దానినే 16 రోజులలోను ముగింపగలరు. 8 మంది పురుషులును, 8 మంది స్త్రీలును, 8 మంది బాలురును దానినే ఎన్నాళ్లలో ముగింపగలరు?

25. 4 గురు పురుషులును, 6 గురు స్త్రీలును, 8 మంది బాలురును ఒక పనిని 15 రోజులలోను; ఇద్దరు పురుషులును, 12 మంది స్త్రీలును, 10 మంది బాలురును ఆ పనినే 12 రోజులలోను ముగింపగలరు. 14 గురు పురుషులును, 48 మంది స్త్రీలును, 46 గురు బాలురును, దానికి 3$\frac{1}{16}$ రెట్ల పనిని ఎన్నాళ్లలో ముగింపగలరు?

26. ఒక ఖాళీతొట్టెను ఒక మర 20 నిమిషములలోను, రెండవది 40 నిమిషములలోను, మూడవది 60 నిమిషములలోను నింపగలవు. నిండుతొట్టెను మరియొక మర అరగంటలో ఖాళీచేయగలదు. మొదటి మూడు మరలను పగలు రెండు జాములకు విప్పి, మరియొక పావుగంటకు ఖాళీమర విప్పి ఉన్నట్టు కనిపెట్టి చప్పున దానిని కట్టేసినారు. తొట్టె ఎప్పుడు భర్తీ అగును?

27. నిమిషము 1-కి 23 గాలనుల 1 పైంటు నీటిని తెచ్చెడి ఒక మరచే 43092 గాలనుల ఘనఫలముగల ఒక తొట్టెను నింపవలెను. తొట్టెకు ఎక్కడనో చిల్లి ఉండుటవల్ల అది నిండుటకు 31$\frac{1}{2}$ గంటలు పట్టెను. సగటున గంటకు ఎంతనీరు కారిపోవుచుండెను?

28. 13 అ. పొడుగును, 5 అడుగుల వెడల్పును, 4 అ. లోతునుగల ఒక తొట్టెకు ఉన్న ఒక మర సరిగా విప్పియుండకపోవుటవల్ల, మామూలుకంటె గంటకు 54 గాలనుల నీరు తక్కువగ ప్రవహించి, 6 గంటలలో ఖాళీ అగుచుండెడి తొట్టె ఇప్పుడు ఖాళీ అగుటకు 7$\frac{1}{2}$ గంటలు పట్టినది. ఒక గాలను ఎన్ని ఘన అంగుళములకు సమానము?

29. ఒక జలకోశములోని నీటిని బయటికి వదలెడి మరయొక్క శక్తి గంటకు 100 గాలనులచొప్పున క్షీణమగుచుండెను. 3 గంటలలో ఆ జలకోశముయొక్క సగమును మరి 4 గంటలలో మిగత సగమును ఖాళీ అయ్యెను. ఆ కోశములోనున్నది ఎన్ని గాలనులు?

30. 360 ఘన అడుగుల ఘనఫలముగల ఒక తొట్టెను ఒక మర 3 గంటలలోను మరియొకటి వేరే 4 గంటలలోను ఖాళీ చేయగలవు. కన్నముయొక్క భూఫలము ఒక చదరపు అడుగుగల వేరొకగొట్టము తొట్టెలోనికి ఉన్నది. దానిద్వారా నిమిషమునకు 1 గజముచొప్పున రేటుతో నీరువచ్చి తొట్టెలో పడును. తొట్టె భర్తీగా ఉండగా, మూడిటిని ఒక్కసారి విప్పినచో, ఎంత కాలములో తొట్టె ఖాళీ అగును?

3-వ శాఖ.— కాలదూరములు.

1. A, B లు ఒకేచోట బయలుదేరి గంటకు క్రమమున, 4 మైళ్లచొప్పునను, 5 మైళ్ల చొప్పునను నడతురు. B కంటె, A రెండు గంటలు ముందు బయలుదేరెను. A ని B ఎప్పుడు అందుకొనెను?

2. A, B లు ఏకకాలమున బయలుదేరి ఏకముఖముగ క్రమమున, 7$\frac{1}{2}$ మైళ్లచొప్పునను, 10 మైళ్లచొప్పునను ప్రయాణముచేసిరి. బయలుదేరిన 4 గంటలకు వారి ఎడము ఎంత? 25 మైళ్ల ఎడము వారి కెప్పుడుండును?

✗ 3. జట్కాయొక్క నడక గంటకు 6 మైళ్లు, మోటారుయొక్క నడక గంటకు 30 మైళ్లు. అవి ఏకముహూర్తమున బయలుదేరి, ఏకముహూర్తమున 192 మైళ్ల దూరమునవున్న చోటును చేరుకొనుటకు, మోటారునకు ఎన్ని మైళ్లు ముందు జట్కా ఉండవలెను?

✗ 4. 50 మైళ్లు పొడుగున్న ఒక రోడ్డుయొక్క చివరలను చెరియొకరును బయలుదేరి, ఒకరికెసి యొకరు క్రమమున, గంటకు 4 మైళ్లును, 3 మైళ్లును చొప్పున A, B లు నడచినచో, ఎంతసేపునకు వారు ఒకరికొకరు ఎదురగుదురు?

✗ 5. ఒక రోడ్డుయొక్క చివరలగు P, Q ల వద్దనుండి A, B లు బయలుదేరి, ఒకరికెసియొకరు క్రమమున గంటకు 15 మైళ్లును, 12 మైళ్లును చొప్పున నడచి, P కంటె Q కి 9 మైళ్లు చేరువయగు ఒకచోట ఎదురగుదురు. P, Q ల ఎడము కట్టుము.

6. ఒక రైలుయొక్క ఇంజను పాడగుటచే, అది మామూలు వేగములో $\frac{5}{6}$ వేగముతో నడచుటవల్ల, 5-30 గంటలకు వెళ్లవలసినది ఒక గంట ఆలస్యముగా వెళ్లినది. అది ఎప్పుడు బయలుదేరెను?

7. నేను గంటకు 1 మైలుచొప్పున ఎక్కువ నడచినచో, ప్రయాణమునకు పట్టెడికాలము మామూలులో $\frac{3}{4}$ అగును. నా వేగము కట్టుము.

8. నేను గంటకు 1 మైలుచొప్పున తక్కువ నడచినచో, ప్రయాణమునకు పట్టెడికాలము మామూలునకు $\frac{8}{9}$ అగును. నా రేటు కట్టుము.

9. మామూలునకు $\frac{3}{4}$ రేటుతో నా స్కూలునకు వెళ్లినచో నేను 15 నిమిషములు వెనుక అగుదును. మామూలునకు $\frac{8}{7}$ రేటుతో వెళ్లినచో, ఎంత ముందు అగుదును?

10. A, B లు క్రమమున, 6 గంటలలోను, 10 గంటలలోను ఒక నలయమును చుట్టిరాగలరు. వారు ఒకేచోట ఒకేసాటు బయలుదేరి ఒకేదిశను పరుగెత్తినచో, ఎంతసేపులో (ఎదురగుదురు)

11. A, B లు ఒకేచోట ఒకేమాటు బయలుదేరి 35 మైళ్ల పరిధిలో క్రమమున, గంటకు 4 మైళ్లును, 5 మైళ్లునుచొప్పున పరుగెత్తుదురు. వారు (a) ఏకముఖముగ (b) ప్రతిముఖముగను, బయలుదేరునప్పుడు ఎంతెంతసేపులో ఒక చోట ఉందురు?

12. A, B ల రేట్లు 7 : 5. A కంటె B 88 గజములు ముందున్నాడు. A, B లు గమ్యస్థానమును ఏకకాలమున చేరుకోవలెనన్న, అది ఎంత దూరముండవలయును?

13. A, B లు మైలుపందెము పరుగెత్తిరి. B అనువాడు A కంటె 20 సెకనులు ముందుగా బయలుదేరినను 60 గజములు వెనుకబడెను. A యొక్క రేటు గంటకు 9 మైళ్లు అయినచో, B రేటు ఎంత?

14. ఒక మైలు పరుగు పందెములో B ని A 60 గజములును, C ని B 40 గజములును ముందు బయలుదేరనివ్వగలరు. మైలు పందెములోనే, C ని A ఎంత ముందు ఉండనీయగలడు?

15. ఒక అరమైలు పందెములో A కంటె B 40 గజములును, B కంటె C $27\frac{1}{2}$ గజములును వెనుకబడుదురు. వారు ముగ్గురును కూడ ఒక అరమైలు పరుగెత్తుటకు C ఎంత ముందు ఉండవలయును?

16. 100 గజముల పందెములో B ని 10 గజములును, C ని 15 గజములును, ముందున A ఉండనీయగలడు. 150 గజముల పందెములో C ని B ఎంత ముందు ఉండనీయగలడు?

17. A, B లు మైలు పందెము పరుగెత్తిరి. A అనువాడు 16 గజములు పరుగెత్తుసరికి B 11 గజములు పరుగెత్తును. గమ్యస్థానమును ఏకకాలమున చేరవలెనన్న, A కంటె B ఎంత ముందు ఉండవచ్చును?

18. ఒక పడవ ఒక నదిలో వాలునడక గంటకు 10 మైళ్లచొప్పునను, పడవవాళ్లు అదే శక్తితో తోసినను, ఎదరనడక గంటకు 4 మైళ్లచొప్పునను నడచును. ప్రవాహవేగము కట్టుము.

19. ఒక పడవ ఒక నదిలో వాలునడక మైలు 1-కి 12 నిమిషములు పట్టునట్లును, పడవవాళ్లు అదే శక్తితో తోసినను, ఎదరనడక మైలు 1-కి 20 నిమిషములు పట్టునట్లును నడచును. ప్రవాహవేగము కట్టుము.

20. ఒకనికి ఒక ప్రవాహములో $3\frac{1}{2}$ మైళ్లు వాలునడకను ఒక పడవ తోయుటకు 25 నిమిషములు పట్టును, ప్రవాహవేగముయొక్క తోడులేనిచో, అతనికి ఆ దూరమే 45 నిమిషములు పట్టును. ప్రవాహవేగము గంటకెంత? ఆ దూరమే ఎదురునడకను అతనికి ఎంతసేపు పట్టును?

21. ఒక గడియారపు ముల్లు రెండును 12 గంటలకు కలిసి ఉన్నవి. మరల ఎన్ని నిమిషములలో ఒకదానిపై నొకటి ఉండును?

22. పండ్రెండుగంటల తరువాత ఎంతసేపటికి ఒక గడియారపు రెండు ముల్లును (a) సమకోణికముగను, (b) ఏకరేఖలోను, (c) మరల సమకోణికముగను ఉండును?

23. ఒకడు ఇల్లు వదలి, గంటకు $3\frac{1}{2}$ మైళ్లు రేటుతో ఒక ఊరికి వెళ్లి, అచ్చట ఒక గంటతాళి, గంటకు $7\frac{1}{2}$ మైళ్లు రేటుతో తిరిగివచ్చి, ఇల్లు చేరెను. ఇది మొత్తము 5 గంటల 40 నిమిషములు పట్టినచో, అతడు ఎంత నడచెను?

24. ఒకడు ఒక కోటికి నడచి, తిరుగులో గుఱ్ఱమెక్కినచో అతనికి మొత్తము 4 గంటల 40 నిమిషములు పట్టును. అటును ఇటును కూడ గుఱ్ఱముపై అతనికి 2 గంటల 40 నిమిషములు పట్టును. ఇటును అటును కూడ నడచినచో, అతనికి ఎంత పట్టును?

4-వ శాఖ —లాభనష్టములు.

1. ఒక వస్తువుయొక్క అసలు ఖరీదు, అమ్మకమునకు వేసిన ఖరీదులో నూటికి 50. అయినను, రొక్కము ఇచ్చువారికి వేసిన ఖరీదులో నూటికి $12\frac{1}{2}$ తగ్గింపు చేయబడును. రొక్కపు పద్ధతిప్రకారము, అమ్మినవానికి నూటికెంత లాభము?

2. ఒకడు 258 రూ. పెట్టి 3 పుట్ల పంచదార కొని, పెట్టుబడిలో $\frac{1}{3}$ భాగము లాభము తీయదలచినాడు. కాని, ఈ ప్రాప్తిని 44 రూ.

విలువచేసెడి పంచదార పాడైపోయినది. పెట్టుబడిమీద నూటికి 20 లాభము తీయవలెనన్న అతడు మిగత పదార్థమును ఎట్లు అమ్మవలెను?

3. ఒకడు పౌను 1-కి 12 అ. చేసి "టీ" అమ్మి, నూటికి 20 లాభము తీసెను. ఇకమీదట నూటికి 25 లాభము తీయవలయునన్న, అతడు అమ్మకపు ఖరీదును నూటికెంత హెచ్చు చేయవలెను?

4. ఒకడు 625 రూ. కు ఒక వజ్రపుటుంగరమును కొని, నూటికి 25 లాభమునకు అమ్మెను. అతడు అమ్మకపు ఖరీదును నూటికెంత హెచ్చుచేసినచో, అతనికి నూటికి 30 లాభము వచ్చియుండెడిది? ఈ ప్రశ్నలో ఏది అనవసరము?

5. ఒకడు గాలను 1-కి 5 రూ. చేసి 120 గాలనుల సారా కొనెను. అతడు గాలను 1-కి $2\frac{1}{2}$ రూ. చేసి అమ్మి, 80 రూ. లాభము తీయుటకు సారాలో ఏమాత్రము నీరు కలపవలెను?

6. ఒకడు పౌను 1-కి రూ. 1—2—0 చేయు 15 పౌన్ల "టీ"ని, పౌను 1-కి రూ. 1—4—0 చేయు 20 పౌన్ల "టీ"ని, కలగలుపు చేసినాడు. ఆ కలగలుపును ఎంతచేసి అమ్మినచో, అతనికి పౌను 1-కి 1 అణా లాభము కిట్టును?

7. ఒకడు గాలను 1-కి 12 అ. చొప్పున 20 గాలనుల కిరసనాయిలు కొనెను. అతడు దానిలో 2 గాలనుల నీరు కలిపి అమ్మగా, అతనికి మొత్తము మీద 1 రూ. లాభమువచ్చెను. అతడు గాలను 1-కి ఎంతచేసి అమ్మెను?

8. ఒకడు రూపాయకు డజనుచొప్పున కొన్ని గుడ్లును, రూపాయకు 16 చేసి మరి అన్నిగుడ్లును కొనెను. వాటిని వీటిని కలిపి అతడు రూపాయకు 15 చేసి అమ్మినచో, అతనికి నూటికెంత లాభమో లేక నష్టమో కట్టుము.

9. ఒక పాలవాడు ఆళాకు 1-కి 1 అ. చొప్పున పాలు కొని, నీరు కలిపి, ఆళాకు 1-కి $1\frac{1}{4}$ అ. చేసి అమ్మి, నూటికి 50 చొప్పున లాభము తీసినాడు. అమ్మిన ఒకొక్క ఆళాకులో నీరెంత?

10. ఒకడు మణుగు 1-కి రూ. 3—4—0 చొప్పున కొంత జొన్న కొని, దానితో మణుగు 1-కి రూ. 3—8—0 విలువచేసెడి కొంత జొన్న కలుపగా, ఆ కలగలుపునకు మణుగు 1-కి రూ. 3—6—0 విలువ ఉండెను. ఆ కలగలుపు యొక్క నిష్పత్తి కట్టుము.

11. శేరు 1-కి 5 అ. విలువగల 80 శేర్ల కొబ్బరినూనెతో, శేరు 1-కి $3\frac{1}{2}$ అ. విలువగల నువ్వులనూనె ఎంత కలిపినచో, ఆ కలగలుపు శేరు 1-కి $4\frac{1}{2}$ అ. ఉండును?

12. ఒక వర్తకుడు కొన్ని సరకులు కొని, వాటిలో ఒక సగమును నూటికి 5 లాభమునకును, $\frac{1}{3}$ ను నూటికి $8\frac{1}{3}$ లాభమునకును, తక్కినవి నూటికి $6\frac{2}{3}$ నష్టమునకును అమ్మెను. మొత్తముమీద లాభము రూ. 44—3—6 అయినచో, సరకులు కొన్న ఖరీదు ఎంత?

13. ఒక వర్తకుడు కొన్ని సరకులు కొని, వాటిలో $\frac{1}{3}$ ను నూటికి 10 లాభమునకును, $\frac{1}{6}$ ను నూటికి 5 లాభమునకును, తక్కినవి నూటికి $2\frac{1}{2}$ నష్టమునకును అమ్మగా, మొత్తముమీద అతనికి 35 రూ. లాభము తేలెను. సరకుల అసలు ఖరీదు ఎంత?

14. ఒక వర్తకుడు కొంత గోధుమ కొని, దానిలో $\frac{1}{8}$ ను నూటికి 10 లాభము చొప్పునను, $\frac{1}{4}$ ను నూటికి 24 లాభము చొప్పునను, తక్కినది నూటికి 2 నష్టమునకును అమ్మినచో, మొత్తముమీద అతనికి నూటికెంత లాభము? అతని లాభము 2,890 రూ. అయినచో, పెట్టుబడి ఎంత?

15. ఒక పుస్తకప్రచురణుడు తన పుస్తకములను నూటికి $12\frac{1}{2}$ లాభము చొప్పున ఒక పుస్తక వర్తకునికి అమ్మగా అతడు ఒక కాతాదారునికి దానిని నూటికి 25 లాభమునకు అమ్మెను. అసలు ఖరీదుకంటె నూటికి ఎంత ఎక్కువ, కాతాదారు ఇచ్చుకొనెను?

16. నూటికి 10 లాభము చొప్పున B కి A సరకులు అమ్మెను. తనకు అయినదానిపై నూటికి 15 చూచుకొని C కి B అమ్మెను. తనకు అయిన దానిపై నూటికి $7\frac{1}{2}$ చూచుకొని వాటిని D కి C అమ్మెను. A కంటె D $32\frac{1}{2}$ రూ. ఎక్కువ పెట్టుకొనినచో, ఆ సరకుల అసలు ఖరీదు ఎంత?

17. ఒక వర్తకుడు రెండు రకముల "టీ"లను 4 : 5 నిష్పత్తిలో కలిపి, ఆ కలగలుపును పౌను 1-కి 14 అ. చేసి అమ్ముటచే నూటికి $16\frac{2}{3}$ లాభము వచ్చెను. అతడు వాటిని చెరిసగములుగా కలిపియుండినచో, ఆ కలగలుపు అతనికి పౌను 1-కి $11\frac{1}{2}$ అ. చొప్పున కిట్టి ఉండెడిది. ఒకొక్క రకము యొక్క విలువ కట్టుము.

18. ఒకడు రెండు రకముల "టీ"లను 5 : 3 నిష్పత్తిలో కలిపి, ఆ కలగలుపును పౌను 1-కి రూ. 1—0—3 చేసి అమ్ముటచే నూటికి $8\frac{1}{3}$ లాభము

వచ్చెను. అతడు వాటిని చెరిసగములుగా కలిపియుండినచో, ఆ కలగలుపు అతనికి పౌను 1-కి 15 అ. 4 పై. చొప్పున కిట్టి ఉండెడిది. ఒక్కొక్క రకము యొక్క విలువ కట్టుము.

19. ఒకడు వీసె 1-కి రూ. 1—2—0 చొప్పున కాఫీ అమ్మును. కాని, రొక్కమిచ్చువారికి అతడు నూటికి 10 తగ్గింపుచేయును. అట్లు చేసినపిదప అతనికి నూటికి 35 లాభమున్నచో, అతడు ఒక బారువ కాఫీ ఎంతకు కొనియుండును?

20. ఒకడు పౌను 1-కి $3\frac{1}{2}$ పె. చొప్పున పంచదార అమ్మును. కాని, రొక్కపు బేరమునకు అతడు నూటికి 5 తగ్గింపుచేయును. అట్లు చేసినమీదట అతనికి నూటికి $33\frac{1}{3}$ లాభమున్నచో, అతడు ఒక హండ్రడువెయిటు పంచదార ఎంతకు కొనియుండును?

21. ఒకడు తనకు నూటికి 25 లాభము వచ్చునుగదా అని నమ్మకముతో సరకులు అమ్మెను. కాని, మరల లెక్కచూచుకొనగా, తనకు అయినది అనగా కొనినదానికి నూటికి $12\frac{1}{2}$ ఎక్కువయను సంగతి తేలెను. అతనికి వచ్చిన లాభము నూటికెంత?

22. ఒక వర్తకుడు నూటికి 10 లాభముచొప్పున 40 క్వార్టర్ల బార్లి గింజలును, నూటికి 20 లాభముచొప్పున 80 క్వార్టర్లను అమ్మెను. అతడు నూటికి 15 లాభమునకు మొత్తమును అమ్మియుండినచో, అతనికి 42 రూ. నష్టమువచ్చియుండెడిది. ఒక క్వార్టరు బార్లి ఖరీదు ఎంత?

23. ఒకడు ఒక వస్తువును నూటికి 5 లాభమునకు అమ్మెను. అతడు దానిని నూటికి 5 చొప్పున ఎక్కువకు కొనియుండి, మరి 12 అణాలకు దానిని అమ్మియుండినచో, అతనికి నూటికి $12\frac{1}{2}$ లాభము వచ్చియుండెడిది. కొన్న ఖరీదు కట్టుము.

24. ఒక ఇంగ్లండు వర్తకుడు ఇద్దరికి కొన్ని సరకులు కొని, వాటి ఖరీదులో నూటికి 25 ఓడపన్ను దిగుమతి పన్నులకు చెల్లించెను. చివరకతడు ఇంగ్లండులో వాటిని అమ్మగా అతనికి నూటికి 10 నష్టము వచ్చెను. అతడు వాటిని మరి 60 పౌ. కు అమ్మియుండినచో, అతనికి నూటికి $12\frac{1}{2}$ లాభము వచ్చియుండెడిది. సరకులయొక్క అసలు ఖరీదు కట్టుము.

25. నూటికి $7\frac{1}{2}$ లాభము చూచుకొని ఒక గ్రామఫోను అమ్మినారు. దానిని నూటికి [illegible] చొప్పున తక్కువకు కొనియుండి, $8\frac{3}{4}$ రూ. తక్కువకు అమ్మియుండినచో అప్పుడు నూటికి 5 లాభము కనబడియుండెడిది. గ్రామఫోనును ఎంతకు కొనినారు?

26. బెంచీ 1-కి రూ. 2—8—0 చొప్పున 10 బెంచీలును, కుర్చీ 1-కి రూ. 4—4—0 చొప్పున 30 కుర్చీలును అమ్మగా మొత్తముమీద నూటికి $7\frac{1}{2}$ లాభము వచ్చినది. బెంచీ కొన్న ఖరీదునకును కుర్చీ కొన్న ఖరీదునకును నిష్పత్తి 1 : 2 అయినచో, ఒక్కొక్కదాని కొన్న ఖరీదు కట్టుము.

27. ఒక వడ్రపు పనివాడు 1,250 రూ. వెచ్చించి 250 కుర్చీలను చేసి, 50 కుర్చీల అమ్మకపు ఖరీదు లాభము వచ్చునట్లు వాటినన్నిటిని అమ్మివేసెను. ఒక్కొక్కటి ఎంతకు అమ్మెను?

28. ఒక సాధారణ అమ్మకములో, వస్తువులయొక్క అసలు ఖరీదులు నూటికి $12\frac{1}{2}$ తగ్గింపబడినవి. అదిగాక, రొక్కమిచ్చువారికి ఆ అసలు ఖరీదులో మరి నూటికి $7\frac{1}{2}$ తగ్గింపబడును. ఇట్లు చేసినమీదట ఆ వర్తకుని లాభము నూటికి 20 అయినచో, అతని మామూలు లాభము ఎంత?

29. 1,000 రూ. ను, కొన్ని మరకముల బియ్యపు విలువయు—ఈ రెండును, ఒక దేవాలయపు రాబడి. మరకము 3 రూ. అయినప్పుడు, మరకము $2\frac{1}{2}$ రూ. అయినప్పటికంటె మొత్తపు రాబడి నూటికి 4 ఎక్కువగా నుండెను. దేవాలయమునకు ఎన్ని మరకములు వచ్చుచుండెను?

30. ఒక వర్తకుడు తన సింగపూరు ఏజెంటుకి 10 బేళ్ల లుంగిబట్టలు పంపెను. అతడు ఒక్కొక్క బట్ట 4 రూ. కు అమ్మి మొత్తముమీద 6,000 రూ. లాభము చేసెను. అతడు ఒక్కొక్క బట్ట రూ. 3—8—0 కు అమ్మియుండినచో, అప్పుడైనను 4,000 రూ. లాభము వచ్చియుండెడిది. ఒక్కొక్క బేలులో నున్నవి ఎన్ని లుంగీలు? ఒక్కొక్క లుంగీయొక్క అసలు ఖరీదు ఎంత?

[illegible] శాఖ.—త్రిభుజరచన, ప్రమాణాత్మకరచన.

1. శీర్షకోణము ఒక నిర్దిష్టకోణమగునట్లును, భూమి 5 సెం.మీ. అగునట్లును, ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజమును, కోణమితినుపయోగించకుండ, రచింపుము.

2. $a = 4$ అం., $b = 3\cdot2$ అం., $\angle A = 60°$ గాగల ఒక త్రిభుజమును రచింపుము. మూడవ భుజమును మిక్కిన కోణములను కొలువుము.

3. $\angle A = 45°$, $\angle B = 65°$, $a = 7\cdot2$ సెం.మీ. గాగల ఒక త్రిభుజమును రచింపుము

4. $\angle C = 72^\circ$, $\angle A = 35^\circ$, $c = 5\cdot2$ సెం.మీ. నుగల ఒక త్రిభుజమును రచింపుము.

5. ఒక భుజము $= 3$ సెం.మీ., కర్ణము $= 5$ సెం.మీ. నుగల ఒక సమకోణ త్రిభుజమును రచించి, తక్కిన భుజమును కొలువుము.

6. సమకోణమునుచేయు భుజములు క్రమమున, 12 సెం మీ., 16 సెం. మీ. అని తెలిసి ఒక సమకోణాత్మక త్రిభుజమును రచింపుము. మూడు మూలలనుండియు సమదూరముననున్న బిందువును నిర్ణయింపుము.

7. $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 75^\circ$, $c = 6\cdot5$ సెం.మీ. నుగల ఒక త్రిభుజమును రచింపుము. భుజములకు సమదూరముననున్న బిందువును నిర్ణయింపుము.

8. $a = 6\cdot2$ సెం.మీ., $b = 5\cdot4$ సెం.మీ., $\angle B = 38^\circ$ ను అని తెలిసి, ABC అను ఒక అధికకోణాత్మక త్రిభుజమును రచింపుము. అది, 1 ఫర్లాంగునకు 1 సెం.మీ. ప్రమాణములో ఒక పొలముయొక్క చిహ్నమైనచో, పొలముయొక్క భూఫలమును ఎకరములలో కట్టుము.

9. $a = 2\cdot6$ అం., $\angle B = 40^\circ$, $b = 2$ అం. నుగల ABC అను త్రిభుజమును రచింపుము. ఈ షరతులను పాటించెడి త్రిభుజము లెన్ని గలవు? అవి ఏ తరహాల త్రిభుజములు?

10. ABC అను సమద్విబాహు త్రిభుజములను ఈ క్రింది షరతులతో రచింపుము:—

(*a*) $AB = AC$, $BC = 6$ సెం.మీ., $\angle A = 72^\circ$.

(*b*) $AB = AC$, $AB = 2$ అం., $\angle A = 48^\circ$.

11. సమరేఖయగు ఒక నదిగట్టున A, B అనునవి 600 గజముల ఎడముననున్న రెండు బిందువులు. C అనునది అవతలగట్టున ఒక బిందువు. $\angle CBA = 45^\circ$, $\angle CAB = 78^\circ$. రచించి కొలిచి, నది వెడల్పు కట్టుము.

12. ABC అనునది ఒక తోట. AB అను దిశ పడమర, BC అనునది ఈశాన్యము. AB, AC లు క్రమమున 70 గజములును, 180 గజములును పొడుగు. క్షేత్రరచనమూలమున తోటయొక్క భూఫలము కట్టుము.

13. ABC అనునది ఒక తోట. AB అను దిశ ఉత్తరము, AC అనునది ఈశాన్యము. AB, AC లు క్రమమున 120 గజములును, 160 గజములును పొడుగు. ప్లానుగీసి, తోటయొక్క భూఫలము కట్టుము.

6-వ శాఖ.—ఉన్న తాంశములమీదను, దూరముల మీదను యుక్తిప్రశ్నలు.

1. B కి 50 మైళ్లు తూర్పున A ఉన్నది. A కి ఆగ్నేయముగ 40 మైళ్లలో C ఉన్నది. B నుండి C యొక్క దూరమును, వాలును కట్టుము. (ప్రమాణము 1 అం : 10 మైళ్లు).

2. O అను బిందువునకు 45 మైళ్లు దక్షిణముగా R ఉన్నది. O అనుదానికే 25 మైళ్లు దక్షిణమునకు 30° పడమట P ఉన్నది. R, P ల దూరము కట్టుము. (ప్రమాణము 1 అం : 10 మైళ్లు).

3. రెండు ఓడల ఎడము 4·5 మైళ్లు. వాటిలో ఒకటి రెండవదానికి కేవలమును తూర్పు. ఒక ఓడనుండి ఒక కోట ఆగ్నేయమున కనపడుచుండెను. అప్పుడే రెండవ ఓడనుండి ఆ కోట నైరృతిమూలగా కనపడుచుండెను. ఒకొక్క ఓడనుండి కోట ఎంత దూరమున నున్నది?

4. C, D అను దేవాలయముల ఎడము 1,000 గజములు. A అను బిందువునకు కేవల దక్షిణమున D యు, A అనుదానికి ఆగ్నేయముగ 800 గ. దూరమున C యు ఉన్నవి. ఒకడు D నుండి కేవల పశ్చిమమునకు 30 నిమిషములు నడవగా, A యొక్క వాలు ఉత్తరమునకు 60° తూర్పు అని గ్రహించెను. అతడు ఎంత నడచెను?

5. ప్రధాన ఘంటాపథమగు ఒక రోడ్డుమీద P, Q, R అను మూడు వరుస మైలురాళ్లు ఉన్నవి. ఒక నుయ్యి P అను బిందువునుండి $1\frac{1}{2}$ మైళ్లును, R నుండి $1\frac{1}{4}$ మైళ్లును దూరము. Q నుండి ఆ నూతికి ఎంత దూరము?

6. ఒక తిన్నటి కంచెనుండి 25 అ. దూరముననున్న ఒకచోట ఒక మేకను కట్టియుంచినారు. అక్కడనుండి 35 అ. ఎడముగ అది సాగుటకు వీలున్నది. అది కంచెను తాకగల హద్దు బిందువుల ఎడము కట్టుము. కంచె, ఇప్పటికంటె మరి 5 అ. ఎడముగనున్నచో, అప్పుడు ఆ హద్దు బిందువుల ఎడము ఏమగును?

7. సమతలమగు ఒక భూమిపై నిటారుగా 200 అ. ఎత్తున ఒక గోపురమున్నది. సమతలముపై ఒక బిందువునుండి గోపురపు కొనయొక్క ఊర్ధ్వకోణము 72°. గోపురపు మొదలునకు ఆ బిందువుయొక్క ఎడము కట్టుము.

8. ఒక చర్చిమీదనున్న మొలికిశిఖరపు మొనయొక్క ఊర్ధ్వకోణము, చర్చి మొదలునకు 1,500 అ. ఎడముననున్న ఒక బిందువునుండి, 20°. ఆ శిఖరముయొక్క ఎత్తు కట్టుము.

9. పిట్టల వేటకాడొకడు, శిఖరమున ఒక పిట్ట వాలియున్న చెట్టునకు 40 అ. ఎడమున నిలబడియున్నాడు. చెట్టుయొక్క ఎత్తు 45 అ. న్ను, అతని భుజముయొక్క యెత్తు 5 అ. ను అయినచో, మట్టమునకు ఎంత కోణములో అతడు గురిచూడవలెను?

10. ఒక కోట తాలూకు తుపాకులు సముద్రపుమట్టమునకు 150 అ. పైననున్నవి. కోటకు 150 గ. ఎడమున శత్రువుల ఓడ ఒకటి ఉన్నది. సూటిగా ఓడను పేల్చుటకు, తుపాకులను ఎంత కోణము క్రిందికి త్రిప్పవలెను?

11. 1250 అ. ఎత్తుగల ఒక కొండయొక్క కొననున్న ఒక వేటకాడు, కొండమొదలునకు 500 గజముల దూరమున సమభూమిని ఉన్న ఒక లేడిని బాణముతో కొట్టినాడు. బాణమార్గము మట్టముతో ఎంత కోణము చేయును?

✱12. ఒక బాలభటుడు నేలపై పరుండి, P అను ఒక బిందువునుండి, తాను నేలపై నిలబెట్టిన 5 అ. 8 అం. పొడుగుగల కఱ్ఱయొక్క పై మొనను ఒక చెట్టుకొనను ఏకముగ చూడగలిగినాడు. P అను బిందువు చెట్టుమొదలునకు 32 అడుగులును, కఱ్ఱ మొదలునకు 4 అడుగులును ఎడముననున్నది. అడుగులలో చెట్టుయొక్క ఎత్తును, P నుండి చూచునపుడు దాని కొనయొక్క ఊర్ధ్వకోణమును కట్టుము.

13. ఒక గుట్టమీద ఒక బంగాళా ఉన్నది. గుట్టకు 100 అ. ఎడముననున్న ఒక బిందువునుండి బంగాళాయొక్క శిఖరపు ఊర్ధ్వకోణము 25°. అదియుగాక బంగాళాయొక్క నిలువు ఆ బిందువుకడ 10° కోణముచేయును. బంగాళా ఎత్తును, గుట్టయొక్క ఎత్తును కట్టుము.

14. ఒక గోరీకి ఒకేవైపునను దానితో ఏకరేఖయందును ఉన్న రెండు బిందువులగు A, B ల నుండి దాని కొనయొక్క ఊర్ధ్వకోణములు క్రమమున, 40°; 50°. ఆ రెండు బిందువుల ఎడమును 200 అ. అయినచో, ఆ గోరీయొక్క ఎత్తు కట్టుము.

15. పై ప్రశ్నలోని A, B లు ఆ గోరీకి చెరియొక వైపున ఉన్నచో, అప్పటి గోరీయొక్క ఎత్తు కట్టుము.

16. ఒక దేవాలయ గోపురముయొక్క పైభాగమునకు ఎనిమిది అంతస్థులున్నవి. ఒకొక్క అంతస్థుయొక్క ఎత్తు 25 అ., మొదటి అంతస్థుయొక్క నేల భూమిమట్టమునకు 50 అ. ఎత్తున ఉన్నది. గుడి ఎదుటనున్న రథము

యొక్క శిఖరమును రెండవ అంతస్థు కొననుండియు, ఎనిమిదవ అంతస్థు కొననుండియు చూచినచో నిమ్నకోణములు క్రమమున, 10°; 35°. రథము గుడికి ఎంత ఎడము? అది ఎంత ఎత్తు?

17. 100 అ. ఎత్తుగల ఒక ఓడస్తంభపు కొననుండి, ఒక జలమార్గసూచియొక్క నిమ్నకోణము 32°. ఓడయొక్క పై అంతస్థునుండి దాని నిమ్నకోణము 6°. మార్గసూచి ఓడకు ఎంత ఎడముననున్నది?

18. రైలుపట్టాలకు ఒక స్టేషను ఉన్నవైపుననే ఒక రెక్కవాల్చెడి స్తంభమున్నది. ఒకడు ప్లాటుఫారముయొక్క ఒక చివరనుండి చూడగా ఆ స్తంభపు కొనయొక్క ఊర్ధ్వకోణము 25° ఉండెను, రెండవ చివరనుండి 50° ఉండెను. ప్లాటుఫారముయొక్క అంచు సూటిగానుండి 50 గజముల పొడుగున స్తంభమూలముతో ఏకరేఖలోనున్నది. స్తంభము ఎంత ఎత్తు?

19. భూమికి 20 అ. ఎత్తుననున్న ఒక కిటికీవద్దనుండి ఒక తాడిచెట్టు అగ్రముయొక్క ఊర్ధ్వకోణము 45°. అక్కడనుండియే ఆ చెట్టు తాలూకు మొదలుయొక్క నిమ్నకోణము 15°. అయినచో, ఆ చెట్టుయొక్క ఎత్తు కట్టుము.

✱20. 1500 గజముల ఎత్తుననున్న ఒక విమానములోని ప్రేక్షకుడు, 100 గ. ఎత్తున్న తీగలేని టెల్లిగ్రాఫు స్తంభపు కొనయొక్క నిమ్నకోణము 40° అగుట గమనించినాడు. విమానము ఒక పావు గంటపాటు నిటారుగా పైకిపోగా, అక్కడనుండి ఆ స్తంభపు కొనయొక్క నిమ్నకోణము 52° ఉండెను. విమానము పైకిలేచిన రేటు గంటకు ఎన్ని మైళ్లు?

7-వ శాఖ.—సామాన్య లేఖ్యములు (సర్వసామాన్య నియమముల ననుసరించి.)

1. $y = 3x + 4$ అగునప్పుడు, ఈ క్రిందిపట్టీ పూర్తిచేయుము:—

$x =$	0	4	6	8	−1	−2
$y =$						

x, y ల విలువలయొక్క సంగతయుగ్మములచే బిందువులను స్థాపించి, వాటిని కలుపుము.

2. ఆ రీతిగనే, ఈ క్రింది సామ్యముల లేఖ్యములను గీయుము:—

(a) $y=3x-1.$ (b) $y=4x+5.$ (c) $y=\frac{8x-2}{3}.$

(d) $y=\frac{4x+2}{5}.$

ఆ లేఖ్యములనుబట్టి:—

(a) $y=5$ అగుచో, x ను; $x=3$ అగుచో, y ని.

(b) $y=3$,, x ను; $x=4$,, y ని.

(c) $y=10$,, x ను; $x=4$,, y ని.

(d) $y=6$,, x ను; $x=12$,, y ని.

కట్టుము:—

3. 1 షి. = 12 అ. అయినచో, 50 లోపు షిల్లింగులకు తుల్యమగు ఇండియాసొమ్ము ఎంతో చూచి చెప్పుటకు వీలగు లేఖ్యమును గీయుము. దానిని బట్టి (a) 39 షిల్లింగులకు సమమగు ఇండియాసొమ్మును, (b) రూ. 12—12—0 కు తుల్యమగు ఇంగ్లీషుసొమ్మును కట్టుము.

4. ఆ రీతిగనే, ఈ క్రింది సందర్భములలో మార్పుడులేఖ్యములను గీయుము:—

(a) 2 అం.=5 సెం.మీ.; (b) 1-కి.గ్రా.=$2\frac{1}{5}$ పౌ.; (c) 1 మీ.= 40 అ.; (d) 8 కి.మీ.=5 మైళ్లు.; (e) 1 గొలుసు = 22 గజములు.; (f) 1 మణుగు = 28 పౌనులు.

(a) యొక్క లేఖ్యమునుబట్టి, 5 అంగుళములకు తుల్యమగు సెంటిమీటర్లను, 27 సెం.మీ. కు తుల్యమగు అంగుళములను కట్టుము.

(b) యొక్క లేఖ్యమునుబట్టి, 11 కి. గ్రాములకు తుల్యమగు పౌనులను, 20 పౌనులకు తుల్యమగు కి. గ్రాములను కట్టుము.

(c) యొక్క లేఖ్యమునుబట్టి, 6 అ. 7 అంగుళములకు తుల్యమగు మీటర్లను, 6·5 మీటర్లకు తుల్యమగు అంగుళములను కట్టుము.

(d) యొక్క లేఖ్యమునుబట్టి, 29 కి.మీటర్లకు తుల్యమగు మైళ్లను, $17\frac{1}{2}$ మైళ్లకు తుల్యమగు కిలోమీటర్లను కట్టుము.

(e) యొక్క లేఖ్యమునుబట్టి, 4·4 గొలుసులకు తుల్యమగు గజములను, 165 గజములకు తుల్యమగు గొలుసులను కట్టుము.

(f) యొక్క లేఖ్యమునుబట్టి, 6·3 మణుగులకు తుల్యమగు పౌనులను, 430 పౌనులకు తుల్యమగు మణుగులను కట్టుము.

5. ఈ దిగువ ఇచ్చియున్న సంబంధరాసుల విలువలయొక్క సంగత యుగ్మములనుబట్టి బిందువులను స్థాపించి లేఖ్యములను గీయుము:—

(a)

సంవత్సరము	1911	1912	1913	1914	1916	1917	1918
బ్రిటిషు ఇండియాలో సేనను గూర్చి ఖర్చు (మిలియనులలో)	19·1	19·5	19·6	19·8	21·9	24·3	25·2

లేఖ్యమునుబట్టి 1915 లో సేన ఖర్చు కట్టుము.

(b)

సంవత్సరము	1851	1861	1871	1891	1901	1911
కనడాలో జనాభా (మిలియనులలో)	1·8	3·1	3·6	4·8	5·3	7·2

లేఖ్యమునుబట్టి 1881 లో జనాభా కట్టుము.

(c)

సంవత్సరము	1913	1914	1915	1917
న్యూజీలండులో ఎకరము 1-కి గోధుమ ఉత్పత్తియొక్క సగటు (బుషెల్ అనెడి మానపు మిలియనులలో)	27·3	31·4	29·0	23·1

లేఖ్యమునుబట్టి 1916 లోని ఉత్పత్తి కట్టుము.

(d)

సంవత్సరము	1912	1913	1914	1915	1916	1917
తయారైన డాలర్ల సంఖ్య (మిలియనులలో)	17·5	25·4	53·5	24·0	18·5	1·0

(e)

	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
ఒకని క్రమ క్రమ వత్సరముల రాబడి.	25	30		45	65	80	100	110	120
వాని క్రమ క్రమ వత్సరముల ఖర్చు.	17	24	28	36		69	80	100	110

లేఖ్యమునుబట్టి, 65 రాబడిగలప్పటి ఖర్చును, 28 ఖర్చుగలప్పటి రాబడిని కట్టుము.

పునశ్చరణ పత్రములు.

మొదటి పరంపర.

I

1. 45090045 యొక్క ఉత్తమ కారణాంకములేవి? దానిని ఒక సంపూర్ణవర్గముగా మార్చుటకు అధమము ఏ పూర్ణాంకముచే గుణింపవలయును?

2. ఒకడు గజము 1-కి 2 పె. చొప్పున 500 గజముల రాగితీగ కొని, మీటరు 1-కి 30 సెంటైములచొప్పున ఫ్రాన్సులో అమ్మెను. 1 పౌ. = 25·34 ఫ్రాంకులు, 1 గజము = ·914 మీటరు, అనియు తెలిసి, అతని లాభమును ఇంగ్లీషుసొమ్ములో, పెన్నీకి సరిగ కట్టుము.

3. 11 మంది చందాలు వేసినారు. 9 మంది ఒకొక్కడు అయిదేసి రూపాయలు ఇచ్చినారు. పదకొండు గురియొక్కయు సగటు చందాకుపైన ఒకడు 5 రూ. ను, ఒకడు 10 రూ. ను ఇచ్చినారు. చందా మొత్తము ఎంత?

4. ఈ క్రింద ఇచ్చిన దానికి కుండల నివృత్తిచేసి దానిని సూక్ష్మము చేయుము:—

$$7(a-3b+c)-[4(2b+4c)-3(a-\overline{4b)+\{5a}-(4b+4c-$$
$$\underline{a-7b}\quad c)\}].$$

5. ఒకొక్క భుజము 2·3 అంగుళములును, న్యూనకోణములలో ఒకటి 40° ను గల ఒక విషమత్రిభుజమును రచింపుము.

6. ఒకడు ఒకొక్కటి x అణాలచొప్పున a డజన్ల సారింజలును, ఒకొక్కటి y అణాలచొప్పున b స్కోర్ల సారింజలును, ఒకొక్కటి z అణాల చొప్పున c సారింజలను కొనెను. డజను 1-కి సగటు ఖరీదు కట్టుము.

$a=4$, $b=2$, $c=32$, $x=\frac{1}{2}$, $y=2\frac{1}{2}$, $z=4$ అగునప్పుడు, ఫలితమును సరిచూడుము.

7. ఒకడు ఒక గుఱ్ఱమును పౌ. $(9x^3+3x^2-4x+10)$ కు అమ్మి పౌ. $(4x^3+x^2-x+5)$ లాభము తీసినాడు. దాని కొనుబడి ఖరీదు ఎంత లాభమును కొన్న ఖరీదులో భిన్నముగ చెప్పుము. $x=3$ వేసి, సరిచూడుము.

8. (a) $\frac{P\times T\times R}{100}+P=A$ అను సంకేత సంబంధమునుబట్టి, $R=\left(\frac{A}{P}-1\right)\times\frac{100}{T}$ అని నిరూపింపుము.

(b) 25 రూ., $3\frac{1}{2}$ ఏళ్లలో రూ. 28—15—0 అయినవి. వడ్డీరేటు నూటికి ఎంత? పై సంకేత సంబంధమును వాడి ఫలితమును సరిచూపుము.

II

1. x యొక్క విలువ, క్రమమున, 0, 1, 2, 3, −1, −2, −3 అగునప్పుడు, $\frac{3x^2-7x+4}{4}$ అను సమాసముయొక్క విలువలు కట్టుము.

2. ఉన్నతాంశము = 2 అం. గల ఒక సమత్రిబాహు త్రిభుజమును రచింపుము.

3. ఒక గోపురముయొక్క ఎత్తు 120 అడుగులు. భూమిపైనున్న ఒక బిందువునుండి దాని కొనయొక్క ఊర్ధ్వకోణము 75°. ఆ బిందువునుండియే గోపురము తాలూకు ఒక కిటికీ అడుగు కమ్మియొక్క ఊర్ధ్వకోణము 33°. ఆ కమ్మి, భూమికి ఎంత ఎత్తుననున్నది? (40 అడుగులకు 1 అం. ప్రమాణము.)

4. ఒక మెడ్రాసు వర్తకుడు పుదుచ్చేరిలో మీటరు 1-కి 6·45 ఫ్రాంకుల చొప్పున 200 మీటర్ల ఫ్లానలుగుడ్డ కొనెను. ఓడసుంకమును దిగుమతి పన్నును కలిపి కొనుబడిఖరీదులో నూటికి $51\frac{1}{2}$. గజము 1-కి కొనుబడిఖరీదు రూపాయల అణాల పైసలలో, పైసకు సరిగ కట్టుము. అతని పెట్టుబడి మీద నూటికి 17 లాభము రావలెనన్న, దానిని మెడ్రాసులో ఎంత చొప్పున అమ్మవలెను? (1 మీ. = 40 అం.; 1 రూ. = $\frac{8}{5}$ ఫ్రాంకులు.)

5. (a) 8, 9, 11, లచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడు సంఖ్యలకు విదర్శనము లెవ్వి? ఉదాహరణలిమ్ము.

(*b*) మూడు సంఖ్యల క. సా. గు. 27,720. వాటిలో ఒక సంఖ్య 1980, రెండవది 1320. మూడింటి గ. సా. ప్ర. 15 అయినచో, మూడవదానికి అధమము ఎంత విలువ ఉండవలెను? పరతులను పాటించు ఇతర సంఖ్యలలో కొన్ని ఏవి?

6. ఇది సాధింపుము:—

$$\frac{x-2}{8}-\frac{x-4}{7}=\frac{2x-3}{12}-2\frac{3}{4}.$$

7. $P=2a+b, Q=2a-b$ అగునప్పుడు, $6P^2-5PQ-Q^2$ యొక్క విలువ కట్టుము.

8. ఒకడు మణుగు 1-కి రూ. $(2a-b+c)$ చొప్పున $(3a+2b-c)$ మళ్లను, మణుగు 1-కి రూ. $(a-b+2c)$ చొప్పున $(2a-3b+4c)$ మళ్లను, కాఫీ కొని కలిపివేసెను. ఆ కలగలుపుయొక్క మణుగు 1-కి సగటు ఖరీదు కట్టుము.

III

1. $\frac{x}{2\cdot4}=\frac{4\cdot7}{5\cdot3}$ అనుదానిని రేఖాగణితప్రకారము సూక్ష్మముచేయుము. విధానమును తేటపరచుము.

2. ఈ క్రింది బిందువులను గళ్లకాగితముపై స్థాపించి, ఒకొక్క తెగలోని వాటిని క్రమానుసారము కలుపుము:—

(13,0), (12,5), (5,12), (0,13) లు.

(−5,12), (−12,5), (−13,0), (−12,−5) లు.

(−5,−12), (0,−13), (5,−12), (12,−5) లు.

ఒకొక్క తెగలోని బిందువులనుగూర్చి నీవేమి గమనింతువు?

3. ·5 సెం.మీ. దళసరిగల ఒక గొట్టముయొక్క బయటి పరిధి 9·42 సెం.మీ. $\pi=3\cdot14$ గా కట్టి, లోపలి పరిధి నిర్ణయింపుము.

4. ఇది సాధింపుము:—

$$\frac{7x-3}{6}+\frac{x-2}{\frac{1}{2}}=\frac{x-1}{\frac{1}{3}}+\frac{x-4}{8}.$$

5. $11x+15+8x-10x^3-17x^2$ ని $2x-3$ చే భాగింపుము.

6. పనిచేసిన రోజు 1-కి 12 అణాలుచొప్పున కూలి పుచ్చుకొనుటకును, మానినరోజు 1-కి 8 అణాలుచొప్పున జరిమానా ఇచ్చుకొనుటకును

ఒప్పుకొని, ఒకడు ఒక ముప్పది రోజులపనిని అచ్చుకొనెను. చివరకు అతనికి 15 రూ. కిట్టెను. అతడు చేసినది ఎన్నిరోజులు?

7. ఒక తోట నలుచదరము. 5 అడుగుల వెడల్పున చుట్టును, లోపలి వైపున దారి ఉన్నది. ఆ దారి భూఫలము 600 చ. అ. తోటయొక్క భుజము కట్టుము.

8. 150 అ. ఎత్తున్న ఒక దీపస్తంభము మీదినుండి ఒకడు 30° నిమ్న కోణములో ఒక పడవను చూచెను. స్తంభపు మొదలునకు పడవయొక్క ఎడమును లెక్క కట్టుము. క్షేత్రము రచించి ఫలితమును సరిచూపుము.

IV

1. ఒక వ్యాపారస్తుడు నూటికి సాలుకి 3 ప్రాప్తికి 250 రూ. 9 నెలలకు పట్టుగుసచ్చి తత్క్షణమే దానిని, అదేకాలముపాటు ఎక్కువ వడ్డీరేటు చొప్పున ఇచ్చివేసి రూ. 2—13—0 లాభము తీసెను. అతడు ఏ రేటు చొప్పున ఇచ్చెను?

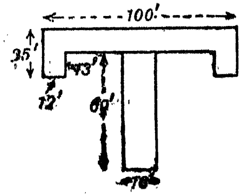
2. ఒకడు 1050 రూ. కు ఒక గుఱ్ఱమును కొని, అమ్మకపు ధరలో నూటికి 10 తగ్గింపుచేసి దానిని అమ్మగా, అతనికి నూటికి $33\frac{1}{3}$ లాభమువచ్చెను. గుఱ్ఱముయొక్క అమ్మకపు ధర కట్టుము.

3. రెండు రైళ్లు A వద్ద బయలుదేరి, A కి 200 మైళ్ల ఎడముననున్న B కేసి నడచును. ఒకటి A వద్ద గంటకు 20 మైళ్లచొప్పున రేటుతో 6·30 (ప్రా.) గంటలకు బయలుదేరినది. రెండవది 8 (ప్రా.) గంటలకు బయలుదేరి B నుండి 50 మైళ్ల ఎడముననున్న C వద్ద మొదటిదానిని అందుకొనెను. రెండవ రైలుయొక్క రేటు కట్టుము.

4. 2 అం. పొడుగున AB అను సరళరేఖ గీయుము. A నుండి 1·7 అంగుళములును, B నుండి 1·3 అంగుళములును, ఉన్న C అను బిందువును నిర్ణయింపుము. C మీదుగా AB కి సమానాంతరరేఖను గీయుము. A, B లకు సమదూరమున ఆ రేఖలోని D అను బిందువును నిర్ణయింపుము.

5. ఒక భవనము 90 అ. ఎత్తు. మట్టపుభూమికి 9 అ. పైనున్న ఒక బిందువునుండి దాని శిఖరముయొక్క ఊర్ధ్వకోణము 72°. అక్కడనుండియే, ఆ భవనము తాలూకు కిటికీ అడుగు కమ్మియొక్క ఊర్ధ్వకోణము 33°. ఆ కమ్మి భూమికి ఎంత ఎత్తు? (30 అ. = 1 అం. ప్రమాణము.)

6. తీగెచుట్టును గురించిన ఒక ప్రయోగములో 10 గ్రాముల బరువునకు 1·5 సెం.మీ. సాగుడు కలిగెను. బరువునకును సాగుడునకును గల సంబంధమును సూచించెడి లేఖ్యమును గీయుము. దానినిబట్టి, (*a*) 25 గ్రాముల బరువునకు తీగె ఏమాత్రము సాగునో, (*b*) 2·25 సెం.మీ. సాగుడు కలుగుటకు ఎంత భారము కావలయునో కట్టుము.



పటము 110.

7. ఈ ప్రక్కను గీసి ఉన్న క్షేత్రము ఒక భవనముయొక్క ప్లానునకు మాదిరి. దాని భూఫలము కట్టుము.

8. ఇది సాధింపుము:—

$$\frac{x+10}{3}-\frac{2x+4}{7}=\frac{5x+3}{4}-\frac{10x+4}{6}.$$

V

1. మెడ్రాసునుండి ఇంగ్లండు పోవుచున్న ఒకనికి బ్రిండిసీవరకును ఓడచార్జి 600 రూ. బ్రిండిసీనుండి డోవర్ వెళ్లుటకు అతనికి 10 రోజులు పట్టెను, రోజు 1-కి సగటున 55 ఫ్రాంకులు ఖర్చయ్యెను. అతడు ఇంగ్లండులో 36 రోజులు ఉండి, రోజు 1-కి సగటున 30 షి. ఖర్చుచేసెను. 65 పౌ. ప్రయాణపు ఖర్చుతో చివరకతడు తిరిగి మెడ్రాసు చేరుకొనెను. 25 ఫ్రాంకులుగాని, $10\frac{1}{2}$ రూపాయలుగాని 1 పౌనునకు తుల్యమని తెలిసి, మొత్తమతనికి ఎంత అయ్యెనో రూపాయలలో కట్టుము.

2. 4-వ ఏప్రిలు లగాయతు 12-వ ఏప్రిల్ ఆఖరుకు ఒక కంపెనీవారి సగటు అమ్మకపువసూళ్లు రోజు 1-కి 350 రూ. 4-వ తారీఖున అమ్మకముల విలువ 180 రూ., 13-వ తారీఖున 350 రూ. 5-వ తారీఖు లగాయతు 13-వ తేదీ ఆఖరుకు వారి సగటు అమ్మకపువసూళ్లు (రోజు 1-కి) కట్టుము.

3. 1, 2, 3, 5, 9, 9 అను అంకెలను ఏ క్రమమున వ్రాసి సంఖ్య ఏర్పరచినచో అది 1375 చేత భాజనీయము? నీ ఫలితమును సకారణముగ నిర్ణయింపుము.

4. 1891 లోను, 1901 లోను, ఇంగ్లండులో కొన్ని కొన్ని పనులు చేయుచుండినవారల సంఖ్యలు ఈ క్రింద ఇచ్చియున్నవి. సందర్భమును బట్టి హెచ్చు శాతమో, తగ్గు శాతమో, ఒక దశాంశస్థానమునకు సరిగ కట్టుము:—

—	1891	1901	శాతము
వ్యవసాయము ...	22,664,675	2,054,374	......
గృహనిర్మాణము ...	836,432	1,133,265	......
గనులలో పని ...	706,831	839,432	......
దూది పని ...	625,367	606,239	......
మొత్తము ...	...	...	......

5. కుండల నివృత్తిచేసి, దీనిని సూక్ష్మముచేయుము:—

$$21\left(\frac{2x+4y}{3}+\frac{4x-4}{7}\right)-24\left\{\frac{2x-y}{12}-\left[\frac{5x-7y}{8}-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}-\frac{5x-y}{4}\right)\right]\right\}.$$

$x=3$, $y=4$ అగునప్పుడు దాని విలువ కట్టుము.

6. ఒకడు ఒక నదిగట్టు అంచున నిలబడి తనకు ఎట్టఎదురుగా అవతల గట్టుననున్న ఒక గోపురపు శిఖరముయొక్క ఊర్ధ్వకోణము 30° అని గమనించెను. అతడు 840 అ. గట్టునకు లంబాత్మకముగ వెనుకకు తగ్గి చూడగా దాని ఊర్ధ్వకోణము 20° ఉండెను. క్షేత్రరచనమూలమున నదియొక్క వెడల్పు చెప్పుము.

7. ముగ్గురు గొల్లవాళ్లగు A, B, C లు 84 రూ. కు ఒక బీడు మాట్లాడి పుచ్చుకొనినారు. 7 గుఱ్ఱములను, 8 ఆవులను, 3 గొఱ్ఱెలను దానిలోనికి

A తోలెను; 11 గుఱ్ఱములను, 7 ఆవులను, 5 గొఱ్ఱెలను B తోలెను; 8 గుఱ్ఱములను, 13 ఆవులను, 28 గొఱ్ఱెలను C తోలెను. గొఱ్ఱెమేతకు మూడు రెట్లు ఆవుమేతయు, ఆవుమేతకు రెట్టింపు గుఱ్ఱపుమేతయు అయినచో, ఒక్కొక్కడు ఎంతెంత ఇచ్చుకొనవలెను?

8. ఒక వస్తువుయొక్క రొక్కపు ఖరీదు 50 రూ. అదే 9 నెలల అరువునకు కావలసినచో 65 రూ. వడ్డీరేటు ఎంతన్నమాట?

VI

1. రెండు సంఖ్యల గ. సా. ప్ర. కట్టుటలో, క్రమానుసారముగ భాజితములు 1, 2, 2, 4, 1, 3 లు. కడపటి భాజకము 35. సంఖ్యలేవి?

2. 2000 నకును, 4000 నకును సందున 19 యొక్క గుణిజమొకటి యున్నది. దానిని 15, 12, 18, 21 లలో దేనిచే భాగించినను సరే, శేషము 7. అది ఏది?

3. $V=5a+3b-4c$, $X=-3a-5b+7c$, $Y=4a+5b+c$, $Z=2a-b+4c$, అగునప్పుడు, $6V-5X-Y-Z$ అనుదానియొక్క విలువ a, b, c ల పదములలో కట్టుము. $a=b=c=1$ వేసి సరిచూపుము.

4. 1 ఆర్ = 100 చ. మీటర్లు, 1 మీటరు = 3·28 అ. ను, అని తెలిసి, 1 ఎకరముయొక్క విలువ "ఆర్" అనెడి ప్రమాణపు పదములలో చెప్పుము.

5. ఒక తిన్నని కాలువ నా స్థలముమీదుగా నున్నది. దానికి రెండు చోట్ల వంతెనలున్నవి. వాటి ఎడము 300 గజములు. మా ఇంటికి ఏ వంతెన అయినను సరె 250 గజములు. మా యిల్లు కాలువకు ఎంత ఎడమున నున్నది? (100 గజములకు 1 అంగుళము ప్రమాణము.)

6. ఒకడు, తన కొడుకులును, క్రమమున 4, 9, 19 ఏళ్ల వయస్సుగలవారును అయిన A, B, C లకు తన రొక్కపు ఆస్తి పంచినాడు. పెద్ద కొడుకునకు 25 ఏళ్ల వయస్సు వచ్చువరకును ఆ రొక్కమును నూటికి 5 చొప్పున బారువడ్డీకి వేసి పెంచి, అప్పుడు దానిని వారికి వారి వయస్సుల యొక్క విలోమనిష్పత్తిలో ఇవ్వగలందులకు నిర్ణయించినాడు. పంపకముల కాలమున వడ్డీయే 2,790 పౌ. అయినచో, ఒక్కొక్కని వాటాకు మొత్తము మీద ఎంత వచ్చును?

7. ఒకడు 2000 పెదరేగుల్లను కొనెను. వాటిలో 500 నూటికి 40 లాభమునకును, 500 నూటికి 30 లాభమునకును, 500 నూటికి 20 లాభమునకును, తక్కినవాటిని నూటికి 10 నష్టమునకును అమ్మెను. మొత్తముమీద అతనికి 100 అణాలు లాభము చిక్కినది. ఒక్కొక్క పండు అతడు ఎంతకు కొనెను?

8. x^3-1, x^6-1 లకు గ. సా. ప్ర., క. సా. గు. లను కట్టుము.

VII

1. దీనిని సూక్ష్మముచేసి, a యొక్క తగ్గుక్రమ ఘాతములలో వ్రాయుము:—

$$3a^3(a-2)-2a^2(a^2-2a+3)+5a(a^3-2a^2+2a-4)-4(a^4-a+a^2-a^3+1).$$

$a=10$ వేసి సరిచూపుము.

2. 1897, 1898 లలో ఒకచోట సగటు సాలుసరి వానపాటు 29·485 అంగుళములు, 1900, 1901 లలోనిది 24·965 అంగుళములు. 1897—1901 వరకునున్న అయిదేళ్లయొక్కయు సగటు సాలుసరి వానపాటు 24·98 అంగుళములు అయినచో, 1899 లో వానపాటు కట్టుము.

3. ఒకానొక నాటక కంపెనీవారు ఒక చోట రోజు 1-కి 1 ఆట చొప్పున రెండు ఆటలు ఆడిరి. తొలిరోజు వసూలు $(25a+13b-8c)$ రూపాయలు; మరునాడు $(b+10c-11a)$ రూపాయలు. తొలిరోజు ఖర్చు $(7a+5b-4c)$ రూపాయలు, మరునాడు $(6a+8b+5c)$ రూపాయలును అయినచో, అక్కడ కంపెనీకి నికరాదాయమును కట్టుము.

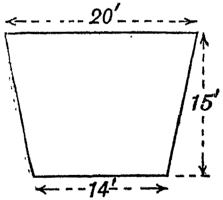
4. ఒకడు ఒక నదిగట్టు అంచున నిలబడి తనకు ఎట్ట ఎదురుగా అవతల గట్టుననున్న ఒక గోపురపు కొనయొక్క ఊర్ధ్వకోణము $35°$ అగుటను గమనించినాడు. వెనుకకు, గట్టునకు లంబాత్మకముగ 40 అ. జరిగి, అతడు దాని ఊర్ధ్వకోణము $25°$ ఉండుట గమనించినాడు. క్షేత్రరచన మూలమున, నదియొక్క వెడల్పు చెప్పుము.

5. $9b^2+c^2+6bc$, $8a^2+b^2+7ab$, $3a^2+11c^2+7ac$ ల మొత్తమును $8a^2+9ab-3ac-2bc$ లోనుండి తీసివేసి, $a=1$, $b=2$, $c=3$ అగునప్పుడు నీ ఫలితమును సరిచూడుము.

6. ఇది సాధింపుము:—

$$\frac{(x-3)(x-4)}{3}-\frac{(2x-3)(6x+5)}{36}+\frac{8}{15}$$

7. లేఖ్యామూలకముగ, 15 షిల్లింగుల విలువను ఫ్రాంకులలోనికి (అనగా, అవి ఫ్రెంచి నాణెములు) మార్చి చెప్పుము. మారకము 1 పౌనుకు = 25·20 ఫ్రాంకులు.



పటము 111.

8. ఈ ప్రక్క పటమున ఇచ్చియున్నది ఒక కాలువగట్టుల దిశకు లంబాత్మకముగనుండు నిలువు ఛేదము. దాని రూపము విషమచతుర్భుజము. దాని భూఫలము కట్టుము.

VIII

1. ఘ. సెం.మీ. 1-కి 7·7 గ్రాముల భారము చొప్పున గల ఒక లోహపు ముద్దను 171·5 ఘ. సెం.మీ. నీరు గలిగిన ఒక కొలగొట్టములో వేసినారు. నీరు 189·0 ఘ. సెం.మీ. వరకు లేచెను. ఆ ముద్దయొక్క భారము కట్టుము.

2. $x=1, y=4, c=2, a=8$ అగునప్పుడు, $\sqrt[3]{\frac{x^9 y^7 c^4}{a^3}}$ కి విలువ కట్టుము.

3. $x^2-9x+20$ ని విభజించి, x యొక్క ఏ ప్రత్యేకపు విలువలకు ఆ సమాసము శూన్యమునకు సమమౌ కట్టుము.

4. $873a\,40b\,5$ అను సంఖ్యలో a, b లు రెండు అంకెల బదులుగా నున్నవి. ఈ సంఖ్య 11, 25 లచే భాజనీయమగుటకు a, b లకు విలువలు ఎంతెంత ఉండవలెను?

5. 1910 లగాయతు 1915 ఆఖరువరకుగల ఆరు ఏండ్లకును ఒకని సగటు సాలుసరి ఖర్చు 450 పౌ.; 1912 లగాయతు 1917 ఆఖరువరకుగల ఆరు ఏండ్లకును అట్టి ఖర్చు 500 పౌ. 1916, 1917 లలో అతడు వెరసి 1,100 పౌ. ఖర్చుపెట్టెను. 1910, 1911 సంవత్సరములలో అతని సగటు సాలుసరి ఖర్చు కట్టుము.

6. x^2+9x+8 ని విభజింపుము. తద్వారా, 198 ని రెండు అవయవముల లబ్ధముగా చెప్పుము. (ఒకొక్కదానిలో రెండు అంకెలు చొప్పున ఉండవలయును.)

7. ఒక నీటికోశములోని నీరు ఒక మర త్రిప్పినచో 3 నిమిషముల 18 సెకనులకును $11\frac{1}{7}$ గాలనుల చొప్పున తగ్గిపోవును. $2\frac{2}{13}$ గంటలలో, ఉన్న నీటిలో $\frac{4}{11}$ భాగము కారిపోయినవి. మొట్టమొదట్లో, కోశముయొక్క $\frac{5}{8}$ భాగమే నీటితో నున్నచో, ఆ కోశము అసలు ఎంత నీరుపట్టును?

8. ఇద్దరు బాలురకు మొత్తము 252 గోలీలున్నవి. ఒకడు తనవి ఆరేసి చొప్పునను, రెండవవాడు తనవి తొమ్మిదేసిచొప్పునను పోగులుగా పెట్టగా, మొత్తము 34 పోగులు ఏర్పడెను. ఎవనివద్ద ఎన్ని ఉండెను?

IX

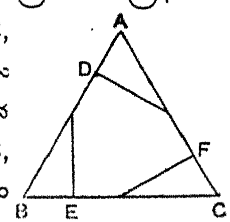
1. $x=4,\ y=-1,\ z=3,\ w=1$ అగునప్పుడు, $\sqrt[3]{\frac{3x-4y+z}{2w}}$ యొక్క విలువ కట్టుము.

2. 20 అ. పొడుగుగల ఒక నిచ్చెనయొక్క క్రిందికొన ఒక రోడ్డుమీద ఒక చోట పెట్టి, ఒక వైపునకు త్రిప్పినచో దానియొక్క పైకొన ఒక గోడమీద x అను బిందువును తాకును; రెండవవైపునకు త్రిప్పినచో అది అవతలి ప్రక్కగోడమీద y అను బిందువును తాకును. x యొక్క ఊర్ధ్వకోణము $60°$ ను, y యొక్క ఊర్ధ్వకోణము $45°$ ను అయినచో, (a) రోడ్డువెడల్పును, (b) x, y ల ఎడమును కట్టుము. (10 అడుగులకు 1 అం. ప్రమాణము.)

3. $x^5 - x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ ని x^2-3 చే భాగించునపుడు శేష మెంత?

4. భూమికి ధర, ఇంగ్లండులో ఎకరము 1-కి 200 పౌ.; ఫ్రాన్సులో ఆర్ 1-కి 125 ఫ్రాంకులు. 247 ఎకరముల భూమికి ఇంగ్లండులో ఖరీదునకును, ఫ్రాన్సులో ఖరీదునకును తేడా, ఫ్రాంకులలో చెప్పుము. [1 ఫ్రాంకు = $9\frac{1}{2}$ పె., 1 ఆర్ = ·0247 ఎకరము.]

5. ABC అనునది 3 అం. భుజముగల సమత్రిబాహు త్రిభుజము. AD, BE, CF = $\frac{3}{4}$ అం. ఉండునట్లు, AB, BC, CA లలో క్రమమున, D, E, F అను బిందువులు నిర్ణయింపబడినవి. D, E, F ల వద్దనుండి, క్రమమున AB, BC, CA లకు లంబాత్మకముగ సరళరేఖలు AC, AB, BC లను ఖండించెడివి గీయబడినవి. క్షేత్రమందలి నడిమిభాగపు భూఫలము కట్టుము.



పటము 112.

6. A: B:: 3: 4 అగునట్లును, B: C:: 5: 6 అగునట్లును 41,300 రూ. A, B, C లకు పంచుము.

7. "ఒకానొక జిల్లాలో వ్యవసాయముచే జీవించువారు 2,081,425 మంది. మొత్తపు జనాభాలో వారిసంఖ్య నూటికి 73·5. తరువాత ఎన్నవలసినది చేతిపనులవాళ్ల సంఖ్య. అది, మొత్తపు జనాభాలో నూటికి 14·4." చేతిపనులవారి సంఖ్య కట్టుము.

8. 540 మైళ్ల ప్రయాణమునకు ఇంటరుక్లాసు రైలుచార్జి రూ. 14—0—0. దూరమునకును చార్జికిని సంబంధమును తెలిపెడి లేఖ్యమును గీయుము. గీసి దానినిబట్టి, 198 మైళ్ల ప్రయాణమునకు, ఆ క్లాసు టిక్కట్టుకే, ఎంత చార్జి అగునో కట్టుము.

X

1. నీవెరిగియున్న ఏదైన సంకేతసూత్రమునుబట్టి, 1108×1172 అనెడి లబ్ధమును కట్టుము.

2. ఒక పడవతోసెడి 8 మంది తెడ్లవాళ్లలో, 11 స్టోనుల 12 పౌనులు బరువుగల ఒకనిబదులు ఒక క్రొత్తవాడు వచ్చినచో, వారి సగటుబరువు $2\frac{1}{2}$ పౌనులపాటు పెరుగును. క్రొత్తవాని బరువెంత?

3. నేలతో 45° కోణము చేయునట్లు ఒక నిచ్చెనను ఒక వీధిగోడకు జేరవేయగా, దాని పైకొన నేలకు 28 అ. ఎత్తుననున్న ఒక బిందువును అందుకొనును. క్రిందికొనకు స్థలచలనము కాకుండ, నిచ్చెనను అవతలవైపు గోడకు జేరబెట్టినచో, అది నేలతో 30° కోణముచేయును. వీధి వెడల్పు కట్టుము.

4. ఒకడు P నుండి బయలుదేరి, కేవలము ఉత్తరముగ 9 మైళ్లు నడచి Q చేరుకొని, అక్కడనుండి కేవలము తూర్పునకు 6 మైళ్లు నడచి R చేరుకొనును. లేఖ్యమూలకముగా, P, R ల ఎడము కట్టుము.

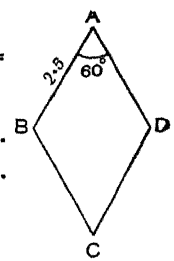
5. $ax^3+5x^2-bx+2x-cx^2-x^3$ లో, సమాంక ఘాతములకు కుండలములను వేయుము: (*a*) కుండలముల పూర్వము ధనసంజ్ఞ యుండునట్లు; (*b*) కుండలముల పూర్వము ఋణసంజ్ఞ యుండునట్లు.

6. మధురజిల్లాలో కొన్ని తాలూకాలయొక్క భూఫలము ఎన్నివందల ఎకరములలో ఆ సంగతియు, వాటిలో ఏ శాతములు సాగు అగునో ఆ సంగతియు, ఈ క్రింద ఇచ్చియున్నవి:—

తాలూకా	భూఫలము	సాగయ్యెడి శాతము
కొడైకెనాల్	2644	14·4
పాల్ని	2102	88·0
డిండిగల్	5013	75·6
పెరియాకులము	3847	53·3

నాలుగు తాలూకాలలోను కలిపి సాగు నేలయొక్క భూఫలము కట్టుము.

7. ABCD అనునది ఒక సమ చతుర్భుజము. AB=2·5 అం., $\angle A=60°$. దాని భూఫలము కట్టుము.



పటము 113.

8. 6 అ. ఎత్తున్న ఒకడు ఒక దీపస్తంభమునకు 12 అ. ఎడమున నిలబడగా, వాని నీడ 12 అ. పొడుగున పడెను. దీపము నేలకు ఎంత ఎత్తున ఉన్నది?

అనుబంధము.

I. మానములు.

హిందూసొమ్ము.

12 పైసలు (పై.) = 1 అణా (అ.)
16 అణాలు = 1 రూపాయి (రూ.)

ఇంగ్లీషు సొమ్ము.

4 ఫార్తింగులు (ఫా.) = 1 పెన్నీ (పె.)
12 పెన్సులు = 1 షిల్లింగు (షి.)
20 షిల్లింగులు = 1 పౌను (పౌ.)
షరా.—2 షిల్లింగులు = 1 ఫ్లారిన్ (ఫ్లా.)
5 షిల్లింగులు = 1 క్రౌను (క్రౌ.)
21 షిల్లింగులు = 1 గినీ (గి.)

మెడ్రాసు గవర్నమెంటు తూనిక.

3 తులములు (తు.) = 1 పలము (ప.)
40 పలములు = 1 వీసె (వీ.)
8 వీసెలు = 1 మణుగు (మ.)
20 మణుగులు = 1 బారువ (బా.)

1 తులము = రూపాయి ఎత్తు = 180 వడ్లగింజలు (గ్రయిన్లు).
1 వీసె = 5 శేర్లు, 1 శేరు = 8 పలములు.
1 మణుగు = 25 పౌనులు (అవాయిర్‌డ్యుపాయ్)

అవాయిర్‌డ్యుపాయ్ తూనిక.

16 డ్రాములు = 1 ఔన్సు (ఔ.)
16 ఔన్సులు = 1 పౌను (పౌ.)
14 పౌనులు = 1 స్టోను (స్టో.)
28 పౌనులు = 1 క్వార్టరు (క్వా.)
4 క్వార్టర్లు = 1 హండ్రెడ్ వెయిట్ (హం.)
20 హండ్రెడ్ వెయిట్లు = 1 టన్ను (ట.)

షరా.—"పౌను" అను మాట తూనికలోను సొమ్ములోను కూడ వచ్చుచుండును గావున సంఖ్యకు పూర్వమందు 'పౌ' అని వ్రాసినప్పుడు అది సొమ్మనియు, పరమందు వ్రాసినప్పుడు బరువనియు పెట్టుకొన్న ఏర్పాటు గ్రహింపనగును.

ట్రోయ్ తూనిక.

24 గ్రయిన్లు = 1 పెన్నీ వెయిట్ (పె. వె.)
20 పెన్నీ వెయిట్లు = 1 ఔన్సు (ఔ.)
12 ఔన్సులు = 1 పౌను (పౌ.)

వైద్యములో తూనిక.

20 గ్రయిన్లు (గ్ర.) = 1 స్క్రూపిల్ (స్క్రూ.)
3 స్క్రూపిల్సు = 1 డ్రామ్ (డ్రా.)
8 డ్రాములు = 1 ఔన్సు (ఔ.)
12 ఔన్సులు = 1 పౌను (పౌ.)

షరా.—పైనచెప్పిన త్రివిధ తులామాన సాంప్రదాయములలోను కూడ "గ్రయిన్" అనుదానికి ఏకార్థమే.

1 పౌ. (అవాయిర్‌డ్యుపాయ్) = 7,000 గ్రయిన్లు.
1 పౌ. (ట్రోయి) = 5,760 గ్రయిన్లు.
1 ఔ. (అవాయిర్) = 437½ గ్రయిన్లు.
1 ఔ. (ట్రో.) = 480 గ్రయిన్లు.

హిందువుల తూనిక.

5 తులములు = 1 చటాకు (చ.)
16 చటాకులు = 1 శేరు (శే.)
40 శేర్లు = 1 మణుగు (మ.)
1 మణుగు = 82$\frac{2}{7}$ పౌ. (అవాయిర్.)
లేక 100 పౌ. (ట్రో.)

మెడ్రాసు పరిమాణ మానము.

8 ఆళాకులు (ఆళా.)	=	1 పడి (పడి.)
8 పడులు	=	1 మరకము (మర.)
12 మరకములు	=	1 కలము (క.)
5 మరకములు	=	1 పారా (పా.)
80 పారాలు లేక 400 మరకాలు	=	1 గార్సు (గార్సు.)

బ్రిటిషు పరిమాణ మానము.

2 పైంట్లు (పైం.)	=	1 క్వార్టు (క్వార్టు.)
4 క్వార్టులు	=	1 గాలను (గా.)
2 గాలనులు	=	1 పెక్ (పెక్.)
4 పెక్కులు	=	1 బుషెల్ (బు.)
8 బుషెలులు	=	1 క్వార్టరు (క్వా.)

షరా.—1 గాలను=277·45 ఘ. అం. లేక 0·16 ఘ. అ. ఒక ఘన అడుగు నీటియొక్క భారము 62·5 పౌనులు.

వస్తువుల మానము.

12 వస్తువులు	=	1 డజను (డ.)
12 డజన్లు	=	1 గ్రోసు (గ్రో.)
20 వస్తువులు	=	1 స్కోరు (స్కో.)

కాగితపు మానము.

24 టావులు	=	1 దస్తా (ద.)
20 దస్తాలు	=	1 రీము (రీ.)
10 రీములు	=	1 బేలు (బే.)

బ్రిటిషువారి పొడవుల మానము.

12 అంగుళములు (అం.)	=	1 అడుగు (అ.)
3 అడుగులు	=	1 గజము (గ.)
220 గజములు	=	1 ఫర్లాంగు (ఫ.)
8 ఫర్లాంగులు (1760 గజములు)	=	1 మైలు (మై.)
1 రాడ్ లేక పోల్ లేక పర్చి	=	5½ గజములు.
1 లీగ్	=	3 మైళ్లు.

భూఫలము కట్టుటకు.

1 గొలుసు (గొ.)	=	100 లింకులు (లిం.) = 22 గజములు.
1 గొలుసు	=	4 పోలులు (పో.)
80 గొలుసులు	=	1 చట్టపు మైలు.

సముద్రముమీద కొలతలకు.

1 ఫేతం (నిలువు)	=	6 అడుగులు.
1 కేబిల్	=	100 నిలువులు = 220 గజములు.

1 అక్షాంశపు డిగ్రీ=69·1 చట్టపు మైళ్లు (భూమియొక్క వ్యాసార్థము 3959 మైళ్లు అని అనుకొనినచో). ఒక సముద్రపుమైలు ఒక అక్షాంశపు డిగ్రీలో 60-వ వంతు; దాని విలువ 6,046 అ. 6,107 అ. సందున చలించును. సాధారణముగా అది 6,080 అ. అని కట్టుకొందురు. ఒక "నాట్" అనగా గంట 1-కి ఒక సముద్రపు మైలుచొప్పున నుండు వేగము.

భూఫలము.

144 చదరపు అంగుళములు (చ. అం.)	=	1 చదరపు అడుగు (చ. అ.)
9 చదరపు అడుగులు	=	1 చదరపు గజము (చ. గ.)
4840 చదరపు గజములు	=	1 ఎకరము (ఎక. లేక ఎ.)
640 ఎకరములు	=	1 చదరపు మైలు (చ. మై.)

షరా.—1 చదరపు పోలు = 30¼ చ. గ.

40 పోలులు	=	1 రూడ్.
4 రూడ్లు	=	1 ఎకరము.

ఘనఫలము.

1728 ఘన అంగుళములు (ఘ. అం.)	=	1 ఘన అడుగు (ఘ. అ.)
27 ఘన అడుగులు	=	1 ఘన గజము (ఘ. గ.)

భూమి సర్వే చేయుటకు.

100^2 చదరపు లింకులు (చ. లిం.)	=	1 చదరపు గొలుసు (చ. గొ.)
10 చదరపు గొలుసులు	=	1 ఎకరము.
1 మానాయ్ లేక గ్రౌండు	=	$60' \times 40'$.
24 మానాయిలు లేక గ్రౌండులు	=	1 కాని.

కాలమానము.

60 సెకనులు (సె.)	= 1 నిమిషము (ని.)
60 నిమిషములు	= 1 గంట (గం.)
24 గంటలు	= 1 రోజు. (రో.)
7 రోజులు	= 1 వారము.
365 రోజులు	= 1 సంవత్సరము లేక, ఏడు లేక సాలు.
366 రోజులు	= 1 అధికదిన సంవత్సరము.

మరా.—1894 అనునది 4 చే నిశ్శేషభాజకము కాదు కావున అది అధికదిన సంవత్సరము కాదు; 1896 అనునది 4 చే నిశ్శేషముగ భాగింపబడును కావున అది అధికదిన సంవత్సరము. పైగా, 100 యొక్క గుణజము లగు సంవత్సరములలో 400 చే నిశ్శేషముగ భాగింపబడునవిమాత్రమే అధికదిన సంవత్సరములు; 1900 అనునది అధికదిన సంవత్సరము కాదు, 1600 అనునది అగును.

మెట్రిక్ సాంప్రదాయము.

పొడవులు.

1 మిల్లీమీటరు (మి.మీ.)	= $\frac{1}{1000}$ మీటరు (మీ.)
1 సెంటిమీటరు (సెం.మీ.)	= $\frac{1}{100}$ మీటరు.
1 డెసిమీటరు (డె.మీ.)	= $\frac{1}{10}$ మీటరు.
1 డెకామీటరు (డెకా.మీ.)	= 10 మీటరులు.
1 హెక్టోమీటరు (హె.మీ.)	= 100 మీటరులు.
1 కిలోమీటరు (కి.మీ.)	= 1000 మీటరులు.

1 మీటరు = 39·370113 అం. లేక, 3·280843 అ. లేక, 1·0936143 గ.

1 కి.మీ.	= ·621372 మై.
1 అం.	= 25·4000 మి.మీ.
1 మైలు	= 1·609343 కి.మీ.
1 అ.	= ·304800 మీ.
1 గ.	= ·914399 మీ.
1 మీటరు	= $1\frac{1}{10}$ గ. } ఉజ్జాయింపుగా.
1 అడుగు	= 30 సెం.మీ. } ఉజ్జాయింపుగా.
1 కి మీ	= $\frac{5}{8}$ మై. } ఉజ్జాయింపుగా.

బరువులు.

1 మిల్లిగ్రాము (మి.గ్రా.)	= $\frac{1}{1000}$ గ్రాము (గ్రా.)
1 సెంటిగ్రాము (సెం.గ్రా.)	= $\frac{1}{100}$ గ్రాము.
1 డెసిగ్రాము (డె.గ్రా.)	= $\frac{1}{10}$ గ్రాము.
1 డెకాగ్రాము (డెకా.గ్రా.)	= 10 గ్రాములు.
1 హెక్టోగ్రాము (హె.గ్రా.)	= 100 గ్రాములు.
1 కిలోగ్రాము (కి.గ్రా.)	= 1000 గ్రాములు.
1 టన్నీ (అనగా మెట్రిక్ సాంప్రదాయపు టన్ను)	= 1000 కి.గ్రా.
1 క్వింటాల్	= 100 కి. గ్రా.
1 గ్రాము	= 15·432356 గ్రెయిన్లు.
1 కి. గ్రా.	= 2·2046223 పౌ.
1 మెట్రిక్ టన్ను	= 0·984206 టన్ను (అవాయిర్ డ్యుపాయిస్.)
1 ఔన్సు	= 28·34953 గ్రా.
1 పౌను	= 0·45359243 కి.గ్రా.
1 టన్ను	= 1·016047 మెట్రిక్ టన్నులు.
1 కి.గ్రా.	= $2\frac{1}{5}$ పౌ. (ఉజ్జాయింపు.)

మెట్రిక్ భూఫలము.

1 ఆర్ (ఆర్.)	= 1 చ. డెకా.మీ.
1 సెంటిఆర్ సెం. (ఆర్)	= $\frac{1}{100}$ ఆర్.
1 హెక్టార్	= 100 ఆర్ లు.

మరా.—1 చ. సెం.మీ.	= 0·1550006 చ. అం.
1 చ. మీ.	= 1·195992 చ. గ.
1 చ. అం.	= 6·45159 చ. సెం.మీ.
1 చ. గ.	= 0·836126 చ. మీ.
1 ఆర్	= 119·5992 చ. గ.
1 హెక్టార్	= 2·47106 ఆర్ లు.
1 ఎకరము	= 0·404685 హెక్టా.

మెట్రిక్ ఘనఫలము.

1 ఘన సెంటిమీటరు	= 0·0610239 ఘ. అం.
1 ఘనమీటరు	= 1.307954 ఘ. గ.
1 ఘన అంగుళము	= 16·3870 ఘ. సెం.మీ.
1 ఘనగజము	= 0·764553 ఘ. మీ.

మెట్రిక్ పరిమాణము.

1 లీటరు (లీ.)	= 1 ఘన డెసిమీటరు (ఘ. డె.మీ.)
1 సెంటిలీటరు (సెం.లీ.)	= $\frac{1}{100}$ లీటరు.
1 డెసిలీటరు (డె.లీ.)	= $\frac{1}{10}$ లీటరు.
1 డెకాలీటరు (డెకా.లీ.)	= 10 లీటర్లు.
1 హెక్టోలీటరు (హె.లీ.)	= 100 లీటర్లు.
1 లీటరు	= 1·75980 (పైం.)
1 హెక్టోలీటరు	= 2·74969 బు.
1 పైం.	= 0·568245 లీ.
1 గాలను	= 4·545963 లీ.
1 లీటరు	= $1\frac{3}{4}$ పైం. (ఉజ్జాయింపుగా.)

II. భూఫల ఘనఫలములు కట్టుటకు సంకేతసూత్రములు.

1. సమానాంతర చతుర్భుజముయొక్కగాని, ఆయతముయొక్కగాని భూఫలము = భూమి × ఉన్నతాంశము.

2. (*a*) త్రిభుజముయొక్క భూఫలము = (i) $\frac{1}{2}ah$, (a అనునది భూమియు, h అనునది తత్సంబంధమగు ఉన్నతాంశమును అగునప్పుడు.)

$$=(ii)\ \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(a, b, c లు భుజముల పొడవులును, s అనునది వాటి మొత్తములో సగమును అగునప్పుడు.)

(*b*) సమకోణాత్మక త్రిభుజముయొక్క భూఫలము = $\frac{1}{2}ab$, (a, b లు సమకోణాశ్రితభుజములు అగునప్పుడు.)

3. చతుర్భుజముయొక్క భూఫలము = (i) $\frac{1}{2}$ × ఒక కర్ణము × తక్కిన కోణబిందువులనుండి దానికి గీసిన లంబముల మొత్తము.

= (ii) చతుర్భుజముయొక్క కోణబిందువుల మీదుగా దాని కర్ణములకు గీసిన సమానాంతరరేఖలచే ఏర్పడు సమానాంతర చతుర్భుజములో సగము.

= (iii) కర్ణములు లంబితముగ ఖండించుకొనునపుడు వాటి లబ్ధములో సగము.

4. విషమ చతుర్భుజముయొక్క భూఫలము = $\frac{1}{2}h(a+b)$ (a, b లు సమానాంతర భుజములును, h అనునది వాటి ఎడమును అగునప్పుడు.)

5. వృత్తముయొక్క పరిధి = $2\pi r = \pi d$ (r అనునది వ్యాసార్థమును, d అనునది వ్యాసమును అగునప్పుడు.)

$\pi = 3·14159265$ ...... ఈ విలువ నాలుగు దశాంశములకు చాలునపుడు $\pi = 3·1416$. π యొక్క విలువ 3·14 అని అనుకొన్నచో, ఫలితముయొక్క మూడవ అంకము నమ్మ వీలులేదు. π కి $3\frac{1}{7}$ అనునది చాల వీలైన విలువయేకాని ఫలితమును మూడవ అంకము తరువాత ఇదమిత్థమనుటకు వీలుండదు.

6. వృత్తముయొక్క భూఫలము = (i) πr^2 (r అనునది వ్యాసార్థము అగునప్పుడు.)

= (ii) $0·78539814 \times d^2$ (d అనునది వ్యాసము అగునప్పుడు.)

7. వృత్తఖండముయొక్క భూఫలము = (i) $\frac{1}{2}lr$ (l అనునది చాపముయొక్క పొడుగును, r అనునది వ్యాసార్థమును అగునప్పుడు.)

= (ii) $\frac{n}{360}$ × వృత్తముయొక్క భూఫలము (n అనునది వృత్తఖండముయొక్క కోణము అగునప్పుడు.)

8. సమవృత్తాకార స్తంభము తాలూకు వక్రతలముయొక్క భూఫలము = $2\pi rh$, (h అనునది మధ్యచ్ఛేదియొక్క ఉన్నతాంశమును, r అనునది వ్యాసార్థమును అగునప్పుడు.)

9. **సమసూచియొక్కయు, వృత్తాకార స్తంభముయొక్కయు ఘనఫలము** $=Ah$ (A అనునది మధ్యచ్ఛేదియు, h దానికి లంబాత్మకపు ఉన్నతాంశమును అగునప్పుడు.)

$=\pi r^2 h$ (r అనునది ఆధారముయొక్క వ్యాసార్ధమును, h అనునది ఉన్నతాంశమును అగునప్పుడు.)

గుల్ల స్తంభముయొక్క ఘనఫలము $=(\pi R^2-\pi r^2)h$ (R, r లు, క్రమమున బాహ్యాంతర వ్యాసార్ధములును, h అనునది ఉన్నతాంశమును అగునప్పుడు.)

10. సమవృత్తాత్మకమగు **సూచ్యాకార శంఖముయొక్క ఏటవాలు తలముయొక్క భూఫలము** $=\frac{1}{2}\, l\, c$ (l అనునది ఏటవాలు ఉన్నతాంశమును, c అనునది ఆధారము తాలూకు పరిధియు అగునప్పుడు.)

$=\pi r l.$

$=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$, (r అనునది ఆధారముయొక్క వ్యాసార్ధమును h అనునది సూచ్యాకార శంఖపు ఉన్నతాంశమును అగునప్పుడు.)

11. **సూచ్యాకార శంఖముయొక్కగాని, సూచియొక్కగాని ఘనఫలము** $=\frac{1}{3}\, A\, h$ (A అనునది ఆధారపు భూఫలమును, h అనునది ఉన్నతాంశమును అగునప్పుడు.)

సూచ్యాకార శంఖముయొక్క ఘనఫలము (మాత్రము) $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ (r అనునది ఆధారపు వ్యాసార్ధమును, h అనునది ఉన్నతాంశమును అగునప్పుడు.)

12. **ఘనాకారముయొక్క ఉపరితలముయొక్క భూఫలము** $=6a^2$ (a అనునది ఘనాకారముయొక్క అంచు అగునప్పుడు.)

13. **ఘనాకారముయొక్క ఘనఫలము** $=a^3$ (a అనునది దాని అంచు అగునప్పుడు.)

14. **సమానాంతర ఖాతముయొక్క ఘనఫలము** = పొడవు × వెడల్పు × ఉన్నతాంశము.

15. a అను పొడవు భుజముగాగల సమత్రిబాహు త్రిభుజముయొక్క **ఉన్నతాంశము** $=\frac{\sqrt{3}}{2}a=\cdot 866a=\cdot 87a.$

16. h అను పొడవు ఉన్నతాంశముగాగల సమత్రిబాహు త్రిభుజముయొక్క **భుజము** $=\frac{2h}{\sqrt{3}}=1\cdot 1547h=1\cdot 15h.$

17. a అను పొడవు భుజముగాగల చతురస్రముయొక్క కర్ణము $=a\sqrt{2}=1\cdot 414a.$

18. d అను పొడవు కర్ణముగాగల చతురస్రముయొక్క భుజము $=\frac{d}{\sqrt{2}}=\cdot 707a.$

19. a అను పొడవు భుజముగాగల సమద్విబాహు త్ర్యస్రముయొక్క కర్ణము $=\sqrt{2}a=1\cdot 414a.$

20. సమకోణ త్రిభుజముయొక్క కర్ణము a అగునప్పుడు దాని భుజములు సమములగుచో ఒకొక్కటి $=\frac{a}{\sqrt{2}}=\cdot 7071a.$

21. a అను పొడవు భుజముగాగల సమత్రిబాహు త్రిభుజముయొక్క భూఫలము $=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\cdot 433a^2.$

22. a అను పొడవు భుజముగాగల సమానాత్మక పంచభుజముయొక్క భూఫలము $=5a^2\times\cdot 344.$

23. a అను పొడవు భుజముగాగల సమానాత్మక షడ్భుజముయొక్క భూఫలము $=\frac{6\sqrt{3}}{4}a^2=6a^2\times\cdot 433.$

24. a అను పొడవు భుజముగాగల సమానాత్మక అష్టభుజముయొక్క భూఫలము $=2\,(1+\sqrt{2})\,a^2=8a^2\times\cdot 6035.$

25. r అను పొడవు వ్యాసార్ధముగాగల వృత్తమున అంతర్గతమగు సమత్రిబాహు త్రిభుజముయొక్క భూఫలము $=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2=3r^2\times\cdot 433.$ (ఆ త్రిభుజముయొక్క భుజము $=r\sqrt{3}$).

26. r అను పొడవు వ్యాసార్ధముగాగల వృత్తమున అంతర్గతమగు చతురస్రముయొక్క భూఫలము $=4r^2\times\cdot5=2r^2$ (భుజము $=r\sqrt{2}$).

27. r అను పొడవు వ్యాసార్ధముగాగల వృత్తమున అంతర్గతమగు సమానాత్మక పంచభుజముయొక్క భూఫలము $=5r^2\times\cdot476$.

28. r అను పొడవు వ్యాసార్ధముగాగల వృత్తమున అంతర్గతమగు సమానాత్మక షడ్భుజముయొక్క భూఫలము $=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}r^2=6r^2\times\cdot433$ (భుజము $=r$).

29. r అను పొడవు వ్యాసార్ధముగాగల వృత్తమున అంతర్గతమగు సమానాత్మక అష్టభుజముయొక్క భూఫలము $=2\sqrt{2}\,r^2=8r^2\times\cdot354$.

30. r అను పొడవు వ్యాసార్ధముగాగల వృత్తమునకు బాహ్యాగతమగు సమత్రిబాహు త్రిభుజముయొక్క భూఫలము $=3r^2\times\sqrt{3}=5\cdot196r^2$ (భుజము $=2\sqrt{3}r$).

31. r అను పొడవు వ్యాసార్ధముగాగల వృత్తమునకు బాహ్యాగతమగు చతురస్రముయొక్క భూఫలము $=4r^2$ (భుజము $2r$).

32. r అను పొడవు వ్యాసార్ధముగాగల వృత్తమునకు బాహ్యాగతమగు సమానాత్మక పంచభుజముయొక్క భూఫలము $=5r^2\times\cdot727$.

33. r అను పొడవు వ్యాసార్ధముగాగల వృత్తమునకు బాహ్యాగతమగు సమానాత్మక షడ్భుజముయొక్క భూఫలము = అంతర్గత షడ్భుజమునకు $\frac{4}{3}$ రెట్లు $=2\sqrt{3}r^2=6r^2\times\cdot577$.

34. r అను పొడవు వ్యాసార్ధముగాగల వృత్తమునకు బాహ్యాగతమగు సమానాత్మక అష్టభుజముయొక్క భూఫలము $=8r^2\times\cdot414$.

సంకేతసూత్రములు.

35. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

36. $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$.

37. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

38. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

39. బారువడ్డీకి సంకేతసూత్రము. $\mathrm{I}=\frac{\mathrm{P}\times\mathrm{n}\times\mathrm{r}}{100}$; $\mathrm{A}=\mathrm{P}\left(1+\frac{\mathrm{nr}}{100}\right)$.

40. కంపౌండు వడ్డీకి సంకేతసూత్రము. $\mathrm{A}=\mathrm{P}\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$.

ఉజ్జాయింపులు.

41. $\frac{1}{1+x}=1-x$ (x అనునది అత్యల్పమగునప్పుడు).

$\frac{1}{1-x}=1+x$ (,, ,,).

$(1+x)^n=1+nx$ (,, ,,).

$(1-x)^n=1-nx$ (,, ,,).

$(1+x)(1+y)=1+x+y$ (x, y లు అత్యల్పములగునప్పుడు).

$(1-x)(1-y)=1-x-y$ (,, ,,).

ఫలితములు.

అభ్యాసము 1. (పేజీ. 5.)

1. 50,00,000 రూ. 2. 28,000,45. 3. $a=9$; $b=8$; $c=6$; $d=7$.

4. మొదటి 6, వేలను, చివర 6, ఒకట్లను సూచించును; 9, 9 వేలను, 7, 7 వందలను సూచించును; 9, 9 వందలను, 7, 7 పదులను సూచించును.

5. a అనునది వందవేలను, అనగా లక్షలను సూచించును; a వందవేలు + b పదివేలు + c వేలు + d వందలు + e పదులు + f ఒకట్లు; a లక్షలు + b పదివేలు + c వేలు + d వందలు + e పదులు + f ఒకట్లు.

6. 98730, మరి 30789. 7. 39870, మరి 30789. 8. (a) 107154; (b) 1531626; (c) 1698494. 9. (a) 1266668; (b) 5484122; (c) 1816781. 10. (a) 148485; (b) 957747; (c) 8268370.

11. 6607, 1745.

12. (8a) $87689+x=194843$; (8b) $x+1028463=2560089$; (8c) $768425+930069=x$; (9a) $8765063-x=7498375$; (9b) $9873476-4389354=x$; (9c) $x-832405=984876$.

13. (a) $x=10347$; (b) $x=5$ సం. 2 గ్స్. 9 పా.; (c) $x=72262$; (d) $x=848$.

14. (a) 2508800; (b) 744 రూ.; (c) 1,584 రూ.; (d) 55,700 రూ.

15. (a) 1564400; (b) 1685250; (c) 55842500; (d) 576996875.

16. (a) 750–6 శేషము; (b) 7914–75 శేషము; (c) 3180–150 శేషము; (d) 93.

17. (a) 3055104; (b) 3137536; (c) 7491231; (d) 748884.

18. (a) 86671204; (b) 103788080; (c) 41630328; (d) 5187052; (e) 391375; (f) 4878768; (g) 1299312; (h) 4687285.

19. (a) 241586912; (b) 3903167184; (c) 9267701184; (d) 15647132782.

20. (a) 201203125; (b) 1625190; (c) 26900; (d) 78264–36 శేషము.

21. (a) 786; (b) 4876; (c) 151290; (d) $239\frac{1}{25}$.

22. (a) 183600; (b) 111420; (c) 52275; (d) 28851492.

23. (a) 48874; (b) 1330801; (c) 1485081; (d) 790203.

24. (a) 44368; (b) 44415; (c) 14868; (d) 11151.

25. (a) 39884; (b) 43470; (c) 446084604; (d) 4460444604.

26. (a) 2516; (b) 3648; (c) 1728; (d) 3471.

27. (a) 70,000, 54000 సందున.—5 అంకెలు; (b) 600,000, 480,000 సందున.—6 అంకెలు; (c) 20,000,000, 12,000,000 సందున.—8 అంకెలు; (d) 3,180,000, 2,000,000 సందున.—7 అంకెలు.

28. (a) 1225; (b) 2025; (c) 7225; (d) 9025; (e) 15625; (f) 21025; (g) 34225; (h) 42025.

29. (a) 1052676; (b) 622521; (c) 877969; (d) 219961.

30. (a) 4202500; (b) 2483776; (c) 3504384; (d) 876096.

31. (a) 16810000; (b) 5588496; (c) 21902400; (d) 42928704.

32. (a) 42025; (b) 38809; (c) 10816; (d) 13689.

33. (a) $1683\times79=132957$; (b) 784×132.

34. (a) 298427; (b) 120524. 35. (a) 300; (b) 241.

36. (a) 10; (b) 9. 37. (a) భాజితము = 102, శేషము = 18; (b) భాజితము = 7, శేషము = 32.

38. (a) 187,781; (b) 9026. 39. (a) 0, 3; (b) 2, 1.

40. (a) 7; (b) 7.

41. (a) భాజ్యము = 86746, భాజితము = 366; (b) భాజ్యము = 68325, భాజితము = 145.

42. (a) 86789, 28929, 5785; (b) 167856, 33571, 4196.

43. రూ. 8–12–6 హెచ్చు. 44. ప్రస్తుతములో రూ. 10–13–10 తరుగు.

45. (a) రూ. 8–13–6; (b) పౌ. 1,524–5–1. 46. 1 ర. అం.

47. పౌ. 8–10–10; రూ. 8–3–5. 48. A 200 రూ., B 300 రూ., C 150 రూ.

49. a, b లకు అర్థములేదు. 50. c కి అర్థములేదు.

51. B కి రూ. 4–2–3 న, A కి 3 అ. 3 పై. ను, C ఇవ్వవలెను.

52. పౌ. 1139–5–0. 53. రూ. 67–1–7. 54. 45.

55. 123 వర్లగింజలు, 55 దాదాపు.

56. $6758\frac{7}{8}$ ధ్రువగములు; 11 మైళ్ల 1478 గజముల 1 అడుగు.

57. గంటకు 40 మైళ్లు. 58. 8 మంది. 59. 35 మళ్ల 1 బిసె.

60. 10 మంది; ఒక్కొక్కనికి రూ. 8–11–2. తక్కిన పదముగ్గురిలో ఒక్కొక్కనికి రూ. 15–0–5.

61. 30. 62. 720 ($2\frac{1}{2}$ రూ.), 480 (1 రూ.), 240 (4 అ.), 2840 రూ.

63. తలొక 15 రూ.; తలొక $13\frac{1}{2}$ రూ. 64. రూ. 8–2–6.

65. 30 రూ., 20 (పావలాకాసులు.)

అభ్యాసము 2 (A) (పేజీ. 17.)

1. (*a*) 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23; (*b*) 29, 31, 37, 41, 43, 47; (*c*) 53, 59, 61, 67, 71, 73; (*d*) 79, 83, 89, 97.
2. (*a*) కాదు; (*b*) అవును; (*c*) కాదు; (*d*) కాదు.
3. (*a*) 6; (*b*) 48; (*c*) 18; (*d*) 8.
4. (*a*) 3, 9, 25 లచే; (*b*) 2, 11 లు; (*c*) 2, 3, 5, 4, 9, 25 లు; (*d*) 11 చేత మాత్రమే.
6. (*a*) 1, 5 లు లేక 6, 0 లు; (*b*) 2, 0; 9, 4; లేక 5, 8 లు; (*c*) 1 మరి 00; లేక 3, 25 లు; లేక 5, 50 లు; లేక 7, 75 లు; (*d*) 2, 25; లేక 5, 50; లేక 8, 75.
7. (*a*) $a=6$, $b=1$ అగునప్పుడు; (*b*) $b=0$, $a=0$, 3, 6, 9 అగునప్పుడు; $b=2$, $a=1$, 4, 7; $b=4$, $a=2$, 5, 8; $b=6$, $a=0$, 3, 6, 9; $b=8$, $a=1$, 4, 7; (*c*) $a=1$, $b=2$ లేక 6; $a=4$, $b=0$, 4, 8; $a=7$, $b=2$, 6; (*d*) $a=4$, $b=8$.
10. (*a*) $3\times19\times19$; 3 చే; (*b*) $3^2\times5^3\times2^3$; 3 చే; (*c*) కాదు, 10; (*d*) కాదు, 50. 11. (*a*) 12; (*b*) 896; (*c*) 4; (*d*) 25.
12. 117, 21, 105, 68. 13. సోమవారము, 1928.
14. శుక్రవారము, అక్టోబరు 2, 1880. 15. 1885, 1897. 16. 8 సార్లు.
17. 17 మంది బాలురు, 21 గోళీలు. 18. రూ. 21–13–0.
19. (*a*) రూ. 11–10–0; (*b*) రూ. 3–2–0. 20. 40 వర్గగింజలు.
21. రోజుకు 12 అణాలు; 7 రోజులును 4 రోజులును. 22. 770 నలుచదరములు; 60 గజ.
23. 8 బల్లలు, 143 కట్టెలు. 24. 12 అ.; 37 గొట్టములు.
25. 12 కోట్లు, ఒక్కొక్కటి 4 గ.
26. 13 నారింజలును 15 పెదరేగులును, 18 చొప్పున; లేక 4 నారింజలును 6 పెదరేగులును, 9 చొప్పున; లేక 1 నారింజయును 3 పెదరేగులును, 6 చొప్పున.
27. $6'\times3'$ ఉన్నదావలు 24, $4'\times2'$ ఉన్నవి 54.
28. $6'\ 7\frac{1}{2}''$ ఎత్తు, $8'\ 10''\times5\frac{1}{2}''$. 29. గంటకు 9 మైళ్ల 18 స్తంభములు.
30. (*a*) గుణ్యము = 3576, గుణకము = 345, రెండవ లబ్ధభాగము = 14304; (*b*) గుణ్యము = 56432, గుణకము = 123, మూడవ లబ్ధభాగము = 169296, లేక గుణ్యము = 28216, గుణకము = 246, మూడవ లబ్ధభాగము = 169296.
31. (*a*) భాజితము = 812, భాజకము 48; (*b*) భాజితము = 842, భాజకము 768.
32. A, B లయొక్క గరిష్ఠసామాన్య అవయవము mA ± nB యొక్క అవయవము (m, n లు పూర్ణాంకములైన సరి.)
33. (*a*) 2; (*b*) 8; (*c*) 126; (*d*) 197.

34. (*a*) 115 ను, 276 ను; (*b*) 202587 ను, 281517 ను.
35. (*a*) 265; (*b*) 261. 36. (*a*) 1149; (*b*) 786.
37. (*a*) 882, శేషము = 563; (*b*) 326, శేషము = 168; (*c*) 256, శేషము = 5.
38. (*a*) $4a^2b$; (*b*) $2xyz$; (*c*) $5a^2b$; (*d*) $6q^2l^2$; (*e*) $8a^3x^2b^4$; (*f*) $11x^2yz\,abc$.
39. (*a*) $a=156$ లేక 168 లేక 192; (*b*) 2189 లేక 2232.

అభ్యాసము 2 (B) (పేజీ. 25.)

1. 4 మంది. 2. 30′; క్రమమున 25, 21, 16 వానములు. 3. 6′.
4. అర మైలు. 5. 120′. 6. 572′. 7. 3640 గజములు. 8. 180 మైళ్లు.
9. 690 మంది బాలురు. 10. 1-వ ఆగస్టు, 1982. 11. 12, 20, 15, 60.
12. (*a*) 4480 రీ; (*b*) 6336 పా.
13. (*a*) రూ. 148–12–0; (*b*) 6 మ. 2 రీ. 16 వ.
14. (*a*) 51 గం. 20 ని.; (*b*) 2 గం. 15. 1800.
16. (*a*) 38608; (*b*) 3072 లేక 3840. 17. (*a*) 9801; (*b*) 69696.
18. (*a*) 508; (*b*) 608 లేక 663.
19. (*a*) 15329, 107309; (*b*) 117 — 5 లేక 2 × 117 — 5 లేక 3 × 117 — 5 లేక k. 117 — 5. 20. (*a*) 19; (*b*) 11, 23, 35, వగైరా.
21. (*a*) 242; (*b*) 722. 22. (*a*) a^3b^3; (*b*) $a^2b^2c^3x^2yz$; (*c*) $360x^3y^3z^3u$; (*d*) $300p^4q^3r^3x^2l^2y^2m^2$; (*e*) $120k^3m^2n^3p^4q^2r^2$.
23. (*a*) 20160; (*b*) 60720; (*c*) 7703550; (*d*) 9744.
24. విధానము తప్పు; ఏ కారణాంకములచే భాగహారము ప్రారంభించెనో అవియును, అవి నిశ్శేషముగా భాగింపజాలని సంఖ్యలును ఇతరములైన ఉమ్మడి కారణాంకములను గలిగియుండ కూడదు.
25. 154, 191268. 26. 48. 27. 3; 18; 6 ను, 6 ను.
28. 308, 264; 616, 132; 44, 1848; 924, 88.
29. 288 ను, 24 ను; 96 ను, 72 ను; 96 ను, 72 ను. 30. 91, 39, 65.
31. (*a*) 396; (*b*) 299. 32. (*a*) 78; (*b*) 105.
33. (*a*) 2574, 3744; 161, 184. 34. (*a*) 96, 64 లేక 32, 192; (*b*) 19, 95.
35. (*a*) 42, 4380; 63, 7245; (*b*) 21^2, $(2415)^2$; 21^3, $(2415)^3$.

అభ్యాసము 3. (పేజీ. 36.)

1. (*a*) 32; (*b*) 15; *c*) 48; (*d*) 18. 3. $b=15$, $d=40$, $f=50$.
6. $\frac{a+x}{b+x}$ అనునది $\frac{a}{b}$ కంటె, $b>a$ అగునప్పుడు పెద్దది, $b>a$ అగునప్పుడు చిన్నది.

7. $\frac{a-x}{b-x}$ అనునది $\frac{a}{b}$ కంటె, $b>a$ అగునప్పుడు చిన్నది, $b>a$ అగు ప్పుడు పెద్దది.

8. $\frac{6}{7}$ మహత్తమము, $\frac{8}{11}$ అధమము. 9. $\frac{3468}{8643}$ అధమము, $\frac{8643}{3468}$ మహత్తమము.

10. $\frac{863}{578}$ మహత్తమము, $\frac{236}{987}$ అధమము.

11. 9′; 1′ మట్టి; $\frac{3}{4}$′ ఇటుక; $1\frac{1}{2}$′ ఇసుక; 4′ ఊబి, $1\frac{3}{4}$′ గట్టిరాంపి.

12. ఆయతములైనచో 2 విధములు; త్రిభుజములైనచో ఒకే విధమున, విషమ చతుర్భుజములైన అనేక విధములు. 13. మొత్తము గదిలో $\frac{8}{9}$. 14. 12′; క్రమమున 3′, 4′, 5′.

15. 192 రూ. 16. 4 రూ. 17. 180 మంది.

18. 42 మైళ్లు, మోటారుమీద 28, రైలుమీద 10, బళ్లమీద 4.

19. 54 పుస్తకములు. 20. B, C, D లకు క్రమమున 400 రూ., 300 రూ., 200 రూ.

21. 6 పనులు, 4 పనులు; 8 అ., 12 అ. 22. క్రమమున 180 రూ., 170 రూ., 225 రూ.

23. A కి $\frac{24}{227}$ లేక 120 రూ., B కి $\frac{44}{227}$ లేక 220 రూ., C కి $\frac{65}{227}$ లేక 325 రూ., D కి $\frac{94}{227}$ లేక 470 రూ. 24. 20, $3\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$ పా. 25. పవలో $\frac{19}{56}$, $3\frac{3}{56}$ గంటలు.

26. A $25\frac{5}{19}$ రోజులలో, B $16\frac{16}{29}$ రోజులలో, C $43\frac{7}{11}$ రోజులలో.

27. A $58\frac{46}{173}$ రోజులలో, B $89\frac{23}{113}$ రోజులలో, C $46\frac{26}{109}$ రోజులలో, D $347\frac{17}{29}$ రోజులలో. 28. మధ్యాహ్నము గడచిన $3\frac{4}{7}$ గంటలకు.

29. పగలు 8. $20\frac{2}{9}$. 30. 20′. 31. 6 మైళ్లు.

32. (a) $13\frac{83}{104}$; (b) $23\frac{64}{75}$; (c) $10\frac{83}{99}$; (d) $\frac{5}{8}$; (e) $\frac{52}{167}$; (f) $1\frac{49}{80}$; (g) $\frac{116}{1612}$; (h) $3\frac{2}{3}$. 33. (a) $4\frac{3}{5}$; (b) $2\frac{37}{68}$. 34. (a) 36 రూ.; (b) రూ. 471–8–6; (c) రూ. 1,608–0–8; (d) రూ. 25,796–14–0.

35. (a) పా. 443–19–4; (b) రూ. 2,660–15–0.

36. (a) 41 అ. 6 అం.; (b) 2786 గ.

37. (a) $\frac{23}{24}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$; (b) $\frac{11}{18}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{3}{8}$.

38. (a) $\frac{5}{21}$, $\frac{14}{35}$, $\frac{11}{24}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{13}{27}$; (b) $\frac{41}{12}$, $\frac{21}{32}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$.

39. 6 గురు కొడుకులు, ఒక్కొక్కనికి 60,000 రూ.

40. 2 సెకనులు; 4, 6, 5 ఊపులు (క్రమమున.)

41. (a) మొదటి అంచుమీది 48, 96, 144, 192 లు, క్రమముగ రెండవ దానిమీది 25, 50, 75, 100 లతో ఏకమగును; (b) ప్రతి అంగుళములోని $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ లు ఏకముగ నుండును. 42. (a) $1\frac{1}{2}$ గంటలు; (b) $53\frac{1}{3}$ నిమిషములు.

43. 6336 పా. 44. 861990 రోజులు.

45. (a) గ. సా. ప్ర. $\frac{a^2}{84b^2y^2cx}$; క. సా. గు. $=3 \cdot a^5x^2c^2yb^4$.

(b) గ. సా. ప్ర. $\frac{xyz}{b^2c^3d^5a}$; క. సా. గు. $\frac{x^2y^4z^4p}{bcd}$.

అభ్యాసము 4. (పేజీ. 43.)

1. $D=dq+r$. 2. (a) $a+b=b+a$; (b) $a+b+c=a+c+b=b+c+a=b+a+c=c+a+b=c+b+a$; (c) $a\times b=b\times a$; (d) $a\times b\times c=a\times c\times b=b\times c\times a=b\times a\times c=c\times a\times b=c\times b\times a\ldots$; (e) $\frac{a}{b}=\frac{a\times x}{b\times x}$;

(f) $\frac{a}{b}=\frac{a\div x}{b\div x}$; (g) $\frac{a}{p}+\frac{b}{p}+\frac{c}{p}+\ldots=\frac{a+b+c+\ldots}{p}$;

(h) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$; (i) $\frac{a}{b}\backsim\frac{c}{d}=\frac{ad\backsim bc}{bd}$;

(j) $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; (k) $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$. 3. $(320m+40v+p)$ వలములు; 1239 వ.

4. $\left(a+\frac{112b+28c+d}{2240}\right)$ టన్నులు. 5. $100p+10q+r$.

6. $C=\frac{18a}{2}+\frac{27b}{4}+7c$; 267 రూ. 7. $W=\frac{p}{2}+q+2r+5s$; 565 రూ.

8. $p=v\left(d-\frac{a+b+c}{60}\right)$; గంటకు 24 మైళ్లు.

9. $a=b-4(w-d)$. 10. $a=2h(l+b)$; 1440 చ. అం.

11. $v=\frac{lbc}{12}$; $33\frac{3}{4}$ ఘ. అ. 12. $I=\frac{Prt}{100}$; $308\frac{7}{10}$ రూ.

13. (a) $\{12+(m-12)\}$ అణాలు; రూ. 1–7–0; (b) $\{\frac{3}{24}$రూ. $+(e-12)\times\frac{1}{8}\}$; రూ. 3–4–0. 14. $\left(s-\frac{dx}{16}\right)$ రూపాయలు; 12 రూపాయలు.

15. $v=u+ft$; సెకను 1 ↿ 330 అ. 16. $a+\frac{b-a}{x}(n-1)$; 625 రూ.

17. $\frac{r-p}{q}$ ఏళ్లు; 25 ఏళ్లు. 18. $R=mx+fy-(m+f)z$; 28 రూ.

19. $m=rh$; $28\frac{5}{8}$ మైళ్లు. 20. $g=\left(d-\frac{f}{12}\right)s-\frac{4dr}{3}$; 36 రూ.

21. $c=\frac{2h(l+b)}{9}\times\frac{p}{16}$; 96 రూ. 22. (1) x, $x+1$, $x+2$; (2) x, $x-1$, $x-2$; (3) $x-1$, x, $x+1$; $3x$.

23. (a) $x-y=(x+m)-(y+m)$; (b) $x-y=(x-m)-(y-m)$.

24. $\frac{mn}{abc}$. 25. నూటికి $\frac{g-e-r}{100000p}$. 26. $\frac{r}{100}\{(a-b)x+(c-d)y\}$.

27. $\frac{16a}{b+c}$; 24,000. రూ. 28. $pl+qm+rn$; $\frac{pl+qm+rn}{x}$.

అభ్యాసము 5. (పేజీ. 55.)

1. 20·85, 23·88, 25·73, 30·00, 30·98, 31·00, 35·71, 36·89 మిలి యనులు.

2. (a) ·0625 రూ.; (b) ·0833 అణా; ·0052 రూపాయి. (c) ·5, ·25, ·125, ·375, ·625, ·875, ·3333, ·6667, ·78125, ·921875. (d) (i) 114·214 రూ.; (ii) 36·995 రూ.; (iii) 75·068 రూ.; (iv) 89·865 రూ.

3. (a) రూ. 748—10—0; (b) రూ. 893—15—0; (c) రూ. 690—1—1; (d) రూ. 75—15—11.

4. (a) ·25 పౌ.; (b) ·125 పౌ.; (c) ·1 పౌ.; (d) ·05 పౌ.; (e) ·0042 పౌ.

5. (a) 153·775 పౌ.; (b) 335·433 పౌ.; (c) 179·333 పౌ.; (d) 5·525 పౌ.

6. (a) పౌ. 49—13—4; (b) పౌ. 52—15—9; (c) పౌ. 93—16—8; (d) పౌ. 36—6—10.

7. 23 గం. 56 ని. 4 సె.; ·0655304 గం. లేక 3 ని. 56 సె.

8. (a) రూ. 3—2—3; (b) పౌ. 3—2—10 (దాదాపు); (c) 8 టం. 2 హం. 8 క్వా. 9 పౌ. (దాదాపు); (d) 3 మ. 1 ఫ. 5 వ. (దాదాపు).

9. 365 రో. 5 గం. 48 ని. 48 సె. 10. 11 ని. 12 సె.; 3 రో. 2 గం. 42 ని. 26 సె.

11. 2 గం. 42 ని. 26 సె.; 3546 సంవత్సరములు (దాదాపు).

12. $\frac{p}{10^2}+\frac{q}{10^3}+\frac{r}{10^4}+\frac{s}{10^5}$. 13. $\cdot\dot{3}$; $\cdot1\dot{6}$; $\cdot\dot{1}$; $\cdot0\dot{9}$.

14. $\cdot\dot{1}4285\dot{7}$, $\cdot\dot{2}8571\dot{4}$, $\cdot\dot{4}2857\dot{1}$, $\cdot\dot{5}7142\dot{8}$, $\cdot\dot{7}1428\dot{5}$, $\cdot\dot{8}5714\dot{2}$.

15. $\frac{1}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{10}{27}$. 16. $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{70}$, $\frac{1}{2700}$.

17. (a) ·258; (b) ·213; (c) ·5751; (d) ·09724.

18. (a) 0·318; 19 ని. 5 సె. (దాదాపు): (b) 2 ఫ. 119 గ. 2 అ.; (c) 1 రూ. 10 పౌ. 26 ద. గ. 6 ద. అ. (దాదాపు); (d) 1 పౌ 0 గా. 2 క్వా. 0 పైం. 1 జిల్. 19. B చే గరిష్ఠ వేగము; నూటు 1-కి A కి 5″, B కి 3·75″, C కి 4·3″ (దాదాపు) ను పట్టును. 20. $1\frac{8}{7}$ మహాత్తమము, $\frac{9}{11}$ అధమము.

21. $\frac{355}{113}$ అధమము, $3\frac{1008}{6997}$ మహాత్తమము. 22. (a) ·00000006; (b) ·000018; (c) ·082; (d) ·00000056. 23. (a) 3, 6 లు, 7, 8 లు, 8, 3 లు, 4, 4 లు; (b) 3 × 1, 6 × 2, 3 × 7, 4 × 6, 3 × 5; (c) 3 × 6, 4 × 1, 5 × 2, 2 × 9, 3 × 8, 9 × 7, 8 × 6, 6 × 3; (d) అట్టి అంకెలు లేవు,

24. (a) 32759·93; 327·60; (b) 371·530; 371·530; (c) 1021407. 102·1407; (d) ·024944; 249440.

25. (a) 1·8979; 18·979; (b) 0·519, ·0000519; (c) 0·82, 0·082; (d) ·7787, 7·787.

26. (a) పూర్ణాంక భాగము 40 × 600 లేక 24000 కు మించి యుండవలెను. కాబట్టి ఇచ్చిన ఫలితము తప్పు. (b) స్థూలఫలితము $=\frac{80\times4}{9}=\frac{320}{9}=35$. కాబట్టి, 3 తప్పు. (c) 1 షి. 4 పె. $=\frac{1}{15}$ పౌ. ∴ 660 పౌ. = 100 రూ. ∴ 1 రూ. = 6·60 పౌ. కాని ఇది 1 షి. 4 పె. కు సమము. కాబట్టి ఫలితము తప్పు. (d) ·00625 × 600 = ·625 × 6 = 3 పై చిలుకు. కాబట్టి అది 3 అం. ఉండును.

27. (a) $x=10·8480$; (b) $x=14·1561$; (c) $x=1273·12$; (d) ·00000056. 28. (a) 1·0745; (b) ·049; (c) ·30135; (d) ·765; (e) 2·147 దాదాపు.

29. $\frac{1}{u}=·309$, $\frac{1}{v}=·35$, $\frac{1}{u+v}=·164$, $\frac{1}{u-v}=2·632$, $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=·659$, $\frac{1}{u}-\frac{1}{v}=-·041$. 30. 372 మైళ్లు. 31. 19·4936 అ.

32. 24899 మైళ్లు. 33. 848 పౌ. 12·77 షి. 34. 635·68 పౌ.

35. రూ. 51—3—0. 36. 26·38, 14·17, 3643. 37. 815, 516 వేలు; బ్రిటిషు రాష్ట్రాలలో ·775, సామంత సంస్థానములలో ·225.

38. మొత్తములు 29800, 28227, 26163; 1913—14 లో అమెరికా ·50 ఇండియా ·21, ఈజిప్టు ·03; 1914—15 లో అమెరికా ·55, ఇండియా ·17 ఈజిప్టు ·03; 1915—16 లో అమెరికా ·50, ఇండియా ·19, ఈజిప్టు ·03.

39. ·01 అం. 40. ·01 అం.

41. 27·62 మైళ్లు, గంటకు $21\frac{3}{4}$ మైళ్లు. 42. ·009, ·006, ·0015 శూన్యము.

43. 1·58 అంగులు. 44. ·58 అం. 45. 7·81 గ. దాదాపు.

46. 1 గ. 2 అ. 1·56 అం. 47. 29·57; ·376; ·710; 1·505; 5·194; 9·355; 18·860.

48. భూ. $=9·3\times10^7$; నె. $=2·8\times10^9$; బుధ. $=3·5\times10^7$; శుక్ర. $=6·6\times10^7$; అంగా. $=10·4\times10^8$; బృహ. $=4·8\times10^8$; శని. $=8·7\times10^8$; యురే. $=1·8\times10^9$. 49. (a) 4·188060; (b) ·394060; (c) 57·6912; (d) ·594 దాదాపు.

50. (a) 1; (b) ·178; (c) 4·6875; (d) 22·68.

51. (a) 80 (1 + ·079425); (b) 100 (1 — ·07544); (c) 300 (1 — ·145486); (d) 500 (1 + ·309788). 52. రూ. 4—0—6.

53. రూ. 3607–6–6. 54. లోతు 45′; క్రమమున 5, 25, 10, 5.

55. A $10\frac{2}{3}$ రోజులలోను, B 32 రోజులలోను, C $13\frac{1}{3}$ రోజులలోను.

56. 50 రూ. కరెన్సీనోట్లు; $2\frac{1}{2}$ రూ. విలువగల అర్ధలు; 5 రూ. విలువగల రూపాయ కాసులు; 5 రూ. విలువగల పావలాలు; 8 అ. విలువగల నిక్కెల్ స్వరూపములు; 12 అ. విలువగల రాగి నాణెములు.

అభ్యాసము 6 (A) (పేజీ. 64.)

1. (a) 6·398; (b) 4 సెం.మీ.; (c) 6 మి.మీ.; (d) 5·35 మీ.న; 3·85 మీ.ను.
2. (a) 460 సెం.మీ.; (b) ·029 మీ.; (c) 69·281 కి.మీ.; (d) 1·174 మీ.
3. (a) 2·597 మీ.; (b) 1·845 మీ.; (c) 4·16 మీ.; (d) ·066 మీ.
4. (a) గంటకు $36\frac{12}{13}$ కి.మీ.; (b) గంటకు $45\frac{5}{7}$ కి.మీ.; (c) గంటకు $278\frac{274}{517}$ కి.మీ.; (d) 1·28 ని.
5. (a) $(1000a + 100b + 10c + d)$ మీ.; (b) $100a + 10b + c + \frac{d}{10}$; (c) $p + \frac{q}{1000} - \frac{r}{10000} + \frac{s}{1000000}$; (d) $\frac{p}{10} + \frac{q}{10000} - \frac{r}{100000} + \frac{s}{1000000}$.
6. (a) m హె.మీ. $+ d$ డెకా.మీ. $+ c$ మీ. $+ m$ డెసి.మీ.; (b) x హె.మీ. $- y$ డెకా.మీ. $+ z$ మీ.; (c) a కి.మీ. $+ b$ హె.మీ. $+ c$ డెకా.మీ. $-$ d మీ. (d) a మీ. $+ b$ డెసి.మీ. $+ c$ సెం.మీ. $- d$ మి.మీ.
7. 40,000,000 మీ.; 40,000 కి.మీ. 8. 144,000,000 కి.మీ.
9. 6214 మీ. 10. ·0013 అం., 770 మీ. 11. 39·6 అం., 17 మీ.
12. 29·5281 అం. 13. $83391\frac{7}{23}$ భ్రమణములు; $59076\frac{12}{13}$ భ్రమణములు.
14. ·914 మీ. 15. ·0055 సెం.మీ. 16. 124, 30 మి.మీ.
17. అంగుళమునకు 2·55 సెం.మీ. 18. సెకనుకు 29982 కి.మీ.
19. 157 కి.మీ., 157·716. 20. 12764251 మీ. 21. గంటకు 35·8 మైళ్లు.
22. 51 నాణెములు. 23. 62,52,000 రూ.; మైలు 1-కి 88,860 రూ.
24. సెకనుకు 1077 సెం.మీ. 25. ·0254; $\frac{y}{x} = ·0254$.
26. (a) ఫ్రెంచివారి చౌక; (b) 1495·2 ఫ్రాంకులు.
27. 1 ఫ్రాం. 25 సెం.; 1 ఫ్రాం. 25·85 సెం.; $588\frac{4}{17}$ పౌ. 28. 1 ని.

29. ఫ్రాన్సులోనే నయము; నూటికి ·84. 30. ·732.
31. 30162 ఫ్రాం. 97 సెం. 32. 51 ఫ్రాం. 71 సెం.
33. 1237 ఫ్రాం. 91 సెం.

అభ్యాసము 6 (B) (పేజీ. 71.)

1. (a) 292·4; (b) 616·32 చ. మీ.
2. (a) ·00002725; (b) 40·4695; (c) 2·471; (d) 404·687.
3. (a) 247 ఎక. (b) 12 చ. మీ.; (c) 247; (d) 0·836.
4. (a) $10000a + 100b - c$; (b) $10000p + 100q - r$; (c) $10000\frac{a}{b} + \frac{c}{10000\,d}$; (d) p ఆర్. $+ q$ చ. మీ. $+ r$ చ. డెసి.మీ. $- s$ చ. సెం.మీ.
5. (a) 6·4516 చ. సెం.మీ.; (b) 696 చ. సెం.మీ., ·0696 చ. మీ.; (c) 48 లేఖలు; (d) 6·48 చ. సెం.మీ. 6. 646 పౌ.
7. (a) 51 ఫ్రాం. 72·273 సెం.; (b) 4720 ఫ్రాం. 80 సెం.; (c) 1·86108 సెం.; (d) 1455 ఫ్రాం. 75 సెం.
8. (a) 6·63 పౌ.; (b) 94 కి.గ్రా. ఎక్కువ; (c) 2 టన్నులు ఎక్కువ; (d) ఫ్రెంచి రైల్వేలు.
9. (a) 92·2 కి.గ్రా.; (b) 18·96 ఫ్రాం.; (c) 775 పౌ.; (d) 235226480 మెటి. గ్రా. 10. (a) 48 చ. డెసి.మీ.; (b) 5·53 చ. సెం.మీ.
11. 7·5 టి. 12. 11·4 అ. 13. హెక్టారు 1-కి 1·0738 టన్నులు.
14. $227\frac{3}{11}$ పౌం.గ్రా. 15. 16·84 ఫ్రాం.
16. (a) 4907 హెక్టార్లు; (b) 23·8 చ. కి.మీ. (c) 64 హెక్టార్లు.
17. (a) ·0162; (b) $·\dot{3}\dot{6}$. 18. 1·03816. 19. 7946400 పౌ.
20. 8 టి. 7 సె.

అభ్యాసము 6 (C) (పేజీ. 75.)

1. (a) 315064048 ఘ. మీ. 756 ఘ. డెసి.మీ.; (b) 6250 కి.గ్రా. 8 హె.గ్రా. 3 డెకా.గ్రా. 6 గ్రా. 9 డెసి.గ్రా. 3 సెంటి.గ్రా. 8 మి.గ్రా.; (c) 3·754 లీటర్లు. (d) 22434·3 లీ.
2. (a) 80 గ్రా.; (b) 66·12 గ్రా.; (c) 376·688 గ్రా.; (d) 789·632 గ్రా.
3. (a) 257108·88 కి.గ్రా.; (b) 200748·24 లీ.; (c) 6·001625 కి.గ్రా. (d) 291·6 ఫ్రాంకులు. 4. 9 ఫ్రాం. 99 సెం. (దాదాపు).
5. (a) 1000 ab గ్రా.; (b) $\frac{s}{t}$ ఘ. సెం.మీ.; (c) $\frac{w}{v}$; (d) $\frac{p}{q} = r$.
6. 26·348 గ్రా. 7. $21·9\dot{5}\dot{4}$ లీ.

8. (*a*) 16387·064 C మి.మీ.; (*b*) 28·3168 C డెసి.మీ.; (*c*) 14350 ఘ. సెం.మీ.; (*d*) ·693 లీ.

9. (*a*) 405 లీ.; (*b*) 64·28 సెం.మీ.; (*c*) $39\frac{1}{9}$ రోజులు.

10. (*a*) 143 ఘ. సెం.మీ.; (*b*) 20 గ్రా.; (*c*) 33·36; (*d*) 4·536 లీ.

11. (*a*) 200 ట. (దాదాపు); (*b*) 475000 లీ.

12. 19298400 గాలనులు. 13. $574063636\frac{4}{11}$ పా.లీ. 14. 2,272 రూ.

15. 4·54, $\frac{y}{x}=4{\cdot}54$. 16. 16·39, $\frac{y}{x}=16{\cdot}39$. 17. $\cdot 170\dot{6}$.

18. 1 లీ. = ·22009 గాలను.

అభ్యాసము 7 (A) (పేజీ. 79.)

3. AC = AB − CD − DB; CD = AB − AC − DB; DB = AB − AC − CD; AB = AC + CD + DB. 4. అవి ఏకరేఖీయములు.

5. అవి ఒకే రేఖలోనుండవు. 6. 3·9 అం.; 1 సెం.మీ. = 0·39 అం.

7. 11·4 సెం.మీ.; 1″ = 2·54 సెం.మీ.

10. $1\frac{1}{2}$ అం., 2 అం., 2·3 అం.; 165 *x*., 220 *x*., 253 *x*.

11. 80 మైళ్లు, 80 మైళ్లు, 84 మైళ్లు. 14. ·2 సెం.మీ. 15. 8·4 అం.

అభ్యాసము 7 (B) (పేజీ. 81.)

7. 42° 47′; 21° 48′; 71° 37′; 7° 46′; $(89-x)°\ (60-y)'$. సంపూరకములు: 132° 47′; 111° 48′; 161° 37′; 97° 46′; $(179-x)°\ (60-y)'$. 8. 30°.

9. $180°-x°$, $x°$, $(180-x)°$; 141° 15′, 38° 45′, 141° 15′.

10. 90°. 11. 165°.

12. 13 సెకనులు; 60° 45′ 35″, 60° 50′ 22″, 238° 24′ 3″.

13. 150°, 210°, 135°, 270°. 14. $12\frac{1}{2}'$, 30′, $22\frac{1}{2}°$, $45\frac{5}{8}'$, $58\frac{1}{8}'$.

15. $82\frac{1}{2}°$, 75°, 80°, $82\frac{1}{2}°$, $17\frac{1}{2}°$, $22\frac{1}{2}°$. 16. 4320°; సెకనుకు 288°.

19. $112\frac{1}{2}°$, 180°, 135°, 135°, $112\frac{1}{2}°$; E. N. E. మరి E., లేక W. మరి W. N. W.; N. E. మరి E. N. E., లేక N. W. మరి W. N. W.; E. N. E. మరి E., లేక W. N. W. మరి W.; S. E. మరి S. S. E., లేక S. W. మరి S. S. W.; W. మరి W. N. W., లేక E. మరి E. N. E.; E. S. E. మరి S. E., లేక W. S. W. మరి S. W.; N. W. మరి W. N. W., లేక N. E. మరి E. N. E.; N. మరి N. N. E., లేక N. మరి N. N. W.

20. 5 మై., $7\frac{1}{2}$ మై., $12\frac{1}{2}$ మై. 21. $67\frac{1}{2}°$ (దాదాపు)

22. 10 అ., 74° మరి 106° దాదాపు. 23. 100 మైళ్లు.

24. A నుండి ఎదను = 2·9 మైళ్లు, B నుండి = 3·2 మైళ్లు. 26. 40°.

28. ఒక్కొక్క-దానిలో రెండేసి న్యూనకోణములు.

అభ్యాసము 7 (C) (పేజీ. 87.)

2. 8 *x*. 3. 10 *x*., 30 *x*. 6. 21′. 8. (1) 1000 *x*.; (2) 200 *x*. 9. 90°.

12. అనేకము; ఆ కేంద్రమే కేంద్రముగను వ్యాసార్ధము 9 సెం.మీ. నగల వృత్తపు పరిధిమీద.

13. అనేకము; A మీదుగానుండు వ్యాసార్ధమును పెంచగా వచ్చు రేఖమీద. 14. ఒకటే.

15. అనేకము; అదే కేంద్రము కేంద్రముగ, 2 సెం.మీ. వ్యాసార్ధముగల వృత్తపు పరిధిమీద.

16. అనేకము; A మీదుగానుండు వ్యాసార్ధముమీద. 17. ఒకటే. 20. 9 సెం.మీ., 11 సెం.మీ., 10 సెం.మీ. 25. సరళరేఖనుండి బిందువుయొక్క అధమదూరము 4 సెం.మీటర్ల లోపు అయినచో, రెండు ఫలితములు సాధ్యములు.

అభ్యాసము 7 (D) (పేజీ. 92.)

4. 1·9 మీ., 2·3 మీ. 5. (*a*) 80 *x*.; (*b*) 97·5 అ.

6. 8·3 మైళ్లు. 12. C = 80°.

అభ్యాసము 7 (E) (పేజీ. 99.)

12. 440 *x*. 14. 41 *x*. 15. 60 *x*. 16. 5·3 సెం.మీ. 17. 4 సెం.మీ.

అభ్యాసము 7 (F) (పేజీ. 104.)

10. (*b*) 108°. 11. (*a*) QR = 4·6 సెం.మీ., SR = 3·2 సెం.మీ., ∠Q = 130°, ∠R = 50°, ∠S = 130°; (*b*) QR = 7 సెం.మీ., SR = 6·5 సెం.మీ. ∠Q = 100°, ∠R = 50°, ∠S = 100°. 20. ఒక సమాంతరచతుర్భుజము.

అభ్యాసము 7 (G) (పేజీ. 112.)

1. 120°, $128\frac{4}{7}°$, 135°, 140°, 144°, 150°, 156°.

2. 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15. 3. ఉండజాలదు.

6. 2 సమకోణములు; 4 సమకోణములు; 8 సమకోణములు.

అభ్యాసము 8 (A) (పేజీ. 119.)

1. (*a*) 11; (*b*) 0; (*c*) −16; (*d*) −28.

2. $8+9-13+4$ లేక $4+9-13+8$ లేక $4+9+8-13$.

3. (*a*) 4; (*b*) 4; (*c*) −7; (*d*) $3a-b-c$.

4. 1357 ఏళ్లు; 123 ఏళ్లు. 5. 69 శతాబ్దులు. 6. ఉత్తరమునకు −15 మైళ్లు; దక్షిణమునకు 15 మైళ్లు. 7. పడమటకు −5·6 మైళ్లు; తూర్పునకు 5·6 మైళ్లు.

8. రూ. 5,060−13−6 నష్టము లేక ఋణాత్మక ప్రాప్తము. 9. −150′; +150′.

10. $(x-y-z-m)$ అ.; E అనునది A కు 54 అ. క్రిందు.

12. $-(4\frac{1}{2}x-1\frac{3}{4}y)$; $4\frac{1}{2}x-1\frac{3}{4}y$; లాభము 130 రూ.

13. (*a*) −6; (*b*) −10; (*c*) −50; (*d*) −44. 14. −17°·7.

15. $y=-4$. 16. A 2,430 రూ. బాకీ.

17. A పెట్టిన ఖరీదుకంటె D పెట్టినది 5 రూ. తక్కువ. **18.** 85°. **19.** 35°.

20. $(x+15)°$. **21.** 90°. **22.** $(y-x)°$.

23. లాభము —20, అనగా నష్టము 20 రూ. **24.** సెకనునకు 32 అ., సెకనునకు 160 అ.

25. (a) —945; (b) —1149; (c) —622; (d) 178; (e) 904.

26. కారు ఎరుపు 7,000 అ.; మంట ఎరుపు 1,000 అ.; లేత ఎరుపు —2000 అ.; తెలుపు —3,500 అ.; లేత ఆకుపచ్చ —4,400 అ.; ఆకుపచ్చ -5,000 అ.

27. (A) (a) (1) 82°; (2) 148°; (3) 212°. (b) (1) 278°; (2) 212°; (3) 148°. (B) గ్రీనిచ్ 0°, ఉజ్జయిని +76°, రోమ్ +10°, ట్రినిడాడ్ —60°, న్యూ యార్క్ —72°, టోకియో +140°, పికిన్ +120°, కాన్‌స్టాంటినోపిల్ +30°; (C) గ్రీనిచ్ —76°, ఉజ్జయిని 0°, రోమ్ —66°, ట్రినిడాడ్ —136°, న్యూ యార్క్ —148°, టోకియో +64°, పికిన్ +44°, కాన్‌స్టాంటినోపిల్ —46°; (D) గ్రీనిచ్ +72°, ఉజ్జయిని 148°, రోమ్ +82°, ట్రినిడాడ్ +12°, న్యూ యార్క్ 0°, టోకియో —148°, పికిన్ —168°, కాన్‌స్టాంటినోపిల్ +102°; గ్రీనిచ్ —140°, ఉజ్జయిని —64°, రోమ్ —130°, ట్రినిడాడ్ +160°, న్యూయార్క్ +148°, టోకియో 0°, పికిన్ —20°, కాన్‌స్టాంటినోపిల్ —110°.

28. (a) 83°; (b) 110°; (c) 101°. కేప్ టౌన్ —57°, ఫాక్లండ్ —75°, పికిన్ +15°, సెంట్ పీటర్స్‌బర్గ్ +35°, లండన్ +26°, హైదరాబాద్ 0°.

29. (A) 1912, —827937; 1913, —22202; 1915, +2503637; 1916, +2234553; (B) 43,195,176 పౌ.

30. 1912, — 39583662; 1913, — 12569527; 1914, — 34335697; 1915, —46793919; 1916, 43651649; 1,323,065,546 టన్నులు.

31. $z=x+y-m$, ఉత్తరమునకు —370 x. **32.** 19; $\frac{3}{4}$.

33. (a) $-4a$; (b) $-17b$; (c) 8; (d) $5x$.

34. (a) 82; (b) $-14x$; (c) $-10y$; (d) —217.

35. (a) $15a-15b+9c$; (b) $14a-8b+7c+8d$; (c) $8x+10y+z-7u$; (d) $17l+7m-8n$; (e) $5p-5q-10r-8a-9b-9c$; (f) $2a+2b+2c$.

36. (a) $a-6b+3c$; (b) $2p-3q+4r$; (c) $-2l+3m-4n+5a+3b$; (d) $4x-15y+7z+3u$; (e) $2y-18z+u$.

38. (a) $(r-s)$; (b) $(2b-3c-4d)$; (c) $(-3z+4u)$; (d) $(4-8)$.

39. (a) $-1+\cdot7654322$; (b) $-3+\cdot6152308$; (c) $-7+\cdot1024802$; (d) $-10+\cdot9991624$.

అభ్యాసము 8 (B) (పేజీ. 130.)

1. (a) 110, 167, 236, 32, 11, 2, 11, 20, 137; (b) 21, 36, 55, 3, 0, 1, 10, 15, 66; (c) 21, 31, 43, 7, 3, 1, $1\frac{3}{4}$, 3, 21; (d) 340, 754, 1480, 40, 10, 4, $20\frac{5}{16}$, 40, 754; (e) $\frac{17}{18}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{23}{26}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{4}{3}$, $2\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{9}$; (f) —290, —506, —804, —56, —14, —6, $-31\frac{1}{2}$, —44, —56; (g) $\frac{25}{63}$, $\frac{42}{109}$, $\frac{63}{187}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{3}$, 3, $\frac{6}{49}$, $\frac{7}{39}$, $\frac{52}{189}$.

2. (a) 13; (b) —48; (c) 13; (d) —54; (e) —36; (f) $3\frac{5}{6}$; (g) $4\frac{5}{6}$.

3. (a) 9; (b) 304; (c) 32784; (d) 2001; (e) 10; (f) 324; (g) 81.

4. (a) —3, 1, 5, 9, 13, 17; (b) 5, 8, 11, 14, 17, 20; (c) —2, 6, 14, 22, 30, 38; (d) —1, 5, 11, 17, 23, 29; (e) $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, 1; (f) $\frac{3}{7}$, 1, $1\frac{4}{7}$, $2\frac{1}{7}$, $2\frac{5}{7}$, $3\frac{2}{7}$; (g) $-\frac{7}{6}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{2}$, $2\frac{1}{6}$; (h) $-\frac{1}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{13}{9}$, $\frac{21}{9}$, $\frac{29}{9}$, $\frac{37}{9}$; (i) 4, 18, 44, 82, 132, 194; (j) —1, —2, 11, 38, 79, 134; (k) 13, 8, 11, 22, 41, 68; (l) 9, 27, 65, 123, 201, 296; (m) —5, 2, 15, 34, 59, 90; (n) —10, —11, 4, 35, 82, 145.

5. x^2y^2, x^4y^4, $x^6y^6z^2$, $a^4b^2c^2$, $\frac{1}{4}a^4x^2$, $\frac{1}{9}b^4y^2$, $\frac{4}{9}x^4y^2z^2$, $\frac{49}{64}a^2b^2c^8$, $\cdot36a^6b^2c^2$, $\cdot64a^4b^6c^{10}$, $\cdot49x^8a^6b^2c^2$, $25a^2b^2$, $9a^4c^4b^2$.

6. $8a^3$, $27b^3$, $729c^3$, $27a^3b^3$, $64a^3c^3$, $-27a^6b^3c^3$, $-64a^9l^3y^3$, $-27k^6l^3m^9$, $-\cdot125a^6b^3c^3$, $\frac{27}{512}k^{12}m^{15}$, $\frac{343}{1728}k^9x^{18}y^{24}$.

7. ab, xy, xyz, a^2bc, $a^3b^4c^2$, $8x^4y^6z^3$, $11a^4b^5c$, $5x^3y^5z^7$, $\frac{6}{7}x^3y^4$.

8. x, y, z, xy, xz, $2yz$, $3x^2yz$, $4a^2bc$, $5a^3b^2c$, $\frac{1}{2}x^2yz^2$, $\frac{1}{3}x^4y^3z^2$.

9. 24, ±6, ±4, ±4. **10.** (a) $\pm\frac{10}{3}$; (b) $+\frac{15}{14}$; (c) $\pm\frac{25}{24}$; (d) $\frac{36}{15}$ లేక $\frac{4}{81}$; (e) $\pm\frac{3}{20}$; (f) ±6; (g) 8; (h) 15; (i) 24; (j) $\pm\frac{3}{2}$.

11. (a) $26x^2-16x+4$; (b) $4x^2+2z^2$; (c) $2a^3+2b^3+2c^3+6abc$; (d) $2a^3+9a^2b-10ab^2$; (e) $15x^3+7z^2+22xy-24xz+22yz$; (f) $4a^2+4b^2+4c^2$; (g) $5x$; (h) $-11x-6y$; (i) $-11a+68b-83c$; (j) $-43c+56d$; (k) $-7p-11q$; (l) $x^4+x^3+16x^2-17x+7$; (m) $18x^3-x^2-7x+4$; (n) $19xy-39xz+4yz$; (o) $-24c^3+15d^3-16c^2d+17cd^2$; (p) $-16a^2+17b^2-3c^2-12d^2$.

12. (a) $4ab$; (b) $24xy$; (c) $2x^2-2y^2-2z^2-4xy+4xz-7yz$; (d) $a^2-2ab+b^2$; (e) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$; (f) a^3-6abc; (g) $-27x-8y$; (h) $-23c+22d-4a+4b$; (i) $-6p-7q-3r$; (j) $ab-2ac-27bc$; (k) $-lm-3mn+3ln$.

13. (a) $-k^2+12l^2-8n^2+m^2$; (b) $-8p-8r$.

14. (a) $-2a^2-5b^2+ab$; (b) $-6x^2-y^2+14z^2+2xy$.
15. $-6a^3-2xy$. 16. $17a-26b+3c$. 17. $12x^2+3y^2+6z^2-3xy-12xz$. 18. $15l^2+15m^2+15n^2-28lm-27ln+5a^2+12ab-12c^2$. 19. $-5b^3+2c^3$.
20. $-6x-8y+1-xy$. 21. $1-3x+3z$.
22. (a) x^3y^3; (b) $x^2y^2z^2$; (c) $42a^2bc$; (d) $12a^2bc$; (e) $a^3b^3c^3$; (f) a^8; (g) $-m^2n^2p^8a^{10}$; (h) 8; (i) -6; (j) $-x^5y^5z^5$; (k) $72p^2q^2r^2a^2b^{-2}c^3$; (l) -1.
23. (a) $3b$; (b) $\frac{7}{2}a^2$; (c) $\frac{5}{3}ac$; (d) $\frac{9}{4}\frac{bcd}{a}$; (e) $\frac{9}{4}a^2$; (f) a^2b^2; (g) $\frac{a^2b}{c}$; (h) $-a^4$; (i) $108x^7y^5$; (j) $b^2c^3yz^2$.
24. (a) xyz; (b) 1; (c) 1; (d) 1; (e) $\frac{a}{b}$; (f) $\frac{bc}{a^2}$; (g) $\frac{mn}{l^4}$; (h) $\frac{a^2}{b^2}$; (i) $-\frac{a^3}{b^3}$.
25. (a) 10^2, 10^3 ల సందున; (b) 10^3, 10^4; (c) 10^4, 10^5; (d) 10^5, 10^6; (e) 10^5, 10^6; (f) 10^{-1}, 10^{-2}; (g) 10^{-2}, 10^{-3}; (h) 10, 10^{-1}; (i) 10^{-3}, 10^{-4}.
26. (a) 83000000; (b) 4398600; (c) 659387000; (d) 8·356; (e) ·78937; (f) ·0000083987.
27. $8\cdot10^3+7\cdot10^2+6\cdot10+5$, $1\cdot10^4+5\cdot10^2+3\cdot10+4$, $6\cdot10^5+3\cdot10^4+8\cdot10^3+2\cdot10^2+9\cdot10+5$, $1\cdot10^7+9\cdot10^5+5\cdot10^4+6\cdot10^3+4\cdot10^2+8\cdot10+7$.
28. (a) $1897\cdot5\times10^{-5}$; (b) 6783×10^{-3}; (c) $\cdot00845\times10^{-4}$; (d) $8456\cdot384\times10^3$.
29. (a) $7\cdot8936\times10^8$; (b) $3\cdot8456\times10^3$; (c) $1\cdot65839865\times10^8$; (d) $8\cdot3295\times10^5$; (e) $1\cdot928738\times10^4$.
30. (a) 16×10^8; (b) 189×10^4; (c) 89×10^{-5}; (d) 250×10^{-1};
31. (a) $1\cdot6\times10^9$; (b) $1\cdot89\times10^6$; (c) $8\cdot9\times10^{-4}$; (d) $2\cdot50\times10^1$.
32. $10^{\cdot7781}$. 33. $10^{1\cdot3010}$. 34. (a) $\frac{128}{15625}$; (b) $\frac{15625}{110592}$; (c) $1\cdot863253$; (d) $\frac{5807}{9072000}$.

అభ్యాసము 9. (పేజీ. 139.)

2. (a) మొదటి పాదము; (b) మూడవ పాదము; (c) నాల్గవ పాదము; (d) రెండవ పాదము.
5. (a) (8, 5); (b) (10, 10); (c) (−6, −9); (d) (−10, 11) (e) (4, 5); (f) (4, 5); (g) (−4, 5); (h) (−4, −5).

8. మూడు కొలబిందువుల స్థానములు చాలును.
10. (−22, −14), 960 చ. మానములు. 11. (1·6, 1·6).
14. అది ఎన్నవ నిలువుగడిలోను, ఎన్నవ అడ్డగడిలోను ఉన్నదో.
15. మొదటి పద్ధతి 12·99 అ., 7·5 అ., మూడవ పద్ధతి 15 అ., 18 అ.
17. మెడ్రాస్, టోకియో, కేప్ టౌన్, వాంకోవర్.
18. 28·6° N. అక్షాం., 77·2° E. రేఖాం.; 18° N. అక్షాం., 45° E. రేఖాం.; 41° N. అక్షాం., 28·5° E. రేఖాం.; 49° N. అక్షాం., 2·5° E. రేఖాం.; 40° N. అక్షాం., 74° W. రేఖాం.
19. (a) 17; (b) 17; (c) 7·4; (d) 7·4.
20. (a) 5; (b) 5; (c) 17; (d) 17; (e) 37; (f) 37.
24. (0, 0), (7, 5).
25. (a) 117 చ. మానములు; (b) 117 చ. మానములు; (c) 117 చ. మానములు; (d) 1,200 చ. మానములు.
26. ఒక చతురస్రము; 2 చ. అం.
27. (a) 100 చ. మానములు; (b) 120 చ. మానములు.
29. (0, 7·4); (26, 0), (0, −11·5); (3·3, 0).
30. అవన్నియు ఏకరైఖికములు. 35. అవి ఏకరైఖికములు.
36. అవి ఏకరైఖికములు. 37. ఒకే సరళరేఖపై లేవు.
38. ఒకే సరళరేఖగా లేవు.
39. ప్రతి యుగ్మములోను ఉన్న y, x నిరూపకములకు స్పష్టమగు పరస్పర సంబంధమున్నది.

అభ్యాసము 10 (A) (పేజీ. 149.)

1. 22 : 7. 3. (a) 8 : 3; (b) 2 : 1; (c) 14 : 9; (d) 3 : 2.
4. (a) 4 ఏళ్ల తరువాత; (b) 5 ఏళ్ల తరువాత; (c) 10 ఏళ్ల తరువాత; (d) 20 ఏళ్ల తరువాత. 5. 1 : 954. 6. 1 : 2·91; 1 : 2·07; 5·74.
7. (a) $\frac{4}{9}$; $\frac{2}{3}$, కాళ్లు. (b) a^2 చ. అం., b^2 చ. అం.; $\frac{a}{b}$, $\frac{a^2}{b^2}$, కాళ్లు; (c) అవును.
11. (a) 8·5 అం.; (b) 12·16 అం. మరి 7 అం.; (c) 3·606 అ.; (d) (1) 17·32 అ.; (2) 10 అ.; (e) (1) 14·14 అ.; (2) 14·14 అ.
12. (a) 5·9 అం.; (b) $20\frac{1}{8}$ అ.; (c) $28\frac{5}{8}$ అ.; (d) 60 x.; (e) 6 అ. 2 : 1; $\frac{a(y-z)}{x-y}$; (f) 40 అ.; (g) $5\frac{1}{2}$ అ.; 6 అ.
13. 7·7 : 1 దాదాపు. 14. ·241 : 1; 1·88 : 1.
15. $\frac{8}{4}$; B యొక్క రాబడి 500 రూ., C ది రూ 533 5 4.
16. క్రమముగ, 35, 56, 60 ఏళ్లు. 17. 1 : 1·25 లేక 4 : 5.
20. వచ్చుబడి నివృత్తి తక్కువది. 21. వచ్చుబడి నివృత్తి ఎక్కువది.

24. జ్యా 30° $=\frac{1}{2}$, కోటి 30° $=\cdot 866$, స్పర్శ 30° $=\cdot 577$; జ్యా 60° $=\cdot 866$, కోటి 60° $=\frac{1}{2}$, స్పర్శ 60° $=1\cdot 732$; జ్యా 45° $=$ కోటి 45° $=\cdot 707$, స్పర్శ 45° $=1$.

25. 6·97 భ్రమణములు; సెకనునకు 20·92 భ్రమణములు.

26. (a) $x=6$ మణు.; (b) $x=\frac{75}{1024}$; (c) $x=2$ పా. $4\frac{1}{7}$ ఓ.; (d) $x=$ 112 గినీలు. 27. $\frac{8}{9}$ పెద్దది; 14·625. 28. 3: 4.

29. 3751; 3807. 30. 1: 612·8. 31. 525 : 455 : 361.

32. $\frac{16a+b}{16p+q}$. 33. $\frac{21a}{20b+c}$.

అభ్యాసము 10 (B) (పేజీ. 162.)

1. అవును, రూ. 5–10–0; రూ. 6–0–0. 2. కాదు.
3. అవును, 54 రూ., 40 రూ. 4. కాదు, 9·20 ప్రొద్దుట.
5. అవును, 99·5 పా. 7. అవును, 12 అ. 6 పై.
9. AC = 160 గ., AD = 144 గ., BC = 64 గ., DC = 80 గ.
10. విలోమ అనుపాతములు. 11. అనుపాతరహితము. 12. అనుపాతము లేదు.
13. లేదు. 14. లేదు. 15. 250 రూ.
16. రూ. 2–4–0. 17. అనుపాతము ఉన్నది. 18. అనుపాతము లేదు.
19. 20·30 కి. 20. గంటకు 9 మైళ్లు. 21. $66\frac{2}{3}$ భ్రమణములు.
22. $6\frac{2}{3}$ గం. 23. రేటు ఏదైనను సరే. 24. 9×144.
25. అది 5 కాదు, $\frac{10}{\sqrt{2}}$. 26. 8 రూ.

అభ్యాసము 10 (C) (పేజీ. 166.)

1. 6,375 రూ. 2. రూ. 20,205–8–0. 3. రూ. 74–15–0.
4. 410 రూ.; రూ. 266–8–0. 5. 2 గం. 37 ని. 11 సె.
6. 2 అ. 7·88 అం. 7. 5 గం. 8. రూ. 232–6–0.
9. 3 ఎక. 388 చ గ. 10. $28\frac{4}{7}$ రోజులు. 11. 20 రోజులు.
12. రూ. 687–8–0. 13. 35 మైళ్లు. 14. 48″.
15. 2·2 సెం.మీ., 3·1 సెం.మీ. దాదాపు. 16. రూ. 1,80,958–6–5.
17. (a) 108 మంది మనుష్యులు; (b) 90 మంది మనుష్యులు.
18. 40 గం.; ఆ చెరువుయొక్క కొలతలు; $\frac{10}{21}$ ఘ. అ. 19. $53\frac{1}{3}$ రోజులు.
20. 253·8 ఘ. అం.
21. 10·309 మీ.; 10·336 మీ.; 7930 మి.మీ.; 7951 మి.మీ. దాదాపు.
22. 647·9 మి.మీ.; 766·7 మి.మీ.; 332 అ. 23. 16 రోజులు.
24. 8·75 అ. 25. 4 గం. 26. 30 అ. $5\frac{3}{4}$ అం. 27. $62\frac{1}{2}$ టన్నులు.

28. $9\frac{4}{5}$ అనగా 10 మంది. 29. చ. అం. 1-కి 917·33 పా.
30. 2·864 గ్రాముల అమ్లజని; 4·481 గ్రా. 31. 2940 గ్రా.
32. 3 క్వా. 27·6 పా. దాదాపు. 33. 193·71 గ్రా. దాదాపు.
34. 20 అ. 2 అం. 35. 2 రూ. 36. రూ. 2–13–9 దాదాపు.
38. $13\frac{1}{2}$ గం. 39. $26\frac{4}{17}$ మైళ్లు, గంటకు. 40. రూ. 8–15–3.
41. రూ. 187–3–8. 42. 30 నిమి. 43. 18 మంది
44. $25\frac{2}{3}$ పనులు. 45. 36 రోజులు. 46. రూ. 95–7–6.
47. రూ. 235–6–0. 48. 1460 అ., సెకనుకు. 49. 87,576 రూ.
50. 40 గ్రాములు. 51. రూ. 4–11–0. 52. $91\frac{3}{7}$ రోజులు.
53. $39\frac{3}{5}$ రోజులు. 54. 5 వారములు. 55. 24 మాసములు.
56. $5\frac{2}{5}$ రోజులు. 57. రూ. 129–11–6. 58. 819 రూ.
59. 2 రోజులు; అక్కర్లేదు. 60. అవసరమే; 25 రోజులు. 61. లేదు; 65 రోజులు.
62. $78\frac{5}{53}$ రోజులు. 63. $9\frac{3}{5}$ రోజులు. 64. 4,200 రూ.
65. 320 రూ. 66. 3,672 రూ.
67. మొదటిదాని ఖరీదు: రెండవదాని ఖరీదు : : 25 : 18.
68. 1066·4 ఘ. అ. దాదాపు. 69. పని ప్రారంభమైన 5 నెలలకు.
70. $6\frac{2}{3}$ సెకనులు. 71. $1\frac{3}{5}$ గం. 72. $5\frac{95}{121}$ గం.
73. 2 గం. 49 నిమి. $53\frac{1}{3}$ సెక. 74. $52\frac{1}{2}$ గ. 75. ముట్టమొదటనుండి $11\frac{3}{4}$ రోజులు.
76. 58·6 రోజులు. 77. 60 నిమి. 78. 1 గం. $7\frac{1}{2}$ నిమి.
79. 3 గం. 80. $1\frac{9}{11}$ రోజులు. 81. 162 మంది. 82. $26,167\frac{64}{83}$ రూ.
83. 24 రోజులు. 84. 1000 గజములు, సెకను 1-కి $1407\frac{1}{2}\frac{1}{7}$ అ.
85. రూ. 22–14–0.

అభ్యాసము 11. (పేజీ. 183.)

1. A కి 930 రూ.; B కి 1,116 రూ.; C కి 1,395 రూ.
3. A కి $\frac{Ra}{a+b+c}$ రూ.; B కి $\frac{Rb}{a+b+c}$ రూ.; C కి $\frac{Rc}{a+b+c}$ రూ.; A కి 250 రూ.; B కి రూ. 187–8–0; C కి రూ. 312–8–0.
4. క్రమముగ, 99 అ., $128\frac{3}{4}$ అ., $178\frac{1}{4}$ అ. 5. 42 గ., 56 గ., 70 గ., 28 గ.
6. $687\frac{1}{2}$ సవరసుల ఎత్తు. 7. 60°, 100°, 20°. 9. 6·4 సెం.మీ.
11. 2,800 రూ.; 4,900 రూ.; 5,600 రూ. 12. 26,304 పై. 612 గ. 0 అ. 6 అం.
13. PM: QM = 2 : 1; PM: PQ = 2 : 3; QM: PQ = 1 : 3; PM = 3520 గ.; QM = 1760 గ.
14. $\frac{ax}{a+b+c+d}$, $\frac{bx}{a+b+c+d}$, $\frac{cx}{a+b+c+d}$, $\frac{dx}{a+b+c+d}$; $\frac{3}{10}$ పై.; $\frac{1}{5}$ పై.; $\frac{2}{5}$ పై.; $\frac{1}{10}$ పై.

15. $\frac{RA}{24(a+b+c)}$ రూ., 5,000.
16. పావలాకాసుల మొత్తపు విలువ రూ. 2–12–0; బేడలది రూ. 1–6–0; అణాకాసులది 11 అ.
17. A కి 504 రూ.; B కి 420 రూ.; C కి 840 రూ.
18. కొడుకునకు 12,000 రూ.; కూతురునకు 4,000 రూ.; భార్యకు 8,000 రూ.
19. అన్నవద్ద 36 గోళీలు; తమ్మునివద్ద 18; తనవద్ద 12.
20. పురుషునకు 12 అ., స్త్రీకి 8 అ., బాలునకు 6 అ.
21. సెకండు క్లాసు రూ. 25–2–0; ఇంటరు క్లాసు రూ. 12–9–0; మూడవ క్లాసు రూ. 8–6–0.
22. 7 పా. 3 ఔ. సోడియము, 1 పా. 14 ఔ. కర్బనము, 7 పా. 8 ఔ. ఆమ్లజని.
23. 32·967 గ్రాముల సోడియము, 22·933 గ్రాముల ఆమ్లజని దాదాపు.
24. 117·467 గ్రా. 25. మొదటివానికి 135 రూ., రెండవవానికి 40 రూ.
26. 640 రూ. 27. సంపత్తుకి 1,32,000 రూ., చెల్లారాంకి 36,000 రూ.
28. ఒక్కొక్కడు పా. 0–1–2 దాదాపు; ఒక్కొక్క టన్నుమీద పా. 0–3–11 దాదాపు.
29. A కి 180 రూ.; B కి 360 రూ.; C కి 120 రూ.
30. A కి 360 రూ.; B కి 144 రూ.; C కి 378 రూ.
31. A కి 490 రూ.; B కి రూ. 163–5–4; C కి రూ. 326–10–8.
32. A కి 143 రూ.; B కి 132 రూ.; C కి 187 రూ.
33. జ్యేష్ఠునకు 6,705 రూ., కనిష్ఠునకు 4,995 రూ.
34. A కి 650 రూ.; B కి 390 రూ.; C కి 780 రూ.
35. మొదటివాడు, రూ. 682–10–8; రెండవవాడు, రూ. 853–5–4; మూడవవాడు, 960 రూ.; నాల్గవవాడు 1,040 రూ.
36. 77′; 102′ 8″; 154′; 205′ 4″; 77′. 37. 9,200 రూ., 3,500 రూ.
38. 300 రూ., 200 రూ., 400 రూ., 225 రూ., 125 రూ. 39. 283 : 37.
40. 1 : 1. 41. 16·2 గాలనులు. 42. 31 : 1.
43. ఒక్కొక్కనికి రూ. 282–13–0. 44. 2,160 రూ.; 1,280 రూ.; 1,800 రూ.
45. 330 రూ., 2,100 రూ. 46. 240 రూ., 280 రూ.
47. $562\frac{2}{9}$ రూ., $491\frac{17}{18}$ రూ., $463\frac{5}{6}$ రూ. 48. $54\frac{3}{13}$ రోజులు.
49. రూ. 1,236–14–0. 50. 7938 51. 35 : 187. 52. రూ. 4–4–4.

అభ్యాసము 12. (పేజీ. 200.)

1. 20, 21, 22. 2. 15, 17, 19. 3. 31, 32, 33. 4. 6, 8, 10, 12.
5. 30. 6. 30°, 60°, 90°. 7. 36°, 72°, 72°.
8. 36°, 72°, 108°, 144°. 9. $67\frac{1}{2}$°, $112\frac{1}{2}$°. 10. 26, 30.
11. 360. 12. 10. 13. 15 ఏళ్లు. 14. తండ్రి 50, కొడుకు 25.
15. A కి 20 ఏళ్లు, B కి 30. 16. 15, $22\frac{1}{2}$, 30. 17. 40 రూ., 60 రూ., 35 రూ.

18. A, 150 రూ.; B, 80 రూ.; C, 90 రూ.; D కి 30 రూ. 19. 10, 30, 30.
20. 8 గ., 12 గ. 21. 40 గ. 22. 425 గ., 565 గ. 23. 80 గ., 60 గ.
24. 30′. 25. 8′, 3′. 26. 100 గ., 50 గ. చతురస్రభుజము 70 గ.
27. $b : a$; $\frac{c}{l}$ గ.; $\frac{lb}{a}$; $\frac{c}{l}\times\frac{a}{b}$; 90; 30; $43\frac{1}{5}$; $62\frac{1}{2}$.
28. 52 నారింజలు, 52 పెదరేగులు. 29. టవల్లు 12 గ., కాకీ 18 గ.
30. 100 ఎక. 31. 10, 12, 14, 16. 32. 187 నాణెములు.
33. 100, 150, 400, 1000. 34. $2\frac{8}{11}$ రోజులు. 35. 32 రోజులు.
36. $\frac{mnp}{np+mn+mp}$; $1\frac{13}{47}$ రోజులు.
37. 45 రోజులు. 38. 8 గం., 12 గం. 39. 45. 40. 42 లేక 24.
41. 46 లేక 64. 42. 43. 43. 240. 44. (a) గంటకు $(a+2)$ మై.; (b) గంటకు $(4-b)$ మై. 45. గంటకు $2\frac{1}{2}$ మై., $4\frac{1}{2}$ మై., $12\frac{1}{2}$ మై.
46. 20 మైళ్లు. 47. గంటకు $7\frac{1}{2}$ మై., $10\frac{5}{6}$ మై.
48. గంటకు 3 మై., 4 మై., ఆదినుండి $2\frac{2}{5}$ మై. 49. గంటకు $3\frac{7}{31}$ మై.
50. 150 మై. 52. 704′, 2112′. 53. 1296′. 54. 7 గం. $38\frac{2}{11}$′.
55. 8 గం. $27\frac{3}{11}$′, 9; 8 గం., $10\frac{10}{11}$′. 56. 15 బాలికలు.
57. ఆవుపాలు 6 పనులు; గేదెపాలు $2\frac{1}{2}$. 58. 13 పెదరేగులు, 25 నారింజలు.
59. 625 రూ., 375 రూ. 60. మున్నను స్థిరముగానున్న భట్టినుండి 3 మైళ్లు.
61. 20 రోజులు. 62. 24 వీ. నెయ్యి, 16 వీ. నూనె; నెయ్యి 3 రూ., నూనె రూ. 1–13–0.
63. 5 పసుల పాలు. 64. మొదటి రకము 6 అ. 8 పై., రెండవది 3 అ. 4 పై., $14\frac{2}{5}$ వీ., $9\frac{3}{5}$ వీ.
65. 746 రూ. 66. 400 రూ. 67. 200 రూ. 68. 30 రూ.
69. (1) $\frac{d-b}{a-c}$; (2) $\frac{t-q}{p-s}$; (3) $\frac{b-q}{a-p}$; (4) $-\frac{7}{3}$; (5) $5\frac{8}{29}$;
(6) $4\frac{1}{12}$; (7) $-3\frac{4}{7}$; (8) $\frac{41}{139}$; (9) $\frac{2a+3b}{5}$; (10) $\frac{3b+4c-5a}{2}$;
(11) $\frac{5}{2}p$; (12) $3\frac{17}{23}$; (13) $-2\frac{13}{74}$; (14) $-1\frac{519}{1077}$;
(15) $\frac{dp+ef-aq-bd}{ap+bc-d-e}$; (16) $a\left\{\frac{bsp+rbq-mqs}{qsb}\right\}$; లేక $a\left\{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}-\frac{m}{b}\right\}$; (17) 2304; (18) $\frac{1}{32}$; (19) 5;
(20) $18\frac{294}{367}$; (21) $-16\frac{16}{23}$; (22) -82; (23) $7\frac{43}{51}$; (24) $-6\frac{1}{8}$;
(25) $\frac{46}{27}$; (26) $\frac{abd}{c(a+b)}$; (27) $\frac{1}{a+b-1}$; (28) $-54\frac{18}{23}$;

(29) $-3\frac{9}{14}$; (30) $\frac{3p-q-28}{p-q}$; (31) $-1\frac{5}{2}$.

70. 10 మైళ్లు. 71. 350,000, 420,000. 72. 101000, 99000 స్త్రీలు.

73. A 150, B 50. 74. 80 రూ., 90 రూ. 75. 30 ఏళ్లు.

76. (a) $\frac{pr+n}{m}$; (b) $\frac{pr+n}{x}$; (c) $mx-pr$; (d) $\frac{mx-n}{r}$.

77. (a) $\frac{l-a+d}{d}$; (b) $\frac{2(s-na)}{n(n-1)}$; (c) $\frac{vr}{v-r}$; (d) $\frac{ls-q}{p-lr}$.

78. (a) $\frac{KnS}{m-Kn}$, $-304\cdot5$; (b) $x=-n$; $y=-m$; $x=-40$; $y=-50$. 79. (a) $p=2\cdot72$; (b) $n=-4\frac{1}{12}$; (c) $q=\frac{56}{47}$; (d) $m=1\frac{37}{131}$; (e) $a=-\frac{1}{2}$; (f) $b=-\frac{9}{7}$.

80. 8000.

అభ్యాసము 13. (పేజీ. 214.)

1. $22\frac{5}{11}$. 2. క్రమమున, దాదాపు: 103, 113, 125, 135, 150, 160; యావత్తు కాలమునకు 131.

3. (a) (1) 235859; (2) 66895; (3) 30640; (4) 13945; (5) 7010; (6) 3308; (b) 13817 దాదాపు.

4. (a) 35; (b) 46·7; (c) 40·95, 5 పైన 5 క్రింద.

5. $12\frac{1}{2}$ లెక్కలు. 6. 33·9.

7. రూ. 6–11–5 దాదాపు; రూ. 3,069–5–4.

8. (a) రూ. 0–5–4; (b) రూ. 0–15–6; (c) రూ. 0–12–8 దాదాపు.

9. (a) రూ. 9–12–0; (b) రూ. 11–3–0; (c) రూ. 8–12–0; (d) రూ. 9–13–0; (e) రూ. 10–3–0; (f) రూ. 6–5–0.

10. 29·740 దాదాపు; 5-వ తేదీ, తగ్గు ·055; 8-వ తేదీ, హెచ్చు ·02; 15-వ తేదీ, హెచ్చు ·134; 29-వ తేదీ, హెచ్చు ·103.

11. (a) గంటకు 17 మైళ్లు; గంటకు $17\frac{17}{29}$ మైళ్లు; (b) గంటకు $23\frac{4}{7}$ మైళ్లు; గంటకు $23\frac{119}{187}$ మైళ్లు; (c) (i) గంటకు $20\frac{5}{6}$ మైళ్లు; గంటకు $21\frac{57}{283}$ మైళ్లు; (ii) గంటకు $19\frac{37}{77}$ మైళ్లు; గంటకు $20\frac{20}{59}$ మైళ్లు.

12. నిమిషమునకు 1·1 ప్రదక్షిణములు దాదాపు.

13. 22 మార్కులు, సగటునకుపైన 18 మంది, క్రింద 20 మంది.

14. 3·132 దాదాపు; సగటునందు సుమారు ·001 భేదా కలుగును.

15. ·175′. 16. ·528 దాదాపు. 17. 90°·2.

	t.	t^2.	l/t^2.	g.
18. (1)	1·84	3·385	24·55	969·199.
(2)	1·74	3·027	25·28	998·019.
(3)	1·64	2·689	25·34	999·992.
(4)	2·10	4·41	24·31	959·724.
(5)	2·00	4	24·98	986·175.
(6)	2·26	5·107	25·36	1001·177.
(7)	2·16	4·666	25·27	997·624.
(8)	2·22	4·928	24·87	981·438.

g యొక్క సగటు విలువ = 986·668; l/t^2 యొక్క సగటు విలువ = 24·99.

19. ·284″. 20. రూ. 210. 21. 5 అ. 4 అం.

22. (a) గంటకు $9\frac{7}{9}$ మైళ్లు; (b) గంటకు $11\frac{11}{23}$ మైళ్లు.

23. నెలకు రూ. 12–12–2. 24. 23·44 గాలన్లు.

27. AB యొక్క మధ్యబిందువు C అగుచో, ఫలితము CB.

28. AB యొక్క మధ్యబిందువు C అగుచో, ఫలితము CD.

29. (a) $\frac{a+b+c}{2}$; (b) $\frac{4(a+b+c)}{3}$; (c) $\frac{x+y+z+u}{2}$; (d) 1.

30. రూ. 145. 31. రూ. 3–12–0. 32. 48. 33. లాభము రూ. 2.

34. రూ. 500. 35. 16 గురు మగ కూలీలు, 16 గురు ఆడ కూలీలు. 36. 16 స్థానములు.

38. 125; $\frac{a+b}{2}$. 39. 14. 40. $\frac{3x+5}{2}$; $x=9$.

41. 27·38, 13·1″. 42. 72°, 48°, 60°. 43. 120°, 90°, 60°, 90°.

45. 24 పంక్తులు.

అభ్యాసము 14 (A) (పేజీ. 227)

1. నూటికి 50; నూటికి $33\frac{1}{3}$; నూటికి 25; నూటికి $83\frac{1}{3}$; నూటికి $87\frac{1}{2}$; నూటికి $90\frac{10}{11}$; నూటికి $93\frac{3}{4}$. 2. $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}$.

3. నూటికి 11; నూటికి 25; నూటికి 45; నూటికి 84; నూటికి 100.

అభ్యాసము 14 (B) (పేజీ. 227.)

1. నూటికి 10. 2. పురుషులు నూటికి 97·72, స్త్రీలు నూటికి 2·28.

3. నూటికి 90·86. 4. నూటికి 31·21. 5. (1) పురుషులు నూటికి 10·5, స్త్రీలు నూటికి 1·0; (2) (a) నూటికి ·5; (b) నూటికి 48·3.

6. నూటికి 49·6, రూ. 4410. 7. నూటికి ·04.

8. నూటికి 157·1, నూటికి 199·7, నూటికి 670·8.

9. (a) నూటికి $107\frac{1}{7}$; (b) నూటికి 184·0, నూటికి 58·2.
10. నూటికి 481·8. 11. నూటికి $212\frac{1}{2}$. 12. నూటికి $42\frac{4}{13}$. 13. నూటికి 24·3.
14. $\frac{1}{80}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{80}, \frac{1}{40}, \frac{1}{160}, \frac{3}{160}, \frac{1}{40}$.
15. నూటికి 6, నూటికి 6·72, మొదటి ఏడుకంటె నూటికి 12 హెచ్చు; రూ. 63.
16. నూటికి $\frac{b-a}{a}\times 100$; నూటికి $\frac{c-d}{c}\times 100$. 17. టిప్లల్.
18. రెండవది; నూటికి $1\frac{1}{2}$. 19. నూటికి 6·3 దాదాపు.
20. రెండవ స్కూలు ఉత్తమోత్తమము. 21. (c) నూటికి 50. 22. 2 అ. $8\frac{1}{2}$ అం.
23. రూ. 6,300. 24. గంటకు 30 మైళ్లు, నూటికి $14\frac{2}{7}$. 25. రూ. 639—5—4.
26. నూటికి 30. 27. 150 మార్కులు. 28. పూరామార్కు 250; ప్యాసుమార్కు 125.
29. రూ. 4,000. 30. నూటికి $112\frac{1}{2}$, $56\frac{1}{4}$ లక్షలు. 31. 200 ఎక. 32. 165, 143.
33. రూ. 150, నూటికి 5. 34. 6 అ. 9 పై. దాదాపు, రూ. 25—7—0 దాదాపు.
35. నష్టము నూటికి 3·68. 36. నూటికి $4\frac{3}{23}$. 37. నూటికి 12·64.
38. రూ. 125, రూ. 160. 39. రూ. 92—1—10 దాదాపు. 40. నష్టము, నూటికి $\frac{5}{8}$.
41. నూటికి 8·3. 42. రూ. 300. 43. నూటికి $\frac{a(q-p)+bq}{ap}\times 100$.
44. ఒకొక్క పుస్తకము రూ. 1—6—2 దాదాపు; నూటికి $8\frac{1}{3}$. 45. రూ. 1.
46. నూటికి 23·8. 47. రూ. 1,152, రూ. 2,812—8—0.
48. A కంటె $44\frac{4}{9}$ తక్కువ. 49. రూ. 600. 50. A 140, B 224, C 273.
51. A 800, B 400, C 1200. 52. నూటికి 25. 53. 20 శి.
54. నూటికి $125\frac{1}{3}$. 55. నూటికి $41\frac{2}{3}$. 56. నూటికి $2\frac{1}{2}$. 57. నూటికి 20.
58. నూటికి 25. 59. నూటికి $\frac{x}{y}\times 100$, $y=200$, నూటికి 25.
60. రూ. 3,751—5—0. 61. $\frac{2qp-q^2}{p^2}\times 100$; నూటికి $60\frac{15}{16}$.
62. రూ. 500. 63. నీలిమందు: బియ్యము $=5:4$. 64. $5:6$.

అభ్యాసము 15. (పేజీ. 240.)

1. (a) రూ. 52—8—0; రూ. 402—8—0; (b) రూ. 81; రూ. 581; (c) రూ. 50—7—8; రూ. 800—7—8; (d) రూ. 68—0—8; రూ. 1,148—0—8; (e) $\frac{abc}{36500}$; $a\left(1+\frac{bc}{36500}\right)$; (f) $\frac{pqr}{5200}$; $p\left(1+\frac{qr}{5200}\right)$; (g) $\frac{xyz}{1200}$; $x\left(1+\frac{yz}{1200}\right)$.

2. $n=\frac{100\,I}{Pr}$; $r=\frac{100\,I}{Pn}$; $P=\frac{100\,I}{nr}$; (a) 4 వత్స. 2 నె.; (b) 5 వ. 359 రోజులు దాదాపు; (c) $\frac{20}{21}$ వ.; (d) $3\frac{1}{3}$ వ.; (e) నూటికి $7\frac{7}{24}$; (f) నూటికి 5; (g) నూటికి $1\frac{7}{13}$; (h) నూటికి $13\frac{1}{18}$; (i) రూ. 375; (j) రూ. 550; (k) $\frac{100\,z}{xy}$; (l) P అనునది సామ్యమునందు లేకుండ పోవును కాబట్టి.
3. (a) $\frac{(A-P)\,100}{Pr}$; (b) $\frac{(A-P)\,100}{Pn}$; (c) $P=\frac{100\,A}{100+nr}$.
4. (a) నూటికి $6\frac{1}{4}$; (b) నూటికి 75; (c) నూటికి $3\frac{1}{2}$; (d) నూటికి 240; (e) నూటికి $5\frac{25}{31}$. 5. రూ. 14,212. 6. రూ. 62—4—7; నూటికి $13\frac{8}{11}$.
7. నూటికి $2\frac{2}{3}$; నూటికి 7·1; రెండవది నయము. 8. రూ. 26—13—0.
9. $\frac{Pt(r'-r)}{100}$. 10. నూటికి 14·1. 11. రూ. 1—9—8.
12. $P\left(1+\frac{r}{100}\right)$, $P\left(1+\frac{r}{100}\right)\frac{r}{100}$. 13. నూటికి $52\frac{16}{17}$.
14. నూటికి $468\frac{3}{4}$. 15. నూటికి 10. 16. నూటికి 5; 100.
17. నూటికి $13\frac{1}{3}$; 200. 18. $100(n-1)$. 19. రూ. 143—4—2.
20. (1) నూటికి 12; (2) నూటికి 15·7. 21. నూటికి 55·9.
22. నూటికి 20. 23. నూటికి 6·2. 24. రూ. 1—2—6.
25. (a) సంవత్సర చందా; (b) యావజ్జీవ సభ్యత; (c) యావజ్జీవ సభ్యత; (d) యావజ్జీవ సభ్యత; 26. రూ. 350. 27. రూ. 300 28. రూ. 2,000.
29. రూ. 10,200. 30. రూ. 2,025. 31. నూటికి 20·5 దాదాపు.
32. 584 మిలియనులు. 33. రూ. 350. 34. నూటికి 19·9. 35. రూ. 7,500.
36. రూ. 6,480. 37. రూ. 8,200, రూ. 5,200. 38. రూ. 3,400, రూ. 3,400.
39. రూ. 1,600, రూ. 1,600. 40. రూ. 9,100. 41. రూ. $4,190\frac{10}{21}$, రూ. $3,809\frac{11}{21}$.
42. రూ. 1,096. 43. రూ. 1,437—14—3. 44. రూ. 6,000 నూటికి 6 హెచ్చన.
45. 10 నెలలు. 46. నూటికి $5\frac{15}{17}$. 47. నూటికి $1\frac{7}{13}$. 48. నూటికి 3·9.
49. నూటికి 1·7. 50. నూటికి $26\frac{2}{3}$. 51. రూ. 3,500; నూటికి $7\frac{1}{7}$.
52. రూ. 212—0—5. 53. రూ. 1,233—12—0. 54. రూ. 50—8—0; రూ. 75—12—0. ఒకే నిష్పత్తి $\frac{100}{101}$, $\frac{100}{101}$. 55. రూ. 117—18—6.

అభ్యాసము 16. (పేజీ. 251.)

1. 3255 చ. అ. 2. $82\frac{1}{2}$ చ. అ. 3. 1936 చ. గ.
4. 20 ఎక. 4533 చ. గ. 3 చ. అ. 5. 63 చ. అం.; 2·25 చ. గ.
6. $3\frac{1}{32}$ చ. అం. 7. $\frac{1}{1188}$; $\frac{1}{683}$. 8. 84,596 చ. అ.; $28000\frac{4}{9}$ చ. అ.;

9. 1800 చ. అ. 10. 328125 చ. అ. 11. 5′ 6″. 12. 235 అ.
13. 35 గ. 14. 18 అ. 15. 35 అ. 16. 18′ 8″.
17. చతురస్రము; మొదటిది 3 రెట్లు, రెండవదానికి. 18. 1′ $4\frac{1}{2}$″.
19. 24 గుడ్డలు. 20. 894 చ. అ. 21. రూ. 151–3–2; 192 నలుచదరపువి; 128 ఆయతాకారపువి. 22. రూ. 6–6–1. 23. రూ. 5–12–5.
24. రూ. 12–0–4. 25. 440 చ. అ. 26. $36\frac{3}{4}$ చ. అ.
27. రంగు అద్దపు ఖరీదు: సాదా అద్దపు ఖరీదు : : 69 : 130. 28. రూ. 37–8–7.
29. రూ. 47–8–4. 30. పొడుగు 40′, ఎత్తు 20′. 31. రూ. 120.
32. పొడుగు 92′ 6″; రూ. 14–7–3. 33. 702 చ. అ.; 1134 చ. అ.
34. (1) $3\frac{23}{32}$ చ. అ.; (2) $2\frac{1}{16}$ చ. అ.; (3) $1\frac{1}{8}$ చ. అ. 35. 72 చ. అం.
36. $26\frac{7}{8}$ చ. అం. 37. 8287 చ. అ. 38. రూ. 215–4–6.
39. 845 గ.; 100 చ. గ. 40. 50′ 8″; $126\frac{2}{3}$ చ. అ. 41. 752 చ. అ.
42. 16400 చ. అ. 43. 15625 ఘ. అ. 44. రూ. 304–10–3; 3584.
45. రూ. 95–6–3. 46. $6\frac{6}{13}$ అ.; $18\frac{6}{13}$ అ. 47. 30 అ.
48. రూ. 130–9–0 దాదాపు. 49. $51\frac{1}{2}$ ఘ. అ.
50. $2\{r(p+q)+pq\}$; $2r(p+q)+pq$; $2\{(p+2s)(q+2s)+(p+2s)(r+2s)+(q+2s)(r+2s)\}$; 13 చ. అ. $54\frac{3}{8}$ చ. అం.
51. 35 అ. 52. రూ. 34–9–4. 53. 10 అ.
54. (1) 6 చ. అం. (2) 54 చ. సెం.మీ. (3) 30 చ. సెం.మీ. (4) 0·84 చ. అం.
56. 153 చ. గ. 57. 540 చ. అ. 58. $26\frac{4}{9}$ చ. అ. 59. 20 చ. గ.
60. 3576 చ. అ. 61. $89\frac{1}{9}$ చ. అం. 62. 4400 చ. గ.
63. 1 చ. అం.; ·98 చ. అం.; ·02 చ. అం.
64. 30° మూలమట్టము, 6·21 చ. అం.; 45° మూలమట్టము, 6·125 చ. అం.
65. 5800 చ. గ. 66. (a) 30 అ.; (b) 65 అ.; (c) 180 అ.; (d) a^2+b^2; (e) k^2+1. 67. 13 అ. 68. 60 అ.
69. టేపుమీది 0, 12 గుర్తులను బొటనవ్రేలికింద నొక్కి 3 అంగుళమువద్ద ఒక చేతితోను, 7 అంగుళమువద్ద ఒక చేతితోను పట్టుకొని టేపు బిగించుము. అప్పుడు సమకోణము ఏర్పడి తీరవలయును. ఎందువల్ల? 70. 50′. 72. 29106 చ. గ. 73. $35\frac{3}{4}$ చ. అ.
74. 1414 చ. అ.
75. 8·66 చ. అ.; 10·61 చ. అ.; $12\frac{1}{4}$ చ. అ.; 10·61 చ. అ.; 8·66 చ. అ. కోణములు సంపూరక కోణములగునపుడు భూభలములు సమములు.
76. 3·65 చ. అ. 77. 196 చ. అ. 78. 3114 చ. గ. 79. 3079 చ. అ.
80. 140·78 చ. అ. 81. 1400 చ. అ. 83. 13 : 18. 84. 4 : 3
85. 5 : 6. 86. 5 : 3. 89. 2 మొస్తర్లుగా. 90. 2 మొస్తర్లుగా.

96. 95000, 612500, 225000, 78750, 136250 చ. గ.
97. 450 చ. అ. 98. 85 చ. అం. 99. 323 చ. అ.
100. వసారా = 144 చ. అ. ప్రతి విషమ చతుర్భుజాకారపు భాగమును 180 చ. అ.; ప్రతి త్రిభుజాకారపు భాగమును 36 చ. అ. మొత్తము = 432 చ. అ.

అభ్యాసము 17 (A) (పేజీ. 279.)

1. $6a^2+9ab$. 2. $21ab-12b^2$. 3. $18ac-12bc$.
4. $-9a^2-12ab+6ac$. 5. $-6xz-3yz+3z^2$.
6. $-12x^3+24x^2y-18x^2z$. 7. $x^4y^2+x^3y^3-x^3y-x^2y^2$.
8. $-40a^3b-8ab^3-8abc^2$. 9. $-90x^2y^2z+90x^2z^2y-9y^2z^2x$.
10. $33a^5b^2-66a^3b^4+55a^4b^3$. 11. $a^2-b^2+ac-bc$.
12. $12x^2+15xy-18y^2$. 13. $12x^2-12y^2+10xy+16yz-24xz$.
14. a^3-b^3. 15. (a) a^3+b^3; (b) $6x^3-17x^2y+24xy^2-16y^3$.
16. (a) $a^4+b^4+a^2b^2$; (b) $16x^3+32x^2y-17xy^2-40y^3$.
17. $6x^4-x^3-22x^2+3x+18$.
18. $54x^4-63x^3y+57x^2y^2-26xy^3+8y^4$.
19. $4x^5+x^4-x^3-10x^2-7x-5$. 20. $2500m^4+1$.
21. $12x^5+14x^4-32x^3+19x^2-42x+24$.
22. $54x^5+21x^4-3x^3-81x^2-9x+2$.
23. $36x^5+6x^4+29x^3-9x^2+4x-3$.
24 $9x^6-12x^5-30x^4+14x^3+20x^2+2x-3$.
25. $x^3+6x^2+11x+6$. 26. $x^3-5x^6+11x-6$.
27. x^3+2x^2-5x-6. 28. $24x^3-2x^2-27x-10$.
29. $12p^3+29p^2q+8pq^2-4q^3$. 30. $36x^3-18x^2y-16xy^2+8y^3$.
31. $16a^4-b^4$. 32. $81x^4-1$. 33. $512a^9-b^9$. 34. $a^8+a^4b^4+b^8$.
35. $64a^6-729b^6$. 36. $16x-6$. 37. $-4x+24$.
38. $80x^2+96x-36$. 39. $20x^2+120x-225$.
40. $-60x^2+228x-63$. 41. $-16x^2+24x+432$.
42. $36x^2-36x+9$. 43. $4x^2+36x+81$.
44. $20x^2-156x+45$. 45. $28x^2+9$.
46. 0. 47. $23p^2+36q^2$. 48. $3x^2-15x+20$.
49. $11a^2+3ab-b^2$. 50. $6a^2b+2b^3$. 51. $2p^3+24pq^2$.
52. $77a^2+147ab+70b^2$. 53. +14. 54. −36. 55. −16.
56. $1+10x+22x^2-12x^3$. 57. $1-3x^2$.
58. $6x^2-12y^2-20z^2+xy-2xz+31yz$.

59. $(-x^3-y^3-z^3+x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2-2xyz)$ ఘ. మానములు.

60. $1296\,(36a^3-27c^3+42a^2b-18ab^2+168a^2c+21ac^2+6b^2c+9bc^2-41abc)$ ఘ. అం.

అభ్యాసము 17 (B) (పేజీ. 284.)

1. $8a$. 2. $8ab$. 3. $4x$. 4. $-\frac{1}{3}$. 5. $4abcx^3$. 6. $27x^3z^3$.
7. $2a+b$. 8. $x+2y-3z$. 9. $6x-3y-4z$. 10. $x-3y+2z$.
11. $3b+5c-4d$. 12. $a+2b+3c$. 13. $-x+2y+3z$.
14. $-a+2bx-\frac{1}{2}cy+4dz$. 15. $-pq+2q^2+3qr$.
16. $3a+12$; $R=19$. 17. $4x+10$. 18. a^2+2a+3, $R=-20$.
19. $x^2+8x-21$. 20. $2x+1$. 21. $4x^2-x+1$; $R=-7$.
22. $4l^2-\frac{2}{3}l+\frac{10}{9}$; $R=-6\frac{8}{9}$. 23. $a^4-a^2b^2+b^4$.
24. $a^2+2ab+b^2$. 25. $16x^4+4x^2+1$. 26. x^2+6x-3.
27. $x^6+x^4+x^2+1$. 28. $x8-x^4+1$. 29. x^2+x-3.
30. $x3+3x^2-5x+6$. 31. $a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$.
32. $a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6$. 33. $x^2+3xy-5y^2$.
34. $3p+5$, $R=4$. 35. $4k^2-k+1$, $R=-k+2$.
36. $15x^3+14x^2-33x-11$. 37. $6x^5-x^4-5x^3+10x^2-11x+2$.
38. $x-3$. 39. x^2+2x-3. 40. x^3+x^2-5.
41. $6x^2+2x-3$. 42. $7x+3$ 43. $-26x+6$.
44. $4x^2+2x-5$. 45. $x-3$. 46. $x3+3x^2+4x-5$.
47. $2x+\frac{5}{4}$, $R=-29\frac{3}{4}x+26\frac{1}{4}$. 48. $\pm(x+77)$.
49. $3a^2-a-2$. 50. $a^4+a^3b-ab^3-b^4$.
51. $-2x+22$, $R=347$. 52. $-4x-40$, $R=-176$.

అభ్యాసము 18 (A) (పేజీ. 289.)

1. $9a^2+12ab+4b^2$. 2. $4p^2+12pq+9q^2$.
3. $16x^2+40xy+25y^2$. 4. $36x^2+12x+1$. 5. $1+6m+9m^2$.
6. $4+16ab+16a^2b^2$. 7. $49a^4+126a^2b^2+81b^4$.
8. $2500m^2+100m+1$. 9. $121a^4+286a^2b^2+169b^4$.
10. $4a^2+9b^2+16c^2+12ab+24bc+16ac$. 11. $9a^2+4b^2+25c^2+12ab+20bc+30ac$. 12. $4p^2+9q^2+r^2+12pq+6qr+4pr$. 13. $25a^2+9b^2+4c^2+30ab+12bc+20ac$.
14. $a^2+b^2+4+2ab+4a+4b$. 15. $p^2+q^2+9r^2+2pq+6qr+6pr$. 16. $x^2+y^2+9+2xy+6y+6x$.

17. 1225. 18. 2025. 19. 18225. 20. 38025. 21. 24025.
22. 40804. 23. 91809. 24. 6255001. 25. 1444.
26. 251001. 27. 1016064. 28. 17161. 29. 27225.
30. 44944. 31. 65237929, 65254084, 65270241, 65286400.
32. (a) 1050625; (b) 954549; (c) 42436; (d) 1000000.
33. (a) $(2p+q)^2$; (b) $(3m+2n)^2$; (c) $(4a+3b)^2$; (d) $(6a+4b)^2$; (e) $(7m+5)^2$; (f) $(10d+1)^2$; (g) $(a+\frac{1}{2})^2$; (h) $(5x+6y)^2$; (i) $(60x+1)^2$; (j) $(12x^2+3x)^2$.
34. (a) $4pq$, $(p+2q)^2$; (b) $12pq$, $(2p+3q)^2$; (c) $80xy$, $(5x+8y)^2$; (d) $216mn$, $(12m+9n)^2$; (e) $20m^2$, $(10m^2+1)^2$; (f) ab, $(\frac{1}{2}a+b)^2$; (g) $\frac{5}{2}ab$, $(\frac{5}{2}a+\frac{1}{2}b)^2$; (h) $\frac{20}{3}xy$, $(\frac{5}{3}x+2y)^2$; (i) $400m^2n^2$, $(40m^2+5n^2)^2$; (j) $42abcd$, $(3cd+7ab)^2$.
35. (a) y^2, $(2x+y)^2$; (b) $4n^2$, $(3m+2n)^2$; (c) a^2, $(5m+a)^2$; (d) $16c^2$, $(6a+4c)^2$; (e) 16, $(7ab+4)^2$; (f) $4p^2$, $(8p^2q+2p)^2$; (g) $9a^2b^2$, $(4a^2bc+3ab)^2$; (h) 1, $(ac+1)^2$; (i) $\frac{1}{4}$, $(x+\frac{1}{2})^2$; (j) $4y^2$, $(\frac{12}{2}x+2y)^2$.
36. $(2a+1)^2$. 37. (a) 1 చ. మై. 142400 చ. గ. (b) $1\frac{89}{193}$ చ. మై.
38. 31 చ. అ. 25 చ. అం. 39. రూ. 200–1–4. 40. $(288x+16)$ చ. అం.

అభ్యాసము 18 (B) (పేజీ. 292.)

1. $9a^2+4b^2-12ab$. 2. $4p^2+9q^2-12pq$.
3. $16x^2-40xy+25y^2$. 4. $36x^2-12x+1$. 5. $1-6m+9m^2$.
6. $4+16a^2b^2-16ab$. 7. $49a^4+81b^4-126a^2b^2$.
8. $2500m^2+1-100m$. 9. $121a^4+169b^4-286a^2b^2$.
10. $4a^2+9b^2+16c^2+12ab-24bc-16ac$.
11. $4a^2+9b^2+16c^2-12ab+16ac-24bc$.
12. $4a^2+9b^2+16c^2-12ab-16ac+24bc$.
13. $9b^2+16c^2+4a^2+24bc-16ac-12ab$.
14. $9a^2+4b^2+25c^2-12ab+20bc-30ac$.
15. $4p^2+9q^2+r^2-12pq+6qr-4pr$.
16. $25a^2+9b^2+4c^2-30ab+20ac-12bc$.
17. $a^2+b^2+4+2ab-4a-4b$. 18. 9604. 19. 38809.
20. 87616. 21. 249001. 22. 984064. 23. 6225025.
24. 1521. 25. 597529. 26. 99600400.
27. 65205625, 65189476, 65173329, 65157184.

28. (a) 1046529; (b) 950625; (c) 41616; (d) 996004.
29. (a) $(2p-q)^2$; (b) $(3m-2n)^2$; (c) $(4a-3b)^2$; (d) $(6a-4b)^2$; (e) $(7m-5)^2$; (f) $(10d-1)^2$; (g) $(a-\frac{1}{2})^2$; (h) $(5x-6y)^2$; (i) $(60x-1)^2$; (j) $(12x^2-13x)^2$.
30. (a) $-4pq$, $(p-2q)^2$; (b) $-12pq$, $(2p-3q)^2$; (c) $-80xy$, $(5x-8y)^2$; (d) $-216mn$, $(12m-9n)^2$; (e) $-20m^2$, $(10m^2-1)^2$; (f) $-ab$, $(\frac{1}{2}a-b)^2$; (g) $-\frac{5}{2}ab$, $(\frac{5}{2}a-\frac{1}{2}b)^2$; (h) $-\frac{20}{3}xy$, $(\frac{5}{3}x-2y)^2$; (i) $-400m^2n^2$, $(40m^2-5n^2)^2$; (j) $-42abcd$, $(3cd-7ab)^2$.
31. (a) y^2, $(2x-y)^2$; (b) $4n^2$, $(3m-2n)^2$; (c) a^2, $(5m-a)^2$; (d) $16c^2$, $(6a-4c)^2$; (e) 16, $(7ab-4)^2$; (f) $4p^2$, $(8p^2q-2p)^2$; (g) $9a^2b^2$, $(4a^2bc-3ab)^2$; (h) 1, $(ac-1)^2$; (i) $\frac{1}{4}$, $(x-\frac{1}{2})^2$; (j) $4y^2$, $(\frac{13}{2}x-2y)^2$.
32. $(2a-1)^2$. 33. (1) 3 చ. మై. 2957200 చ. గ. (2) $3\frac{7898}{7744}$ చ. మై.
34. 35 చ. అ. 1 చ. అం. 35. రూ. 188–0–4. 36. $(16-288x)$ చ. అం.

అభ్యాసము 18 (C) (పేజీ. 296.)

1. p^2-4. 2. a^2-16. 3. $4a^2-9b^2$. 4. $9c^2-16d^2$.
5. $25c^2-36e^2$. 6. $49a^4-9b^4$. 7. $25x^2y^2-36$.
8. $a^2+b^2-c^2+2ab$. 9. $a^2-b^2-c^2+2bc$. 10. $c^2-b^2-a^2+2ab$.
11. $a^2+c^2-b^2-d^2+2ac-2bd$. 12. $1+x^2y^2-x^2-y^2$.
13. 2436. 14. 9919. 15. 21875. 16. 39775. 17. 999775.
18. 636400. 19. ·9375. 20. ·06. 21. 3·984375.
22. 899·4375. 23. $\frac{5}{36}$. 24. $\frac{7}{144}$. 25. $\frac{35}{64}$. 26. $\frac{377}{576}$.
27. $(1000-10)(1000+10)$, 999900. 28. 1000^2-90^2; 991900.
29. $(700)^2-(20)^2$; 489600. 30. 100^2-8^2; 9936.
31. 100^2-12^2; 9856. 32. $100^2-\frac{1}{2}^2=9999\frac{3}{4}$.
33. $9997^2-1^2=99940008$. 34. $5001\frac{1}{2}^2-\frac{1}{2}^2=25015002$.
35. 13^2-12^2; 15. 36. 24^2-23^2; 47. 37. 42^2-41^2; 83.
38. 59^2-58^2; 117. 39. 2008×4; 8032. 40. 3454×2; 6908.
41. $6·284\times ·0016$; ·0100544. 42. 1000×780; 780000.
43. 140×2; 280. 44. 790×14; 11060. 45. 108800 చ. గ.
46. 1000 గ., 750 గ. 47. ·55 ఘ. సెం.మీ. 48. 253·9969 ఘ. అం.
49. 108·0768 ఘ. అం. 50. (a) 10^2-8^2; (b) 26^2-24^2; (c) 17^2-8^2, లేక 25^2-20^2; (d) 30^2-24^2.

అభ్యాసము 18 (D) (పేజీ. 300.)

1. x^2+2x+1. 2. x^2+2x-3. 3. x^2-x-20.
4. $x^2+3x-18$. 5. x^2+x-72. 6. $x^2-7x+12$.
7. $x^2-20x+96$. 8. $x^2-2x-99$. 9. $4x^2-2x-30$.
10. $9x^2+9x-28$. 11. $16x^2+4x-30$. 12. $4x^2-9$.
13. $9x^2-25$. 14. $16x^2+24x+9$. 15. $18x^2-2$.
16. $12x^2-48$. 17. $72x^2-33x+3$. 18. $42x^2-47x+10$.
19. $25x^2-5x-12$. 20. $90x^2+15x-30$. 21. $132x^2-25x-3$.
22. $112x^2+107x-24$. 23. $75x^2-45x-12$.
24. $48x^2-79x+20$. 25. 2021. 26. 4692. 27. 11330.
28. 135036. 29. 210680. 30. 8100. 31. 39852.
32. 49296. 33. x^2+x-6. 34. $x^2+3x-10$; రూ. 120.
35. $(21x^2-19x-12)$ చ. గ. 36. $(8x^2-14x-15)$ చెట్లు.
37. (a) 1268193; (b) 1275774; (c) 1272877; (d) 1277312.
38. (a) 1·6714; (b) 1·694; (c) 1·701; (d) 1·8034.

అభ్యాసము 18 (E) (పేజీ. 305.)

1. $8a^3+27b^3+36a^2b+54ab^2$. 2. $64p^3+125q^3+240p^2q+300pq^2$. 3. $27a^6+8b^6+54a^4b^2+3a^2b^4$.
4. $64p^6+336p^4x+588p^2x^2+343x^3$. 5. $125p^3+150p^2q+60pq^2+8q^3$. 6. $27a^3b^3+27a^2b^2+9ab+1$.
7. $8p^3-27q^3-36p^2q+54pq^2$. 8. $27p^3-1-27p^2+9p$.
9. $729l^3-8m^3-486l^2m+108lm^2$. 10. $1000m^3-27n^3-900m^2n+270mn^2$. 11. $343a^6-125b^6-735a^4b^2+525a^2b^4$. 12. $27l^3m^3n^3-54l^2m^2n^2p^2q^2+36lmnp^4q^4-8p^6q^6$. 13. a^6+b^6. 14. $8p^3-27q^3$. 15. $27l^3-125m^3$.
16. x^9+y^9. 17. x^6-y^6. 18. $a^{12}-b^{12}$.
19. $a^{15}+b^{15}$. 20. $27p^6-64q^6$. 21. $8m^6-27x^6$.
22. x^6+y^6. 23. $8x^3+27$. 24. $512x^3-125$.
25. $1-8a^3$. 26. $1+27x^3$. 27. 389017.
28. 941192. 29. 1092727. 30. 991026973.
31. 1006012008. 32. 551368000. 33. 21880.
34. 5425. 35. 271250. 36. 77310.
37. 1054972000. 38. 955675000. 39. $11\frac{3}{16}$.
40. $2\frac{153}{256}$. 41. 4·952899 ఘ. అ. 42. 18·84 చ. అం.
43. 2000376. 44. 300763. 45. 274625.
46. 28372625. 49. ·4879375. 50. 7·025625.
51. 9901.

అభ్యాసము 19 (A) (పేజీ. 308.)

1. $a(b+c)$. 2. $a(a+b+c)$. 3. $p(p+q+r)$.
4. $a(b-c)$. 5. $b(a+c-b)$. 6. $4(p+1)$.
7. $2(q-1)$. 8. $a(a+1)$. 9. $a(3a-2)$.
10. $x(x^2-x+1)$. 11. $y(y^2+2y+3)$. 12. $a^3(a+b+c)$.
13. $3(1-4a)$. 14. $9(1-a^2)$. 15. $5a^2b(a+3b)$.
16. $7a^2(a-2y)$. 17. $28x(x-2y)$. 18. $7x^3(7x-9y)$.
19. $2x(x^3+2y^3+3xy^2)$. 20. $abc(a+b+c)$.
21. $xyz(x+y+z)$. 22. $3x^2(2x^3+4+3x)$.
23. $a^3(a-2b-3c)$. 24. $b^3(b+2a+4c)$.
25. $a(a^2+6ab+3b^2)$. 26. $a(5a^2-6ac+6c^2)$.
27. $xyz(ax^3+by^3+cz^3)$. 28. $x^2y(z+3x^2-6xz)$.
29. $6x^2(x^2-2xy+4y^2)$. 30. $17a^2b(b-2c+3a)$.
31. $18x^2(x^2+2y^2+3z^2)$. 32. $3a(1-6a+8a^2-16a^3)$.
33. $b(b^2-1+a^3-b^3)$. 34. $c^3(a+b+c+ab)$.
35. $abcd\,(a+b+c+d)$. 36. $(a+c)\,(a+2b)$.
37. $(a-b)\,(a+c)$. 38. $(a+d)\,(b+c)$. 39. $(a+d)\,(b-c)$.
40. $(x+p)\,(x+q)$. 41. $(x-p)\,(x-q)$. 42. $(x+q)\,(x+2p)$.
43. $(x-2p)\,(x+q)$. 44. $(x+b)\,(x+a)$. 45. $(x-b)\,(x+a)$.
46. $(x-a)\,(x+b)$. 47. $(x-a)\,(x-b)$. 48. $(ab+cd)\,(a+b)$.
49. $(ab+cd)\,(a-b)$. 50. $(ab-cd)\,(a+b)$. 51. $(ab-cd)\,(a-b)$.
52. $(p+q)\,(r+s)$. 53. $(p-q)\,(r+s)$. 54. $(r-s)\,(p+q)$.
55. $(p-q)\,(r-s)$. 56. $(l+n)\,(l-m)$. 57. $(l+n)\,(l+m)$.
58. $(b+c)\,(a^2+2a-5)$. 59. $(x+1)^2\,(x-6)$. 60. $(a^2+1)\,(a+1)$.
61. $(a^2-1)\,(a+1)$. 62. $(x^2+3)\,(x-4)$. 63. $(m^2-n)\,(m+n)$.

అభ్యాసము 19 (B) (పేజీ. 310.)

1. $(a^2+b^2)^2$. 2. $(a^2-b^2)^2$. 3. $(a-c)^2$. 4. $(a+c)^2$.
5. $(2m-3n)^2$. 6. $(2m+3n)^2$. 7. $(x+\frac{1}{2})^2$. 8. $(x-\frac{1}{2})^2$.
9. $(x+\frac{1}{3})^2$. 10. $(x-\frac{1}{3})^2$. 11. $(2x-1)^2$. 12. $(2x+1)^2$.
13. $(4x+1)^2$. 14. $(4x-1)^2$. 15. $4(q+3p)^2$. 16. $4(q-3p)^2$.
17. $4\,(ab-4)^2$. 18. $(x+a+b)^2$. 19. $(x+a-b)^2$.
20. $(5x+2y)^2$. 21. $(5x-2y)^2$. 22. $4\,(2pqr+3)^2$.
23. $4\,(2pqr-3)^2$. 24. $(3abx^2+7bcy)^2$. 25. $(3abx^2-7bcy)^2$.
26. (a) $a^4+2a^2b^2+b^4$; (b) $36x^2+96xy+64y^2$; (c) $25m^2+10mn+n^2$; (d) $2500m^4\pm100m^2+1$.

అభ్యాసము 19 (C) (పేజీ. 312.)

1. $(a+2)\,(a-2)$. 2. $(2a+5)\,(2a-5)$.
3. $(4m^2+1)\,(2m+1)\,(2m-1)$. 4. $(1+10x)\,(1-10x)$.
5. $(4xy+3)\,(4xy-3)$. 6. $(7+xy)\,(7-xy)$.
7. $(3+2pq)\,(3-2pq)\,(9+4p^2q^2)$.
8. $(12x-13)\,(12x+13)$. 9. $(20ab+17)\,(20ab-17)$.
10. $y^2(16x-3z)\,(16x+3z)$. 11. $4(5m^2+2)\,(5m^2-2)$.
12. $(x^2+1)\,(x+1)\,(x-1)$. 13. $(x^2+4)\,(x+2)\,(x-2)$.
14. $(x^3+9)\,(x^3-9)$. 15. $(a+b+2c)\,(a+b-2c)$.
16. $(a^2+b^2+2c^2)\,(a^2+b^2-2c^2)$. 17. $(3a+3b)\,(b-a)$.
18. $(9x-y)\,(11y-x)$. 19. $(4a+3b-4c)\,(4a-3b+4c)$.
20. $(2l-9m+8n)\,(2l+9m-8n)$.
21. $(10c-2b-a)\,(5a+8b-2c)$.
22. $(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)\,(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.
23. $5(a+b-c)\,(c-a-b)$.
24. $(a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2cd)\,(a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2cd)$.
25. $(1+a+b)\,(1+a+b+2ab)$. 26. $(1+ab)\,(1-2a-2b+ab)$.
27. $(1+x)\,(1+y)\,(1-x)\,(y-1)$.
28. $(5a+5b+c+3d)\,(a-b-7c+5d)$.
29. $(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a-b-c)$.
30. $(a^2+a-1)\,(a^2-a+1)$. 31. $(p^2+2pq+2q^2)\,(p^2-2pq+2q^2)$.
32. $(2m^2+6m+9)\,(2m^2-6m+9)$.
33. $(4a^2+2m^2+4am)\,(4a^2+2m^2-4am)$.
34. $(6x^2+12xy+12y^2)\,(6x^2-12xy+12y^2)$.
35. $(m^2+10lm+50l^2)\,(m^2-10lm+50l^2)$.
36. $49(2x^2+y+2xy)\,(2x^2+y-2xy)$.
37. $(x^2+3x+6)\,(x^2-3x+6)$. 38. $(2x^2+x+3)\,(2x^2+x-3)$.
39. $(a^2+4a+1)\,(a^2-4a+1)$. 40. $(a^2-4a-1)\,(a^2+4a-1)$.
41. $(a^2+5a+3)\,(a^2-5a+3)$. 42. $(a^2-5a-3)\,(a^2+5a-3)$.
43. $(m^2+8m+4)\,(m^2-8m+4)$.
44. $(m^2+8m-4)\,(m^2-8m-4)$.
45. $(x^2-y^2+2xy)\,(x^2-y^2-2xy)$.

అభ్యాసము 19 (D) (పేజీ. 314.)

1. $(a+2)\,(a^2-2a+4)$. 2. $(a-2)\,(a^2+2a+4)$.
3. $(b+3)\,(b^2-3b+9)$. 4. $(b-3)\,(b^2+3b+9)$.
5. $(2a-1)\,(4a^2+2a+1)$. 6. $(2a-3)\,(4a^2+6a+9)$.
7. $(3l+4)\,(9l^2-12l+16)$. 8. $(3l-4)\,(9l^2+12l+16)$.

9. $(lm+20)(l^2m^2-20lm+400)$.
10. $(lm-30)(l^2m^2+30lm+900)$.
11. $(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^6+a^3b^3+b^6)$.
12. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^6-a^3b^3+b^6)$.
13. $(a^2+b^2)(a^4+b^4-a^2b^2)$.
14. $(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$.
15. $(7p+6)(49p^2+105p+57)$.
16. $(8z-2x-2y)\{64z^2+16z-(x+y)+4(x+y)^2\}$.
17. $(a^4+b^4)(a^8-a^4b^4+b^8)$.
18. $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$. 19. $(a+b-c)\{(a+b)^2+c(a+b)+c^2\}$.
20. $(b+c-a-d)\{(b+c)^2+(b+c)(a+d)+(a+d)^2\}$.

అభ్యాసము 19 (E) (పేజీ. 317.)

1. $(x+4)(x+1)$. 2. $(x+2)^2$. 3. $(x+6)(x+2)$.
4. $(x+3)(x+4)$. 5. $(x+12)(x+1)$. 6. $(x-4)(x-1)$.
7. $(x-2)^2$. 8. $(x-6)(x-2)$. 9. $(x-3)(x-4)$.
10. $(x-12)(x-1)$. 11. $(a+12)(a+8)$. 12. $(a+13)(a+7)$.
13. $(a+11)(a+9)$. 14. $(a+15)(a+5)$. 15. $(a+17)(a+3)$.
16. $(a-12)(a-8)$. 17. $(a-13)(a-7)$. 18. $(a-11)(a-9)$.
19. $(a-15)(a-5)$. 20. $(a-17)(a-3)$. 21. $(x+15)(x+7)$.
22. $(x-15)(x-7)$. 23. $(x+15)(x-7)$. 24. $(x-15)(x+7)$.
25. $(x+30)(x+4)$. 26. $(x-30)(x-4)$. 27. $(x+30)(x-4)$.
28. $(x-30)(x+4)$. 29. $(x+15)(x+8)$. 30. $(x-15)(x-8)$.
31. $(x+15)(x-8)$. 32. $(x-15)(x+8)$. 33. $(a^2+24)(a^2+6)$.
34. $(x-24)(x-6)$. 35. $(l-24)(l+6)$. 36. $(k+24)(k-6)$.
37. $(d+12)(d+7)$. 38. $(h-12)(h-7)$. 39. $(ab-12)(ab+7)$.
40. $(cd+12)(cd-7)$. 41. $(y+21z)(y+4z)$. 42. $(y-21z)(y-4z)$.
43. $(b-21)(b+4)$. 44. $(m+21)(m-4)$. 45. $(2x+3)(x+1)$.
46. $(3a+2)(a+2)$. 47. $(4k+3)(k+2)$. 48. $(5m+3)(m+3)$.
49. $(2y+1)(3y+31)$. 50. $(7m+6)(m+7)$.
51. $(4p+1)(2p+23)$. 52. $(10z+7)(z+3)$.
53. $(11x-3)(x-11)$. 54. $(4l-7)(3l-4)$.
55. $(13m-6)(m-2)$. 56. $(13n-12)(n-2)$.
57. $2(x-2)(x-3)$. 58. $(3y-8)(y-4)$.
59. $(2z-1)(3z-50)$. 60. $(m-3)(9m-7)$.
61. $(2k+l)(3k-11l)$. 62. $(m+1)(6m-23)$.
63. $(7ab+3)(ab-2)$. 64. $(3p-q)(4p+25q)$.
65. $(9a-4)(a+3)$. 66. $(50yz-23)(2yz+1)$.

అభ్యాసము 19 (F) (పేజీ. 319.)

1. $x=14$ లేక 9. 2. $x=5$ లేక 4. 3. $x=\frac{2}{3}$ లేక 4.
4. $x=\frac{1}{3}$ లేక $\frac{1}{2}$. 5. $x=\frac{3}{2}$ లేక $\frac{1}{2}$. 6. $x=\frac{2}{3}$ లేక $-\frac{1}{4}$.
7. $x=-12$ లేక 8. 8. $x=\pm 3, \pm 4$. 9. $x=\frac{1}{6}$ లేక $-\frac{2}{3}$.
10. $x=-9$ లేక 8. 11. $x=12$ లేక -11. 12. $x=-\frac{7}{13}$ లేక 1.
13. 8. 14. 10. 15. 4.
16. రూ. 10, రూ. 100. 17. 6 మేకలు. 18. 15′.
20. (a) 11×15; (b) 11×13; (c) 12×13; (d) 17×11; (e) 23×12; (f) 31×21; (g) 31×12; (h) 81×11.
21. 23×34. 22. (a) 46×12; (b) 43×32; (c) 32×23; (d) 25×23.
23. (a) 3991936; (b) 3981572; (c) 3988134; (d) 398899[illegible].
24. 999, 972, 285, 677. 25. 2·018984, 2·003984.

1-వ శాఖ.—రాబడి పన్ను. (పేజీ. 320.)

1. రూ. 4–11–0; రూ. 5–7–6. 2. రూ. 2,000; రూ. 140–10–[illegible].
3. రూ. 2,000; రూ. 2,500. 4. రూ. 2,000. 5. రూ. 1,875.
6. రూ. 4,000. 7. రూ. 10,000. 8. రూ. $2,044\frac{4}{17}$.
9. 124 : 183. 10. రూ. $10,082\frac{38}{61}$. 11. $186x=183y$; రూ. $9,838\frac{22}{31}$.
12. రూ. 6,000. 13. పన్ను మినహాయింపువల్ల రూ. 2,708–5–4 నయము.
14. రూ. 690. 15. రూ. 2,927–1–8. 16. రూ. 1,152. 17. రూ. 4,800.
18. $\frac{192a-cp}{d-c}$; రూ. 6,00,000.

2-వ శాఖ.—కాల క్రియలు. (పేజీ. 323.)

1. 12 రోజుల పాటు. 2. 12 రోజులు. 3. 52 రోజులు. 4. 120 రోజులు.
5. క్రియా ప్రారంభమునుండి 16 రోజుల తరువాత. 6. క్రియా ప్రారంభమునుండి $10\frac{2}{3}$ రోజుల తరువాత. 7. [illegible]$\frac{3}{8}$ రోజులు. 8. 32 మంది.
9. $17\frac{1}{7}$ నిమి. 10. 8 రోజులు. 11. A రూ. 45, B రూ. 30, C రూ. $22\frac{1}{2}$.
12. A యొక్క రోజు కూలి = రూ. $1\frac{1}{4}$; B ది = రూ. $\frac{3}{4}$; C ది = రూ. $\frac{1}{4}$.
13. 38 రోజులు. 14. 12 గంటలు. 15. 6 గంటలు. 16. 60 రోజులు.
17. $62\frac{8}{31}$ గం. 18. $38\frac{2}{3}$ గం. 19. రూ. 90, రూ. 60, రూ. 60.
20. $28\frac{1}{3}$ రోజులు. 21. $524\frac{7}{8}$ ఎక. 22. 10 రోజులు. 23. 10 రోజులు.
24. $5\frac{5}{17}$ రోజులు. 25. 8 రోజులు. 26. మిట్టమధ్యాహ్నము దాటి $16\frac{4}{11}$ నిమి.
27. $19\frac{1}{2}$ గాలన్లు. 28. $277\frac{1}{3}$ ఘ. అం. 29. 8400. 30. 12 గంటలు.

3-వ శాఖ.—కాల దూరములు. (పేజీ. 327.)

1. 8 గం. 2. 10 మైళ్లు; 10 గం. 3. $153\frac{3}{8}$ మైళ్లు. 4. $7\frac{1}{7}$ గం.
5. 81 మైళ్లు. 6. 12·30 పగలు. 7. 8 మైళ్లు. 8. 9 మైళ్లు.
9. $5\frac{5}{8}$ నిమి. 10. $7\frac{1}{2}$ గం. 11. 35 గం.; $3\frac{8}{11}$ గం. 12. 808 గజములు.
13. $8\frac{43}{154}$ మైళ్లు, గంటకు. 14. $98\frac{7}{11}$ గ. 15. $66\frac{1}{4}$ గ.
16. $8\frac{1}{3}$ గ. 17. 550 గ. 18. గంటకు 3 మైళ్లు.
19. గంటకు 1 మైలు. 20. $3\frac{1}{16}$ మైళ్లు; 225 నిమి. 21. ఒంటిగంట దాటి $5\frac{5}{11}$ నిమి.
22. ఒంటిగంట దాటి $21\frac{9}{11}$ నిమి.; ఒంటిగంట దాటి $38\frac{2}{11}$ నిమి.; ఒంటిగంట దాటి $54\frac{6}{11}$ నిమి.
23. $11\frac{8}{22}$ మైళ్లు. 24. 6 గం. 40 నిమి.

4-వ శాఖ.—లాభనష్టములు. (పేజీ. 329.)

1. నూటికి 75. 2. రూ. $123\frac{21}{25}$. 3. నూటికి $4\frac{1}{6}$. 4. నూటికి 4.
5. 152 గాలన్లు. 6. రూ. 1—4—2 దాదాపు. 7. 11 అ. 8 పై. దాదాపు.
8. నష్టము, నూటికి $8\frac{4}{7}$. 9. $\frac{1}{6}$ అధికము. 10. సమభాగములు. 11. 40 సేర్లు.
12. రూ. 1,061 4—0. 13. రూ. 1,200. 14. నూటికి $8\frac{1}{2}$; రూ. 84,000.
15. నూటికి $40\frac{5}{8}$. 16. రూ. 191—0—7 దాదాపు.
17. మొదటి రకము పౌను 1-కి 7 అ.; రెండవ రకము పౌను 1-కి రూ. 1.
18. మొదటిది పౌను 1-కి 14 అ.; రెండవది పౌను 1-కి రూ. 1—0—8.
19. రూ. 125. 20. రూ. $23\frac{1}{45}$. 21. నూటికి $11\frac{1}{9}$. 22. రూ. 21.
23. రూ. 40. 24. పౌ. $213\frac{1}{3}$. 25. రూ. 125.
26. వెండి, రూ. $2\frac{8}{361}$; ఇత్తడి, రూ. $4\frac{16}{361}$. 27. రూ. $6\frac{1}{4}$. 28. నూటికి 50.
29. 100 మరకములు 30. 400; రూ. 1000.

5-వ శాఖ.—త్రిభుజ రచన. (పేజీ. 333.)

2. 3·7 అం.; 70°, 50°. 5. 4 చం.మీ. 8. 20·4 ఎక.; 166 ఎక.
9. 2 త్రిభుజములు, ఒకటి అధికకోణాత్మకము. రెండవది న్యూనకోణాత్మకము.
11. 500 గజములు. 12. 4250 చ. గ. 13. 6720 చ. గ.

6-వ శాఖ.—ఉన్నతాంశములు, దూరములు, ప్రమాణరచన. (పేజీ. 335.)

1. 85 మైళ్లు; తూర్పునకు 20° దక్షిణమునకున్నది. 2. 40 మైళ్లు. 3. 3·2 మైళ్లు.
4. 2320 గ. 5. ·95 మై. 6. 49 అ. దాదాపు 37·5 అ.
7. 70 అ. 8. 550 అ. 9. 45°. 10. 18°. 11. 42°.
12. 45 అ. 4 అం., 55°. 13. 20 అ., 25 అ. 14. 580 అ.
15. 100 అ. 16. 305 అ.; 52·5 అ. 17. 195 అ. 18. 40 గ.
19. 63 అ. 20. గంటకు 2940 గ.

౭ శాఖ.—లేఖ్యములు. (పేజీ. 337.)

, 1, —2. 2. (a) $x=2, y=8$; (b) $x=-\frac{1}{2}, y=21$.
, $y=10$; (d) $x=7, y=10$. 3. రూ. $39\frac{1}{4}$; 17 ..;
..మీ.; 10·8 అం.; (b) పౌ. 24; 9 కి.గ్రా.; (c) 2 మీ.; 260 అం.;
. మైళ్లు; 28 కి.మీ.; (e) 97 గ.; 7·5 గా.; (f) పౌ. 176·4; 15·4 మ.
; 20·8 మిలియనుల పౌనులు; (b) 4·3 మిలియనులు; (c) 26·1 మిలియనుల
బుషెలులు. (e) 38; 52.

పునశ్చరణ పత్రములు.—మొదటి పరంపర. (పేజీ. 340.)

I

1. $3^2 \times 5 \times 7^2 \times 11^2 \times 13^2$; 5. 2. పౌ. 1—4—11 దాదాపు.
3. రూ. 73 5 4. 4. $4a-30b-6c$.
6. $\dfrac{12(12ax+20by+cz)}{12a+20b+c}$; $2\frac{1}{10}$ అ.
7. $5x^3+2x^2-3x+5$; $\dfrac{4x^3+x^2-x+5}{5x^3+2x^2-3x+5}$, $\frac{119}{149}$.
8. (b) నూటికి $4\frac{1}{2}$.

II

1. 1, 0, $\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, 13. 3. 31 అ. 4. రూ. 5—4—5; రూ. 6—2—9.
5. 105; $15\times7\times2$, $15\times7\times3$ చక్రాలు. 6. $x=18$.
7. $10b^2+28ab$. 8. $\dfrac{8a^2+b^2+7c^2+9ac-7bc-4ab}{5a-b+8c}$.

III

1. $x=2{\cdot}1$. 2. అది ఒక వృత్తపు పరిధిపై నున్నది. 3. 6·28 చం.మీ.
4. 24. 5. $-5x^2-16x-14\frac{1}{2}$; శేషము $=-28\frac{1}{2}$.
6. 24 రోజులు. 7. 35 అనుగులు. 8. 260 అ. దాదాపు.

IV

1. నూటికి $4\frac{1}{6}$. 2. రూ. 1,555—8—11. 3. గంటకు 25 మైళ్లు. 5. 26 అ.
6. (1) 3·75 చం.మీ.; (2) 15 గ్రా. 7. 2472 చ. అ. 8. $-\frac{225}{39}$.

V

1. రూ. 2,080—8—0. 2. రూ. 870. 3. 9,39,125.
4. వర్షపాతము, కర్ణు, నూటికి 99·9; స్వాతంత్ర్యము, పంప్పు, నూటికి 35·5; గరులగ్గు వరి, పంప్పు, నూటికి 18·8; దూరదవరి, కర్ణు, నూటికి 8·1; మొత్తముమీద కర్ణు నూటికి 81·3.

5. $40x+8y-12$; 140. 6. 1716 అ.
7. A = రూ. 21; B = రూ. 28; C = రూ. 35. 8. కూట.

VI

1. 3605; 5075. 2. 2527 లేక 3087. 3. 99a+
4. 40·489 చదరపు. 5. 200 గజములు. 6. A = రూ.
రూ. 3,900, C = రూ. 2,340. 7. 8 పైసలు.
8. గ.సా.భా. $= x^2 - 1$; క.సా.గు. $= (x^2-1)$ $(x^6 + x^4 + x^2 +$
(x^4+x^2+1).

VII

1. $2a^4-8a^3-16a-4$. 2. 16 అం. 3. $a+b+c$. 4. 80 అ.
5. $-10b^2-12c^2-3a^2+2ab-8bc-10ac$; -225.
6. $x=\frac{699}{380}$. 7. 19 ఫ్రాంకులు. 8. 255.

VIII

1. భారము = 184·75 గ్రా. 2. 8. 3. $(x-5)(x-4)$; $x=4$ లేక 5.
4. 87354025. 5. రూ. 400. 6. $(x+1)(x+8)$; 11×18.
7. 1920 గజ్జు. 8. 108, 144.

IX

1. 2. 2. 24·1 అ.; 24·3 అ. 3. 10. 4. 2000 ఫ్రాంకులు.
5. 2·44 చ. అం. 6. A = రూ. 10,500; B = రూ. 14,000
C = రూ. 16,800. 7. 407789. 8. రూ. 5–2–0.

X

1. 1298576. 2. 18 పౌన్లు 4 షి. 3. 62 అ. 4. 10·8 పౌన్లు.
5. $x^3(a-1)+x^2(5-c)+x(2-b)$; $-x^3(1-a)-x^2(c-5)$
$-x(b-2)$. 6. 807077·5. 7. 5·41 చ. అం. 8. 12 అ.

PRINTED AT THE DIOCESAN PRESS, MADRAS—A. 5661.

6797

END OF
TITLE